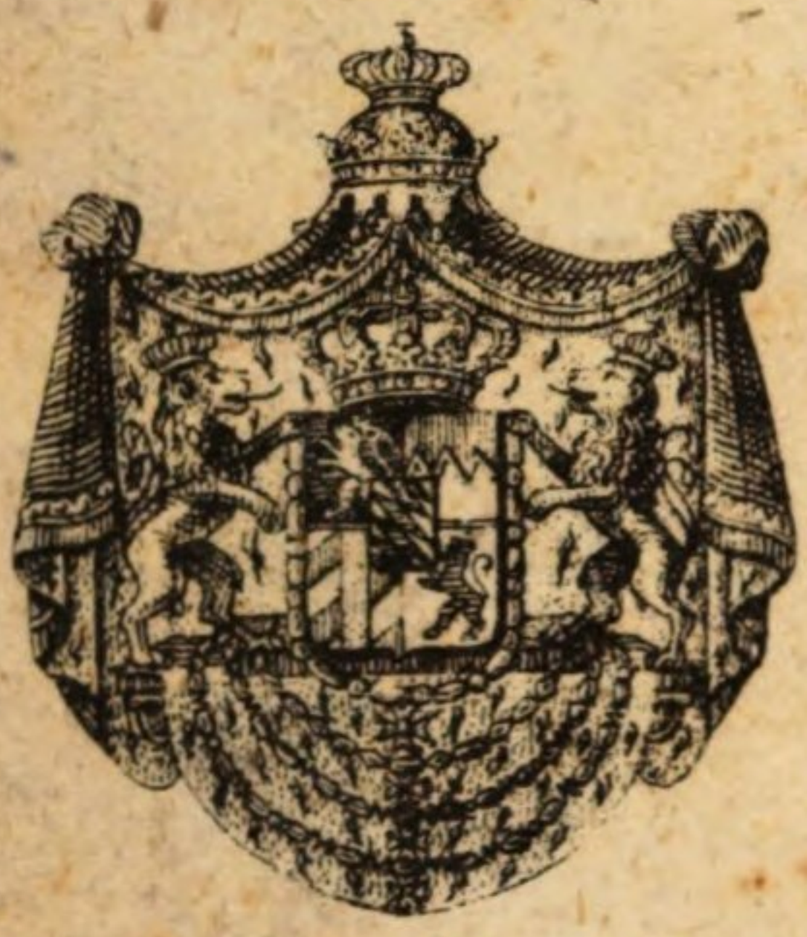
Math. P. 382 fm
(1



BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

<36610803000016

<36610803000016

Bayer. Staatsbibliothek

BIBLIOTHECA
REGIA.
MONACENSIS.

7 Bl

Die Arithmetik

bis zu

den höhern Gleichungen,

weniger

abstrakt, sondern mehr anschaulich

und

leichtfaßlich, aber möglichst gründlich und wissenschaftlich,

zunächst

für seine Vorlesungen an der Königl. Bau-Akademie zu Berlin,

dann auch

zum Gebrauche an andern ähnlichen Lehr-Anstalten, besonders aber an Gymnasien und zum Selbst-Unterrichte

bearbeitet

und mit sehr vielen Uebungs-Beispielen versehen

von

Dr. **Martin Ohm,**

Professor extr. an der Königl. Universität, Lehrer an der Königl. Bau-Akademie (zu Berlin) und mehrer gelehrten Gesellschaften Mitglied.

Berlin 1825.

Bei T. H. Riemann.

Die reine

Elementar-Mathematik,

weniger

abstrakt, sondern mehr anschaulich

und

leichtfaßlich, aber möglichst gründlich und wissenschaftlich,

zunächst

für seine Vorlesungen an der Königl. Bau-Akademie zu Berlin,

dann auch

zum Gebrauche an andern ähnlichen Lehr-Anstalten, besonders aber an Gymnasien und zum Selbst-Unterrichte

bearbeitet

und mit sehr vielen Uebungs-Beispielen versehen

von

Dr. Martin Ohm,

Professor extr. an der Königl. Universität, Lehrer an der Königl. Bau-Akademie (zu Berlin) und mehrer gelehrten Gesellschaften Mitglied.

Erster Band.

Die Analysis erfindet; die Synthesis begründet; und nur beide Methoden in Verbindung führen zum gründlichen und umfassenden Wissen.

Berlin 1825.

Bei T. H. Riemann.

152 D

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Verschiedene Zwecke erheischen verschiedene Mittel und Wege. Ueber die Einrichtung des mathematischen Unterrichts an einem Gymnasio insbesondere.

Wenn Universitäts-Vorlesungen über reine Mathematik Zuhörer voraussetzen, welche mit dem Einzelnen bereits mehr oder minder bekannt geworden sind und welche nun all dieses Einzelne, von einem abstraktern und höhern Standpunkte aus, in einem vernunftnothwendigen innerem Zusammenhange, in einer wissenschaftlichen Einheit, auffassen sollen, um dadurch an allgemeiner geistiger Ausbildung möglichst zu gewinnen, vielseitig angeregt, zur Erfindung neuer Wahrheiten vorbereitet, so wie zum leichten Eindringen in die höhern und höchsten Theile der Mathematik befähigt zu werden; wenn es ferner solchen Universitäts-Vorlesungen zukommt, die verschiedenen Ansichten, jede für sich klar und bestimmt hinzustellen, das ihnen gemeinschaftliche herauszuheben, und so der abstrak-

ten Wahrheit immer mehr sich zu nähern, so ist der Zweck der Vorlesungen an einer technischen Anstalt, deren Zöglinge ihre Mathematik unmittelbar in das praktische Leben übertragen sollen, und wiederum an einem Gymnasio, dessen Schüler sich erst zum Universitäts-Vortrag vorzubereiten haben, jedesmal ein ganz anderer, wenn auch in allen Fällen formelle Ausbildung vorzüglich berücksichtigt werden muß. — Während es an der Universität mehr darauf ankommt, den Zusammenhang des Ganzen kennen zu lehren, den Geist zu vergleichenden Reflexionen anzuregen, den Ideenkreis zu erweitern, auch die Vernunft in Anspruch zu nehmen, da wo der Verstand hinlänglich genaue und bestimmte Grenzen gezogen hat, innerhalb deren das von ihm unerreichbare mit Vernunftnothwendigkeit liegen muß, — kommt es an einer technischen Anstalt mehr darauf an, die abstrakten Begriffe der Wissenschaft möglichst anschaulich zu machen und vorzüglich von derjenigen Seite zu betrachten, von welcher sie in ihrer Anwendung auf das Leben sich zeigen, damit der Zögling während des streng systematischen und wissenschaftlichen Vortrags (der nirgends fehlen darf, in der Mathematik) doch immer zugleich die Möglichkeit und auch die Art und Weise der Anwendung bemerke und durchschaue. Ein dem letzteren ähnliches Bedürfniß hat das Gymnasium, obgleich der Unterricht daselbst weniger die praktische, mehr dagegen die formelle Ausbildung, aber doch immer nur die Ausbildung des Verstandes zu berücksichtigen, d. h. den Schüler vorzüglich an ein selbstthätiges und consequentes Denken zu gewöhnen hat.

Den „Versuch eines vollkommen consequenten Sy„stems der Mathematik" (Berlin 1822) hat der Verf. zunächst für seine Universitäts-Bedürfnisse ausgearbeitet; *) die gegenwärtige Schrift soll dagegen mehr dem Bedürfnisse einer höhern technischen Anstalt und eines Gymnasiums entsprechen. Während jenes über die gesammte niedere und höhere Mathematik mit derselben Einheit der Darstellung sich zu erstrecken beabsichtigt, in den Elementen bereits den abstraktesten Standpunkt, wie solcher in der Folge unentbehrlich wird, zu erfassen strebend, bewegt sich diese Schrift in einer weit untergeordnetern Sphäre und berücksichtigt mehr das Bedürfniß des Augenblicks und weniger das Bedürfniß der Zukunft, wie solches erst nach und nach im Felde der höhern Spekulation sich erzeugt. Während jene Schrift nur denjenigen zusagen kann, welchen in der höhern Mathematik das Bedürfniß einer größern Consequenz, und somit auch das Bedürfniß einer weniger materiellen Ansicht in den Elementen fühlbar geworden ist, hat diese alle diejenigen zu befriedigen, welche sich noch an Abstraktion gewöhnen und von den sinnlichen

---

*) Andere Arbeiten haben den Verf. bisher immer abgehalten, die folgenden Theile dieses Werkes, wovon 1822 die beiden ersten erschienen sind, drucken zu lassen. Die zu Anfang dieses Jahres erschienene „Lehre vom Größten und Kleinsten" kann als der 5te Theil desselben angesehen werden, mußte um ein fühlbares Bedürfniß der Universitäts-Vorlesungen des Verf. zu befriedigen, schon früher erscheinen und konnte deshalb dem gedachten Werke zur Zeit auch nicht eingereihet werden. Die nächsten beiden Theile (der 3te und 4te) werden Differential- und Integral-Rechnung enthalten und können gedruckt werden, sobald die gegenwärtige Schrift beendigt ist. Die dann folgenden Theile werden Geometrie, und reine Statik und Mechanik aufnehmen; aus einem höhern und analytischen Standpunkte genommen.

Wahrnehmungen zu geistigern Reflexionen erst sich erheben sollen.

Weil aber Consequenz das unentbehrlichste ist eines jeden Vortrags, welchen Zweck er sonst zu erreichen habe, so hat der Verf. auch hier gesucht, möglichst consequent zu seyn, und da wo, der Anlage der Schrift zu Folge, er es nicht mehr in der ideellen Vollkommenheit seyn konnte, hat er doch auf die Nothwendigkeit derselben noch besonders aufmerksam gemacht, und dadurch zugleich auf das Bedürfniß, von vorne herein noch abstrakter zu Werke zu gehen, sobald man von dieser Stelle ab sichern Schrittes weiter zu dringen beabsichtigt. Diese Andeutungen, wenn sie hier auch nicht weiter verfolgt werden, sollen dazu dienen, dem geistiger Ausgebildeten unter den Zöglingen neue Gesichtspunkte zu eröffnen, sie auf neue Studien aufmerksam zu machen, überhaupt sie immer mehr und mehr aus dem Gebiete der Sinnlichkeit zu einem höheren und geistigeren Leben mit hinüberzuziehen. Und denjenigen unter den Zuhörern, deren Sinn für eine höhere oder tiefere Einsicht noch nicht rege geworden ist, oder die vermöge ihres schnellen Uebertritts in das praktische Leben das Bedürfniß dazu nie kennen lernen sollten, können diese Andeutungen wenigstens nicht schädlich werden, wenn sie der Lehrer nur mit Vorsicht benützt.

Jeder Vortrag, von welchem Standpunkt er ausgehen möge, wenn er nur consequent ist, kann gut genannt werden, obgleich für diese Zwecke der eine, für andere Zwecke ein anderer passender seyn kann. Verschiedene Systeme dagegen mit einander zu vermengen,

kann nur Verwirrung erzeugen. Daher hat der Verf. hier eine Ansicht in den (§. §.) consequent durchzuführen gesucht, und andere Ansichten, deren Berücksichtigung ihm der nähern Anwendbarkeit wegen zweckmäßig erschien, in besondern Noten beigebracht, und solche mit der Ansicht des Textes zu vereinigen gestrebt, so nehmlich, daß er die wesentliche Identität aller, möglichst anschaulich nachzuweisen und den Unterschied in der Form näher zu bezeichnen bemüht war. Der Lehrer (so wie der Selbstlernende) hat daher bei dem Gebrauche dieses Lehrbuches bloß mit Sorgfalt darauf zu sehen, daß nicht zwei Ansichten mit einander vermengt und verwechselt werden, daß man sich einer jeden getrennt bewußt bleibe und vorzüglich die Ansicht des Textes als die mit aller möglichen Consequenz verfolgte im Auge behalte. *)

Diese Schrift besteht aus 3 Bänden, deren jeder einzelne für sich ein Ganzes bildet und auch einzeln unter seinem Titel von der Verlagshandlung ausgegeben

---

*) Keinem Lehrer kann es erwünscht seyn, wenn sein Zuhörer, der noch Anfänger ist, neben seinem Vortrage, über denselben Gegenstand noch einen zweiten (schriftlichen oder mündlichen) benutzt. Und will der Lehrer, daß der Vortrag in seiner Consequenz und eben deshalb mit Nutzen aufgefaßt werde, so hat er nichts angelegentlicher zu thun, als seine Zuhörer zu bitten, so lange sie seinen Vortrag besuchen, alles früher über denselben Gegenstand getriebene dergestalt bei Seite zu setzen, daß sie bloß auf den innern Zusammenhang seines Vortrags Rücksicht nehmen, damit sie nachgehends jede Ansicht getrennt verfolgen, die ihnen zusagende herausnehmen oder sich aus dem was allen gemein ist, eine eigene noch mehr ansprechende, aus sich selbst herausbilden können. Jeder vernünftige Lehrer muß solches wünschen, und es wäre daher die größte Ungerechtigkeit, wenn irgend jemanden dieser Wunsch verargt oder gar als eine gemeine Verachtung der Arbeiten Anderer ausgelegt würde.

wird. In dem vorliegenden ersten Theile sollten der Anlage nach, die ersten zwei Drittheil ziemlich gründlich behandelt werden, und wo in dem letzten Drittheil diese ideelle Gründlichkeit vermißt werden könnte, hat der Verf. auf das früher erwähnte Werk verwiesen.

Der zweite Band der gegenwärtigen Schrift enthält: 1) die allgemeine Größenlehre, *) 2) ebene Geometrie, 3) analytische und ebene Trigonometrie.

Der dritte Band endlich wird zu Ostern 1826 erscheinen und 1) körperliche Geometrie, 2) beschreibende Geometrie und Perspektive, endlich 3) anhangsweise die sphärische Trigonometrie enthalten.

Die Verlagshandlung hat für schönes Papier und guten Druck gesorgt und wird auch in den folgenden zwei Bänden für feine und reine Figurentafeln Sorge tragen.

Der Verf. gebraucht nun diesen ersten Theil ohngefähr auf folgende Art:

1) Er nimmt erstlich das 1te und 2te Kapitel durch und sieht mit großer Sorgfalt darauf, daß die Zeichen in ihrer hier festgestellten Bedeutung nicht nur wohl aufgefaßt, sondern auch nach und nach geläufig werden; er macht darauf aufmerksam, daß diese beiden ersten Kapitel die Grundlage alles Operirens enthalten, und daß sie für die Mathematik bei weitem mehr noch leisten, als die Formenlehre für den Sprach-Unterricht; er

---

*) Diese hängt so innig mit dem ersten Bande zusammen, daß der Verf. bitten muß, über diesen ersten Band nicht eher ein Urtheil zu fällen, als bis nach 4 — 5 Monaten sein Zusammenhang mit dieser allgemeinen Größen-Lehre näher untersucht werden kann.

läßt die Formeln von dem Zöglinge selbstthätig entwickeln, die entwickelten auf ein Blatt mit ihrer Nummer tabellarisch ordnen, die praktischen Regeln, welche aus jeder Formel für das Operiren hervorgehen, selbstthätig abstrahiren, endlich aber das durch diese Arbeit begründete Operiren hinlänglich einüben, so daß hier schon, während vom 3ten Kapitel nur erst die Lehre der ganzen Potenzen vorgetragen ist, die Uebungs-Beispiele des 6ten Kapitels (n. n. X—XVII.) herbeigezogen und dem Zuhörer zur häuslichen Einübung empfohlen werden. *)

2) Sind auf diese Weise die 4 elementaren Operationen gut eingeübt, so beendigt der Verf. schnell die Lehre der Potenzen im 3ten Kapitel, nimmt von den Wurzeln nur das unentbehrlichste und läßt dann die Potenzenlehre an den Beispielen (Kap. 6. n. n. XVIII—XX.) vollends tüchtig einüben, so jedoch, daß der Schüler die Beispiele zu Hause durchrechnet, dem Lehrer aber von Zeit zu Zeit in den Lehrstunden über das Verwandeln der Ausdrücke genau Rechenschaft ablegt, dergestalt nehmlich, daß er jedesmal bei jeder Einzelnen dieser Verwandlungen die Gründe genau in den Elementar-Formeln der Tabelle nachweiset, welche dazu führen. **) Dadurch wird

---

*) Praktische Buchstaben- und Ziffernrechnung kann man nie genug treiben. Mangel an praktischer Fertigkeit im elementaren Operiren hält das Fortschreiten im Kalkul beinahe eben so auf, als wenn unterlassen wird, den Geist und die Selbstthätigkeit gehörig in Anspruch zu nehmen.

**) Dieses Geschäft ist ähnlich dem, welches der Sprachlehrer vorzunehmen pflegt, wenn seine Schüler die Formenlehre sich in das Gedächtniß geprägt haben oder doch eingeprägt haben sollen, um die Schüler dahin zu bringen, bei allem was sie lesen in der Sprache, dieser Regeln der Formlehre sich immer wieder bewußt zu werden.

verhindert, daß das praktische Arbeiten nicht in ein bloß mechanisches ausarte, und der Zuhörer erlernt zugleicher Zeit selbstthätig bestimmte Zwecke zu verfolgen und somit auch sich überall selbst zu helfen, und neues zu erfinden.

3) Das 4te und 5te Kapitel wird nun schneller durchgenommen und der Zögling bloß auf die innere Nothwendigkeit dieser Stellung und Anordnung mit einigen überzeugenden Worten aufmerksam gemacht; er muß namentlich begreifen, daß sich die Mathematik von der Rechenkunst dadurch unterscheidet, daß jene die Regeln selbstthätig und naturgemäß aus den ersten Grundbegriffen der Zahlenlehre (also aus den 3 ersten Kapiteln dieses Lehrbuchs) erfinden muß, welche die letztere bloß mechanisch benützt, um ihre praktischen Zwecke zu erreichen. Praktische Uebung in dem Operiren mit Decimalbrüchen wird zum häuslichen Fleiße mit Nachdruck empfohlen und sind dazu in der Schrift selbst viele Beispiele aufgeführt worden.

4) Sorgfalt und Zeit wird nun auf das 7te Kapitel verwandt, weil der binomische Lehrsatz der wahre Magister Matheseos ist und das darauf gegründete Wurzeln schon augenblickliches Bedürfniß genannt werden kann. Alle diese Lehren werden aber vorzüglich auch in der Absicht mit vorgetragen, daß der Zögling sich immer mehr in dem praktischen Operiren übe, weshalb auch hier noch mancherlei Uebungs-Beispiele mitgetheilt worden sind.

5) Bei dem 8ten, 9ten und 10ten Kapitel wendet der Verf. die meiste Zeit auf das praktische Arbeiten mit Wurzeln, Consequenz in der Theorie sich immer vorbehaltend.

6) Die übrigen Kapitel geht er ihrer Ordnung nach durch, die höhern Gleichungen jedoch nur ganz oberflächlich behandelnd. Er hebt den Unterschied zwischen der identischen Gleichung und zwischen der Bestimmungs-Gleichung sorgfältig heraus, und übt das Ordnen der Gleichungen und das Eliminiren der Unbekannten als zwei für sich stehende Geschäfte vorzüglich ein, das eigentliche Auflösen der Gleichungen jedesmal davon trennend.

Im allgemeinen pflegt er übrigens:

1) Bei dem Zöglinge auf möglichste Absonderung, Klarheit und Bestimmtheit der Begriffe zu dringen, sich diese Begriffe oft genug und von verschiedenen Seiten ausgehend wiederholen zu lassen und ihm dabei nie, auch nicht die geringste Sprach-Unrichtigkeit zu erlauben;

2) dem Zuhörer bei jeder Untersuchung das zu erreichende Ziel vorher genau in's Auge zu rücken, ihn auf die verschiedenen Mittel aufmerksam zu machen, durch welche es erreicht werden könnte, und die Gründe anzugeben, warum der nun wirklich zu nehmende Weg den übrigen vorgezogen wird; alles dies damit letzterer lerne, einen bestimmten Zweck selbstthätig zu verfolgen und unter mehren Wegen den jedesmal besten herauszufinden;

3) praktische Uebungen in der Buchstaben- und Ziffern-Rechnung unermüdet treiben zu lassen, aber doch nur zu Hause, während in den Lehrstunden zuweilen nur sondirt wird, ob solche mit Bewußtseyn der abstra-

hirten Regeln und im Geiste der Theorie angestellt werden; *)

4) eine bald etwas weitläufigere bald mehr gedrängte Uebersicht des Ganzen in seinem Zusammenhange wenigstens alle 14 Tage einmal zu wiederholen, zuweilen dergestalt nur in den Hauptmomenten, daß höchstens 10 Minuten dazu verwandt werden.

Die Noten sind mit kleinerer Schrift gedruckt und gehören nicht zum Texte. Nur der Text geht möglichst consequent fort.

Damit das Buch zum Selbst-Unterricht brauchbarer werde, sind mehr raisonnirende Bemerkungen beigefügt worden und viele Uebungs-Beispiele zur Erläuterung und Einübung des vorgetragenen. Letztere sind theils von den Zuhörern des Verf., theils von ihm selbst, theils aus der trefflichen Sammlung des Dr. Meyer Hirsch entnommen.

So viel in Bezug auf den Zweck, die Einrichtung und den Gebrauch dieses ersten Theils zunächst an einer höhern technischen Anstalt. Der Gebrauch desselben an einem Gymnasio kann so ziemlich derselbe bleiben, nur daß dort die formelle Bildung noch mehr berücksichtigt, also namentlich noch mehr darauf gedrungen werden muß, daß der Schüler seine Operationen mit vollem Bewußtsein vornehme, und sich gewöhne und befähige, von jeder

---

*) Anfänglich muß der Lehrer dieses Nachforschen oft vornehmen, weil der Zögling nur zu leicht in das rein mechanische verfällt, wenn er nicht immer auf's neue zum, sich bewußten und geistigern Arbeiten angeregt wird.

Verwandlung auch noch die letzten Gründe streng systematisch und rein wissenschaftlich nachzuweisen. Man wird jedoch dabei von der untersten bis zu der obersten mathematischen Klasse nach dem Gesetze der Stetigkeit von dem mehr praktischen und mechanischen zu dem mehr theoretischen und geistigen übergehen. Aber weil der mathematische Unterricht an den Gymnasien dem Verf. vorzüglich am Herzen liegt, so mag es ihm noch erlaubt seyn, was über die äußere Einrichtung dieses Unterrichts von ihm gewünscht werden müßte, hier unmaßgeblich mitzutheilen. *)

1) Es scheint an einem Gymnasio zuvörderst der Unterricht im gemeinen Rechnen von dem mathematischen (also auch arithmetischen, algebraischen etc. etc.) genau und sorgfältig getrennt werden zu müssen. Rechenfertigkeit wird in der gelehrten Schule (die aus den 4 obersten Klassen Quarta bis Prima bestehen mag) vorausgesetzt, ist bloß praktisch gehörig eingeübt worden, ohne alle Einmengung von Mathematik (also auch ohne eine Proportionen-Lehre) aber überall den gesunden Menschenverstand und die Selbstthätigkeit des Schülers in An-

*) Der Verf. unterrichtet seit 20 Jahren, bald als Privatlehrer, bald an Universitäten, bald an Gymnasien, nun auch an einer höhern technischen Anstalt, und er glaubt sich Mühe gegeben zu haben, die verschiedenen Bedürfnisse kennen zu lernen und über die Art und Weise nachzudenken, wie ihnen wohl am zweckmäßigsten entsprochen werden könne. Seine Meinungen über den Unterricht sind daher nicht bloße theoretische Phantasien, sondern bereits viele Jahre hindurch von ihm und von einigen seiner frühern Zöglinge praktisch aus- und durchzuführen versucht worden, und man hat den Erfolg der Voraussetzung angemessen gefunden. Erfahrungs-Resultate scheinen aber nothwendig mitgetheilt werden zu müssen.

spruch nehmend, und nirgends in ein bloßes mechanisches und geistloses Abrichten ausartend. *)

2) Der eigentliche mathematische Unterricht (d. h. der arithmetische, algebraische, geometrische etc. etc.) scheint erst in Quarta mit 4 Stunden wöchentlich beginnen, dann aber durch alle folgenden Klassen hindurch wöchentlich 6 Stunden in jeder Klasse zugetheilt erhalten zu müssen, so zwar, daß wöchentlich die Hälfte der Stunden auf die geometrischen Theile, die andere Hälfte aber jedesmal gleichzeitig auf die calculativen (arithmetischen, algebraischen etc. etc.) Theile verwandt wird. **)

3) So nützlich es seyn mag, daß der Unterricht in einer Sprache von mehreren Lehrern nach verschiedenen Weisen gleichzeitig an der Anstalt getrieben werde, so schädlich erscheint dem Verf. eine solche Einrichtung in Bezug auf den mathematischen Unterricht. Der Schüler muß in der Mathematik den innern Faden, der das Ganze zusammenhält, gleich von vorne herein wahrnehmen, erfassen und sich selbst daran weiter forthelfen können, wenn er Lust und Liebe für diese Wissenschaft gewinnen will, aber er muß ihn auch nirgends wieder verlieren, wenn er nicht mit ihm zugleich diese gewonnene Lust und Liebe für den Unterricht mit verlieren soll. Es

---

*) Für diesen Rechen-Unterricht glaubt der Verf. sein „Kurzes, gründliches und leichtfaßliches Rechenbuch, Berlin 1818." empfehlen zu dürfen, in so ferne es nach dieser Ansicht ausgearbeitet worden ist.

**) Neben diesem mathematischen Unterricht wird Quarta und selbst Tertia auch noch Unterricht im gemeinen Rechnen erhalten müssen. Mangel an Rechnenfertigkeit wird im spätern Alter nicht leicht mehr gehoben, und wird im Leben oft ungemein lästig und drückend empfunden.

scheint daher für einen günstigern Erfolg des mathematischen Unterrichts an einer gelehrten Schule erforderlich zu seyn, daß der Unterricht in der ganzen Anstalt nach demselben Lehrbuche (oder vielmehr nach demselben, aber consequenten Systeme) getrieben werde, so viel wie möglich von unten herauf von einem und demselben Lehrer. *) Der Vortrag in Prima kann hie und da den, im Anfange berührten ideellen Universitäts-Vortrag, seinem Geiste nach durchblicken lassen.

4) So wie die Philosophie und Religions-Wissenschaft als außerhalb des Gymnasial-Vortrags liegend erkannt worden sind, so möchte es auch sehr zweckmäßig seyn, Differential- und Integral-Rechnung und jede sogenannte höhere Mathematik von dem Gymnasio zu entfernen. Der Schüler soll auf dem Gymnasio nur einen festen und sichern Grund legen zu seiner künftigen höhern Ausbildung, welche die Universität nach allen Richtungen hin erst zu vervollkommnen hat. — Der Verf. würde daher im calculativen Vortrag kaum über das, was der gegenwärtige Band umfaßt, hinausgehen, (die letztern Lehren in Prima nur gründlicher behandeln), dagegen im geometrischen Vortrage die beschreibende Geometrie und

*) Und dazu müßte der beste Lehrer der Anstalt gewählt werden. Ein Lehrer, welcher nicht zu unterrichten versteht, sonst aber geistig ausgebildet ist, schadet in der obersten mathematischen Klasse viel weniger, als in der untersten. Umgekehrt dagegen, hat der mathematische Unterricht in den untersten Klassen nicht den gehörigen Zusammenhang, wird der Schüler hier nicht an Consequenz und an Selbsterfinden der Wahrheiten gewöhnt, so würde in der obersten Klasse, unter den besten Lehrern der allerbeste, im Ganzen nur höchst wenig leisten können.

Perspektive nur in wenigen Andeutungen berühren, und dafür lieber eine Reihe von mehr elementar-geometrischen Sätzen als Anwendung der Elemente der Geometrie und mit Zuziehung der hevristischen Methode behandeln lassen.

5) Der Schüler des Gymnasiums soll für das Leben und für die Geschäfte mit vorbereitet, aber in ihm der praktische Beamte oder der ausübende Geschäftsmann nicht ausgebildet werden. Daher hält es der Verf. für sehr nachtheilig, wenn an einem Gymnasio viele Wochen, ja Monate lang, etwa numerisches Wurzelausziehen, oder abgekürzte Multiplikation und Division mit Decimalbrüchen gelehrt wird, überhaupt wenn Wochenlang etwas getrieben wird, was nur in einzelnen Geschäftszweigen des Lebens nützlich werden kann. Der Verf. würde dieselbe Zeit mehr darauf verwenden die allgemeinen Ansichten der Schüler zu berichtigen und immer mehr zu verallgemeinern, ihr Denkvermögen zu üben, ihre Urtheilskraft zu schärfen, überhaupt mehr allgemeine formelle Bildung zu fördern, und dabei Buchstabenrechnung recht tüchtig praktisch einüben zu lassen, als dasjenige allgemeine Hilfsmittel, welches dem Schüler bei dem weitern Fortschreiten in der Wissenschaft als solcher, die wichtigsten Dienste leistet und beinahe unentbehrlich wird. Letztere praktische Uebung müßte jedoch vorzüglich zu Hause statt finden.

6) Dadurch daß unnützes, dem Zwecke des Gymnasiums nicht entsprechendes, weggelassen, besonders aber auch dadurch, daß die Methode angewandt wurde, welche in gegenwärtigem Werke befolgt sich findet, ist es dem Verf. bei seinem früheren Gymnasial-Unterrichte gelun-

gen, den so wichtigen Punkt der halbjährigen Versetzungen unschädlich zu machen. Der Verf. konnte nehmlich das, was an 4 Klassen vorgetragen werden sollte, in 4 Abtheilungen theilen, und alle halbe Jahre (sowohl im calculativen als im geometrischen Vortrage) die auf jede Klasse kommende Abtheilung ganz und völlig beenden, und noch anfangs das in den vorhergehenden Klassen gelehrte in einer kurzen und gedrängten Uebersicht wiederholen lassen. Saß also ein Schüler in einer Klasse $1\frac{1}{2}$ Jahr lang, so hörte er 3 mal dasselbe, sowohl in den geometrischen Lehren als in den analytischen (d. h. calculativen) und da der Lehrer wenig docirte, sondern beständig die lebendigste Selbstthätigkeit der Schüler in Anspruch nahm, wodurch dieselbe Sache in jedem Semestre doch immer wieder unter einem neuen Gesichtspunkte erschien, trieben die Schüler diese Untersuchungen fortwährend mit gleicher Liebe und der ältere Schüler riß den neu hinzugekommenen unvermerkt mit sich fort. Dieser Einrichtung vorzüglich glaubt der Verf. den ungewöhnlichen Erfolg dieses Unterrichts zuschreiben zu dürfen. In der Geometrie wird diese Einrichtung, wenn man nur den Zweck des Gymnasial-Unterrichts im Auge behält, selten Schwierigkeiten finden, dagegen desto mehr in dem calculativen Theile der Mathematik, sobald man nicht eine Ansicht verfolgt, welche erlaubt, den gesammten niedern und höhern Calcul in einigen wenigen allgemeinen und doch dem ersten Anfänger leicht verständlichen Sätzen dergestalt zu begründen, daß auch in diesem sogenannten analytischen Theile der Mathematik durchweg diejenige

Consequenz möglich werde, vermöge welcher der Schüler seiner Sätze Selbsterfinder werden kann.

Dies sind übrigens nur Ansichten und Meinungen des Verf. Er stellt sie keineswegs als positive und unverwerfliche Glaubens-Artikel hin, sondern er wünscht bloß, daß sie, größtentheils als Erfahrungs-Resultate, die Berücksichtigung der wenigen sich erwerben mögen, welche verschiedene Ansichten gerne kennen lernen, und welche gleich ihm, nicht die Mühe scheuen, eine jede näher und sorgfältiger zu prüfen und das beste daraus zu behalten.

Schlüßlich glaubt der Verfasser, daß diejenigen Anfänger, welche diesen vorliegenden Theil gehörig durchstudirt haben, dadurch auch befähigt seyn werden, das oben schon erwähnte Werk: „Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik," dessen ersten beiden Theile unter dem besonderen Titel „Lehrbuch der Arithmetik, Algebra und Analysis" Berlin 1822 erschienen sind, mit größerer Leichtigkeit und mit dem gehörigen Nutzen zu lesen.

Berlin im Juni 1825.

Dr. M. Ohm.

Einleitung.

§. 1. Erklärungen.

Die Mathematik ist diejenige Wissenschaft, welche die Vergleichung der Größen zum Gegenstand hat.

Eine Größe (Quantum) nennen wir alles, was sich vermehrt oder vermindert denken läßt. — Ist aber eine Größe als ein Vielfaches irgend einer Andern ausgedrückt, so nennen wir diese Angabe, die Größe (Quantitas) der Größe (Quanti).

So sind Linien, Flächen, körperliche Räume, Zeiten, Kräfte (Gewichte), eine Summe Geldes und dergl., Größen (Quanta). — Wird aber eine Linie durch 7 Fuß, eine Fläche durch $13^1/_2$ Morgen, ein Körper durch 5 Kubikzoll, eine Zeit durch 2 Stunden, eine Kraft durch 6 Pfund, die Summe Geldes durch $^2/_3$ Rthlr. u. s. f. ausgedrückt, so ist von allen diesen Größen die Quantität bestimmt.

Anmerkung. Linien, Flächen und Körper nennt man auch Raumgrößen.

§. 2. Erklärung.

Die Vergleichung zweier Größen geschieht entweder unmittelbar (wie bei Linien, Flächen und Körpern, indem man sich solche auf oder in einander gelegt denkt) oder mittelbar durch eine oder durch zwei Zahlen; durch eine Zahl nehmlich (z. B. durch sieben) wenn die eine Größe A

mehrmal (siebenmal) genommen, die Andere B genau giebt; durch zwei Zahlen dagegen (z. B. vier und sieben), wenn nicht A selbst, sondern erst der vierte Theil von A, siebenmal genommen, die andere Größe B erzeugt. — Die erstere Art der Vergleichung der Größen (die unmittelbare) könnte man vielleicht schicklich ein Anpassen nennen, und es findet solche zunächst nur bei Raumgrößen Statt, und bei andern Größen nur, in so ferne sie selbst durch Raumgrößen vorgestellt oder nach, ihnen entsprechenden Raumgrößen beurtheilt werden. — Die andere Art der Vergleichung der Größen (die mittelbare) nennt man messen, und man sagt: B ist durch A gemessen, wenn entweder die eine Zahl (sieben z. B.) gefunden ist, welche anzeigt, wie oft A genommen werden muß, um B zu geben, oder wenn die beiden Zahlen (vier und sieben) gefunden sind, von denen die eine erst anzeigt (z. B. vier), welcher Theil von A genommen werden muß, die andere dagegen (sieben), wie vielmal dieser (vierte) Theil von A wiederholt genommen, die andere Größe B hervorbringt.

§. 3. Zusatz.

In jedem solchen Falle, wo B durch A gemessen ist, kann man auch sagen, daß A durch B gemessen sey. Weiß man nehmlich, daß A siebenmal genommen genau B giebt, so kann man auch sagen, daß der siebente Theil von B einmal genommen die Größe A wieder erzeuge. Und weiß man, daß der vierte Theil von A siebenmal genommen, B giebt, so kann man auch sagen, daß der siebente Theil von B, viermal genommen die Größe A wieder hervorbringe.

Diejenige der beiden Größen A und B, welche man als die gegebene ansieht, mit welcher die andere mittelbar verglichen, d. h. durch welche die andere gemessen werden soll, heißt das Gemäß oder die Einheit; die eine Zahl oder die beiden Zahlen dagegen, welche allemal als Resultat des Messens sich ergeben müssen, bilden das Maaß der zweiten

Größe, in Beziehung auf diese Einheit (dieses Gemäß). — Gewöhnlich schreibt man die beiden Zahlen m und n, welche das Maaß bilden, unter einander $\frac{m}{n}$ oder $\frac{n}{m}$, so nämlich, daß jedesmal die untere Zahl anzeigt, in wieviel Theile die Einheit (das Gemäß) getheilt werden soll, die obere dagegen, wieviel solcher Theile zu nehmen sind.

Ist z. B die eine Größe A ein Preußischer (Rheinländischer) Fuß, die Größe B dagegen ebenfalls eine Länge [welche zugleicher Zeit der Pariser Fuß (pied du Roi) seyn kann], so ist die Linie B durch den Preußischen Fuß gemessen, so bald die beiden Zahlen $\left.\begin{matrix}14400\\13913\end{matrix}\right\}$ gegeben sind, von denen die untere anzeigt, in wie viele Theile der Preußische Fuß getheilt werden muß, die obere dagegen, wie viele solcher Theile genommen werden müssen, um die Linie B zu geben. Aber eben so gut kann man, wenn B (der Pariser Fuß) als gegeben angesehen wird, sagen: die Linie A sey durch B gemessen, so bald diesel-ben beiden Zahlen $\left.\begin{matrix}13913\\14400\end{matrix}\right\}$ bekannt sind, (die jetzt absichtlich in umgekehrter Ordnung unter einander gesetzt worden), von denen die untere anzeigt, in wie viele Theile der Pariser Fuß B getheilt werden muß, die obere dagegen, wie viel solcher Theile zu nehmen sind, um die Linie A zu haben. In dem letztern Falle ist der Pariser Fuß (B) die Einheit oder das Gemäß. — Die beiden Zahlen 13913 und 14400 bilden aber in jedem Falle das Maaß, und werden gewöhnlich so unter einander geschrieben $\frac{14400}{13913}$, wenn der preußische Fuß als die Einheit angesehen wird, oder so $\frac{13913}{14400}$, im Fall der Pariser Fuß die gegebene Einheit seyn soll.

§. 4. Zusatz.

Auch wenn A, m mal genommen genau B giebt, kann man sagen, daß zwei Zahlen nehmlich m und 1 das Maaß von A bestimmen, in Bezug auf die Einheit B, oder das Maaß von B in Bezug auf die Einheit A.

Man kann dies so schreiben

$$A = \frac{1}{m} B \qquad \text{und} \qquad B = \frac{m}{1} A. —$$

Das erste drückt aus, daß A entsteht, wenn man den mten Theil von B 1 mal nimmt; das zweite drückt aus, daß B entsteht, wenn man A selbst m mal nimmt.

Eben so würde

$A = \frac{p}{q} B$ und $B = \frac{q}{p} A$

ein und dasselbe ausdrücken, wenn das erstere bedeutet, daß der q^{te} Theil von B, p mal genommen werden muß, um A zu geben; das andre dagegen, daß der p^{te} Theil von A, q mal genommen die Größe B erzeuge. — Jedes würde nichts weiter zuletzt anzeigen, als daß der q^{te} Theil von B und der p^{te} Theil von A ein und dasselbe sey.

§. 5. Erklärung.

Wenn dagegen keine der beiden Größen A und B vorzugsweise als gegeben angesehen wird, so daß man noch eben so gut B durch A, als auch A durch B auszudrücken wünscht, ohne jedoch dem einen oder dem andern einen bestimmten Vorzug zu geben, so schreibt man die beiden Zahlen p und q, durch welche A eben so gut in B, als auch B in A ausgedrückt werden kann, je nachdem man den q^{ten} Theil von B, p mal, oder den p^{ten} Theil von A, q mal nimmt, lieber so:

A B

p : q

oder auch wohl so:

A : B = p : q,

wo das eine oder das andere nur andeuten soll, daß sich die Zahl p auf A, die Zahl q dagegen auf B bezieht; und dann bilden die beiden Zahlen p und q das Verhältniß von A zu B; und zwar sagt man dann: A verhält sich zu B wie die Zahl p, zu der Zahl q. — Maaß oder Verhältniß ist daher wesentlich ein und dasselbe, nur daß man sich der erstern Benennung und der entsprechenden Bezeichnung $\frac{p}{q}$ oder $\frac{q}{p}$ dann bedient, wann die eine der Größen ausdrücklich als die gegebene angesehen wird, durch welche die andere ausgedrückt oder gemessen werden soll; während man sich der letztern Benennung und der entsprechenden Be-

zeichnung p : q oder q : p lieber bedient, wenn bei derselben Vergleichung der beiden Größen A und B, keine derselben vorzugsweise als gegeben angesehen wird, sondern wenn noch unbestimmt bleiben soll, ob man B durch A oder A durch B ausdrücken wolle.

So sagt man in dem Beispiel zu (§. 3.): „der Preußische Fuß A verhalte „sich zu dem Pariser Fuß B, wie die Zahl 13913 zu der Zahl 14400;" oder das Verhältniß des Preußischen Fußes zu dem Pariser wäre wie

13913 : 14400.

Zu gleicher Zeit mag man bemerken, daß weil der 13913te Theil des Preußischen Fußes A, 14400 mal genommen den Pariser Fuß B giebt, dieser 13913te Theil des Preußischen Fußes A zugleich auch der 14400te Theil des Pariser Fußes B seyn wird. — Die beiden Zahlen des Verhältnisses der beiden Größen A und B, geben also zu gleicher Zeit an, wie vielmal eine gemeinschaftliche Einheit in jeder der beiden Größen A und B enthalten ist. So ist ein und dasselbe Theilchen 13913 mal in dem Preußischen und 14400 mal in dem Pariser Fuß enthalten.

§. 6. Erklärung.

In so ferne zwei Größen A und B durch eine gemeinschaftliche Einheit gemessen oder ausgedrückt sind, oder doch so ausgedrückt werden können, nennt man diese Größen gleichartig.

Gleichartig sind: zwei Linien, zwei Flächen, zwei Gewichte, zwei Zeit-Abtheilungen u. dergl. m., ungleichartig dagegen: eine Linie und eine Fläche, eine Linie und ein Gewicht u. dergl. m.

§. 7. Zusatz.

Zwei Größen, welche durch einander gemessen werden können, oder die zu einander ein bestimmtes Verhältniß haben, müssen daher immer gleichartig seyn, in so ferne das Verhältniß

$$\left\{\begin{matrix} A : B \\ m : n \end{matrix}\right\} \text{ oder } A : B = m : n$$

nichts weiter ausdrückt, als daß der m^{te} Theil von A zu gleicher Zeit der n^{te} Theil von B ist, daß also derselbe Theil m mal in A und zu gleicher Zeit n mal in B enthalten seyn werde.

§. 8. Erklärung.

In so ferne die erste Art der Vergleichung zweier Größen, die wir die unmittelbare (das Anpassen) nannten, nur zunächst bei Raumgrößen anwendbar ist, werden wir nur dort (in der Lehre der Raumgrößen) auf sie zurückkommen können. Die andere Art der Vergleichung dagegen, welche wir die mittelbare, oder das Messen, oder die Bestimmung des Verhältnisses nennen, ist auf je zwei gleichartige Größen anwendbar und wird daher den vorzüglichsten und wichtigsten Theil der Mathematik ausmachen.

Weil aber diese letztere Art, zwei Größen mit einander zu vergleichen, allemal zu der Zahl führt, so scheint eine Kenntniß der Zahl bei dieser Vergleichung unentbehrlich und die Zahl selbst das erste zu seyn, worauf wir unser Augenmerk richten müssen. — Wir werden daher die Zahlen zuerst betrachten, und uns dabei eine bessere Uebersicht verschaffen, wenn wir die Zahl selbst nicht mit zu den Größen rechnen, sondern sie mehr als das Mittel ansehen, durch welches, ohne selbst schon Größe zu seyn, die Größen mit einander verglichen werden können.

Die so aufgefaßte Zahl, welche sich noch gar nicht auf eine bestimmte Einheit bezieht, sondern welche bloß eine Wiederholung anzeigt, aber die Sache, die wiederholt genommen werden soll, noch völlig unbestimmt läßt, nennt man die abstrakte (auch unbenannte) Zahl; ihre völlig unbestimmt gelassene Einheit die abstrakte (auch unbenannte) Einheit, die wir gewöhnlich durch 1 vorstellen. —

Die nächsten Zahlen bezeichnen wir in ihrer Reihenfolge durch

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, und sprechen sie aus zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, und nennen diese Zeichen Ziffern.

Anmerkung. So wie sich aber eine solche unbenannte oder abstrakte Zahl auf irgend ein bestimmt gegebenes Ding als Einheit (Gemäß) bezieht,

so hat man die Größe (Quantitas), welche man in dieser Gestalt auch eine benannte Zahl nennt.

§. 9. Erklärung.

Man scheint daher die gesammte Mathematik am besten einzutheilen:

I) in den Theil, der sich mit den abstrakten oder unbenannten Zahlen einzig und allein beschäftigt und der gewöhnlich Arithmetik im weitern Sinne des Wortes genannt, und dann wohl in die 1) besondere Arithmetik (darunter auch den Theil der gemeinen Rechenkunst mit verstanden, der sich mit den unbenannten Zahlen beschäftigt; und auch die sogenannte Buchstabenrechnung), 2) Algebra, 3) Analysis des Endlichen, 4) Differential- und Integralrechnung u. s. w. eingetheilt wird; *)

II) in denjenigen Theil, welcher entweder die Größen unmittelbar mit einander vergleicht, oder welcher sich der erworbenen Kenntniß der Zahlen bedient, um Größen mittelbar mit einander zu vergleichen. Dieser Theil kann insbesondere Größenlehre genannt werden, und er zerfällt wieder: 1) in die allgemeine Größenlehre, welche lehrt, was für alle Größen gemeinschaftlich gilt, und 2) in die besondere Größenlehre, welche sich mit einzelnen besondern Gattungen der Größen beschäftigt. — Zu der letztern gehört namentlich:

a) die Geometrie oder Raumgrößenlehre, und

b) die reine Statik und Mechanik oder die reine Kraftgrößenlehre.

Anmerkung 1. Gewöhnlich werden die einzelnen Lehren nicht so genau von einander abgesondert, und auch wir werden in diesem Lehrbuche eine ganz strenge Absonderung derselben nicht berücksichtigen, unsern gegenwärtigen Zweck im Auge habend. — Die hier gegebene Zergliederung mag

---

*) Alles dieses zusammen nennt man wohl auch zuweilen den Kalkul, zuweilen auch überhaupt den analytischen Theil der Mathematik.

aber aufmerksam machen, wie sich in jeder mathematischen Disciplin allemal zwei Theile werden absondern lassen, der eine, welcher es mit reinen Zahlenbegriffen zu thun hat, der andere als eine Anwendung dieser reinen Begriffe auf eine bestimmte Größe, oder auf bestimmte Größen. So sind z. B. die Trigonometrie, die analytische Geometrie u. s. w. Anwendungen des reinen Theils (I) auf geometrische Gegenstände.

Anmerkung 2. Was hier in der Einleitung vorläufig von den Größen gesagt ist, muß in der Größenlehre noch bestimmter ausgesprochen werden, in so ferne letztere zum System gehört, während die Einleitung bloß auf den Weg führen soll.

Schlußfragen.

1) Was ist eine Größe (Quantum)?

2) Wodurch unterscheidet sich die Größe im engern Sinne (die Quantität), von der Größe im weitern Sinne (dem Quanto)?

3) Welches ist der Unterschied zwischen einer Größe im engern Sinne (einer Quantität) und einer benannten Zahl?

4) Welches ist der Unterschied zwischen einer abstrakten, einer absoluten und einer unbenannten Zahl?

5) Wodurch unterscheidet sich das Maaß einer Größe A in Bezug auf eine Einheit B, von dem Verhältniß von A zu B?

6) Wodurch unterscheiden sich die gleichartigen Größen von den ungleichartigen?

7) Wodurch unterscheiden sich die stetigen Größen, von den diskreten? Stetig nennt man diejenigen Größen (Quanta), in welchen nirgends natürliche Grenzen getroffen werden, welche aber allenthalben beliebig begrenzbar gedacht werden können, wie z. B. die Linien, Flächen, Zeiten, u. s. w. f. Discret nennt man diejenigen Größen, denen die Eigenschaft der Stetigkeit nicht zukommt, z. B. eine Summe Geldes, eine Volksmenge, u. s. w. f.

8) Worin besteht der Unterschied zwischen commensurablen Größen und incommensurablen? oder zwischen einem rationalen und irrationalen Verhältniß? (S. Größenlehre im II. Th.).

9) Was ist Mathematik und aus welchen Haupttheilen besteht sie? —

10) Ist die Zahl allemal eine ganze Zahl?

11) Ist auch die 1 eine Zahl?

12) Wird in der Zahlenlehre auch von Größen gesprochen werden können?

13) Ist die Zahl ebenfalls eine Größe?

Arithmetik.

Erstes Kapitel.

Einfachste Zahlenbegriffe. Addition und Subtraktion. Additive und subtraktive Ausdrücke. Algebraische Summen.

§. 1. Erklärung.

Zwei Zahlen werden addirt, wenn man sich eine Zahl denkt, die so viel Einheiten hat, als diese beiden zusammen genommen haben.

Bezeichnet man die eine dieser beiden Zahlen durch a, die andere durch b, so soll die durch Addition dieser beiden hervorgegangene dritte Zahl durch $a+b$ bezeichnet und eine Summe genannt werden, während a und b die beiden Summanden der Summe heißen mögen.

Man spricht die Summe $a+b$ aus „a plus b" und nennt das Zeichen (+) das Additionszeichen.

Anmerkung. Von diesem Addiren der Zahlen müssen wir jedoch unterscheiden das Addiren der Zahlzeichen (welches letztere gerade immer vorkommt, weil wir alle Zahlen durch Zeichen vorstellen). Zwei Zahlzeichen a und b werden aber addirt, wenn man die Summe $a+b$ hinschreibt; und in diesem Sinne werden wir in der Folge das Addiren allemal zunächst nehmen.

§. 2. Zusatz.

Man kann auch mehrere Zahlen z. B. a, b, c, d, zu einander addiren, jedoch immer nur dadurch, daß man erst zweie davon addirt, dann zu der Zahl, welche entsteht, noch die dritte, und zu dem neuen Resultat noch die vierte, u. s. w. oder zuerst zweie davon, dann die beiden andern und zuletzt diese Summen selbst wieder addirt; mit einem Worte immer nur dadurch, daß die Addition nur nach und nach geschieht, so daß man jedesmal nur zwei Zahlen zu addiren hat.

Wie viele Zahlen aber addirt werden sollen, so ist es doch immer einerlei, in welcher Ordnung man addirt, wenn nur immer zuletzt alle Einheiten der gegebenen Zahlen, in eine einzige Zahl vereinigt worden sind.

Die durch Addition der 4 Zahlen a, b, c, d entstehende Zahl, bezeichnen wir durch

$$a+b+c+d$$

und nennen solche eine Summe von (mehr) vier Summanden. — Aehnliches für jede Menge von Zahlen.

Anmerkung. Da wir die Absicht haben, aus der Zahl, so wie sie uns erscheint, abzuleiten, was für die Zahlen gilt, so dürfen wir nichts als bekannt voraussetzen, auch nicht die gemeine Rechenkunst, welche gerade hier, so weit sie unbenannte Zahlen betrifft, erst geschaffen werden soll, in so ferne sie oder ihre einzelnen Lehren ihre bestimmte Stelle in dem ganzen Zahlengebäude haben, und daher an dieser Stelle von selbst sichtbar werden müssen. Setzen wir aber nichts aus der gemeinen Rechenkunst voraus, so setzen wir auch nicht die Kenntniß der Ziffern voraus, auch nicht die Kenntniß der Null; und jeder dieser Begriffe muß daher noch zu seiner Zeit entwickelt und festgestellt werden. — Hierauf glauben wir aber vorzüglich aufmerksam machen zu müssen; auch darauf, daß hier zunächst immer nur von ganzen Zahlen die Rede ist.

§. 3. Erklärung.

Eine Zahl b wird von einer andern Zahl a subtrahirt, sobald man sich eine Zahl denkt, welche, wenn man sie zu b addirt, die Zahl a wieder hervorbringt. Diese durch Subtraktion entstehende Zahl bezeichnen wir durch a — b, spre-

chen solche aus „a minus b" und nennen sie eine Differenz oder Rest, von welcher Differenz a der Minuend, b dagegen der Subtrahend genannt wird. — Das Zeichen (—) heißt das Subtraktions-Zeichen.

Die Differenz a—b ist also diejenige Zahl, welche zu dem Subtrahenden b addirt, den Minuenden a hervorbringt.

Anmerkung 1. Damit eine Differenz a—b wirklich eine Bedeutung habe (möglich sey), muß der Minuend a größer als der Subtrahend b gedacht werden. Für's erste nehmen wir dies als Voraussetzung für alle die Differenzen an, mit denen wir es in den folgenden (§. §.) zu thun haben werden.

Anmerkung 2. Ein Zahlzeichen b ist von einem Zahlzeichen a subtrahirt, sobald man die Differenz a—b hingeschrieben hat. In diesem Sinne werden wir in der Folge das Subtrahiren immer zunächst nehmen, weil wir in der That nie die Zahlen selbst, sondern immer nur die Zahlzeichen haben werden.

Note. Ist die Zahl 5 eine Summe oder eine Differenz? — In so ferne man sich 3+2 dafür gesetzt denkt, ist sie eine Summe; in so ferne sie aber auch als 9—4 gedacht werden kann, ist sie eine Differenz. Es scheint daher besser zu seyn, um jede Verwirrung der Begriffe zu vermeiden, wenn wir nicht die Zahl 5 eine Summe nennen (weil sie eben so gut auch eine Differenz seyn kann) sondern das Zeichen 3+2 allein unter Summe verstehen, eben weil diese Form 3+2 die Art der Zusammensetzung der Zahl 5 (durch Addition) anzeigt; eben so nennen wir besser, nicht 5 eine Differenz, sondern verstehen unter Differenz nur die Form des Zeichens 9—4, welche die Art der Zusammensetzung der Zahl 5 andeutet.

Ferner müssen wir, genau genommen, zunächst dreierlei Arten von Addition und Subtraktion unterscheiden, nehmlich: 1) die Addition und Subtraktion der Zahlen. Da die Zahlen selbst (so lange sie nicht, weder durch Buchstaben noch durch Ziffern bezeichnet werden) nur gedacht werden können, so besteht das Addiren und das Subtrahiren derselben auch bloß darin, daß man sich Zahlen denkt, welche die als Summe oder Differenz verlangte Menge von Einheiten enthalten. Nun bezeichnen wir aber die Zahlen z. B. durch Buchstaben, und so sind dann z. B. a und b nicht mehr die Zahlen selbst, sondern nur die Zeichen, durch welche die Zahlen vorgestellt werden, und da müssen wir dann auch 2) das Addiren und Subtrahiren dieser Zahlzeichen unterscheiden, welches bloß darin besteht, „daß man die Summe „a+b oder die Differenz a—b hinschreibt." — Endlich wird in der Folge noch die Addition und die Subtraktion aus der gemeinen Rechenkunst in Betrachtung gezogen werden. Wir werden nehmlich späterhin sehen, daß z. B. 24 auch ein Zahlzeichen ist, welches sich jedoch von a z. B., wesentlich dadurch unterscheidet, daß

a jede beliebige, 24 dagegen eine völlig bestimmte Zahl vorstellt. Eben so wird 19 wie b ein Zahlzeichen seyn, dagegen 19 eine bestimmte Zahl vorstellen, während b jede beliebige Zahl noch andeutet. Diese Zeichen 24 und 19 in dem obigen Sinne addirt oder subtrahirt, geben 24+19 und 24−19; und diese verwandeln sich in 43 und in 5 sobald man wiederum dieselben Zahlen durch andere und gerade solche Zeichen (43, 5) vorgestellt haben will, d. h. durch Zeichen die nach demselben bestimmten Gesetze gebildet sind, nach welchem die gegebenen 24 und 19 ebenfalls gebildet waren.

Will man daher eine Verwirrung der Begriffe möglichst vermeiden, so scheint es gut zu seyn, besonders wohl zu bemerken: 1) daß, indem wir mit Zahlen arbeiten, wir jedesmal Zahlzeichen an ihre Stelle setzen; 2) daß deshalb das Addiren und Subtrahiren immer nur mit den Zahlzeichen verrichtet wird, und 3) allemal damit beendigt ist, daß man die beiden zu addirenden oder zu subtrahirenden Zahlzeichen durch das (+) oder (—) Zeichen mit einander verbindet d. h. dadurch, daß man die Summe a+b oder 24+19, eben so die Differenz a—b oder 24−19 hinschreibt, wenn auch 4) dann gewöhnlich noch gewünscht wird, diese so geschriebene Summe oder Differenz wiederum in andere gleichbedeutende (und mit den Summanden oder dem Minuenden und Subtrahenden gleichartige) Zeichen zu verwandeln.

§. 4. Erklärung.

Jedes Zeichen z. B. a oder b oder a+b oder a—b oder (a—b)+c, u. s. w. f., durch welches eine Zahl ausgedrückt wird (oder welches doch die Form eines solchen hat), heißt ein Zahlen-Ausdruck, oder schlechthin ein Ausdruck. — Zwei Ausdrücke heißen gleiche, wenn sie beide dasselbe ausdrücken oder vorstellen. Die Gleichheit der Ausdrücke bezeichnen wir durch das dazwischen gesetzte = (Gleichheitszeichen). — Was dadurch entsteht heißt eine Gleichung; und wenn die Gleichung als Form (oder Norm) für andere dient, auch eine Formel.

Schreibt man aber

$$a > b \quad \text{oder} \quad b < a,$$

so heißt jede dieser Formen eine Ungleichung, welche man ausspricht „a ist größer als b", oder „b ist kleiner als a", und sind a und b (ganze) Zahlen, so versteht man darunter nichts weiter, als daß a—b selbst eine (ganze) Zahl ist (oder vielmehr vorstellt), oder daß es noch eine (ganze) Zahl giebt, die zu b addirt, die Zahl a noch hervorbringt.

Anmerkung. Jeder Ausdruck muß als ein solcher erkennbar seyn, auch dann noch, wenn er mit einem zweiten in Verbindung tritt, damit man in jedem Augenblicke erkennen könne, wie der ganze zusammengesetztere Ausdruck entstanden ist, weil einzig davon wiederum die Bedeutung des letztern abhängt. Man pflegt daher jeden solchen Ausdruck in Klammern einzuschließen, wenn er nicht an sich schon in seinem ganzen Umfange völlig bestimmt und so hervortritt, daß keine Zweideutigkeit befürchtet werden kann.

Note. Die Gleichung $5+3=10-2$ drückt also nichts anders aus, als daß die Zahl, die durch $5+3$ bezeichnet wird, auch durch $10-2$ bezeichnet werden kann; so wie die Gleichung $5+3=8$ nichts weiter lehrt, als daß dieselbe Zahl auch durch das Zeichen (Ziffer) 8 vorgestellt ist. — In so ferne man sich in der Gleichung $(a-b)+c=(a+c)-b$, unter a, b, c bald diese, bald andere Zahlen denkt, ist sie bald diese Gleichung $(7-3)+5=(7+5)-3$, bald eine andere; und in dieser Beziehung wird sie dann eine Formel genannt.

§. 5. Zusatz.

Es ist allemal, wie unmittelbar aus (§. 3.) hervorgeht:

I. $(a-b)+b=a$

und

II. $(a+b)-b=a$.

Wir ersehen daraus, daß wenn man zuerst b subtrahirt von a und dazu b wieder addirt, die Zahl a unverändert bleibt; so wie auch, wenn man zuerst b addirt und dann davon wieder b subtrahirt.

Note. Es sind aber diese Formeln (I. und II.) nicht als aus früher, etwa in der gemeinen Rechenkunst erhaltenen Begriffen der Addition und der Subtraktion bekannt anzusehen; sondern unter der Voraussetzung, daß $a-b$ die Bedeutung des (§. 3.) und die Summe $(a-b)+b$ die Bedeutung des (§. 1.) hat, folgt aus diesen angeführten (§. §.) erst, daß dann auch $(a-b)+b$ und a eine und dieselbe Zahl vorstellen werden. Aehnliches gilt von der Formel (II.) — Von nun an dagegen sind die in diesen Formeln enthaltenen Sätze, so wie sie im (§.) selbst in Worte gekleidet sind, als bekannte Sätze überall zuzulassen.

§. 6. Zusatz.

Ist $a=b$

so ist auch

1) $a+m=b+m$

2) $a-m=b-m$

3) $m-a=m-b$

d. h. Gleiches zu Gleichen addirt, oder von Gleichem subtrahirt, giebt Gleiches.

Und ist a=b und b=c, so ist auch a=c; d. h. sind zwei Ausdrücke a und c einem dritten b gleich, so sind sie auch unter einander gleich.

§. 7. Lehrsatz.

Es ist allemal

$$1)\quad (a+b)-c=(a-c)+b;$$

d. h. es ist allemal einerlei, ob man b zuerst zu a addirt, und dann von der Summe noch c subtrahirt, oder ob man die Subtraktion der Zahl c von a zuerst verrichtet und dann dazu noch die Zahl b addirt.

Beweis. Man addire c zu dem Ausdruck rechts nehmlich zu $(a-c)+b$, so erhält man nach (§. 1.) und (§. 2.):

$$[(a-c)+b]+c=(a-c)+c+b=a+b.\ (\text{§. 5. I.}).$$

Subtrahirt man nun hievon wiederum c auf beiden Seiten, so ergiebt sich der Lehrsatz aus (§. 5. II. und §. 6.).

Anmerkung. Weil die beiden Ausdrücke $(a+b)-c$ und $(a-c)+b$ einander gleich sind, so kann der eine für den andern gesetzt werden, und man kann also den Lehrsatz dazu anwenden, den einen der beiden Ausdrücke, wenn er gegeben ist, in den andern zu verwandeln. Da nun jeder von beiden der gegebene seyn kann, so läßt sich derselbe Lehrsatz doppelt anwenden, und aus diesem Gesichtspunkte betrachtet, führt er zu den beiden praktischen Regeln:

1) „Ein Ausdruck c wird von einer Summe $a+b$ subtrahirt, wenn „man den Ausdruck c von dem einen Summanden a allein subtrahirt, und „den andern Summanden b unverändert läßt.

2) „Ein Ausdruck b wird zu einer Differenz $a-c$ addirt, wenn man b „zu dem Minuenden a allein addirt, den Subtrahenden c aber als sol„chen unverändert läßt." *)

---

*) Da die Anwendung der einzelnen Formeln, wie sie hier nach und nach entwickelt werden, das wichtigste ist und beinahe das einzige, was hier erlernt werden muß, so wollen wir dies sogleich noch näher beleuchten. — Soll nehmlich b zu der Differenz $a-c$ addirt werden, so erhält man eigentlich allemal, dem (§. 1.) und der (Note zu §. 3.) zu Folge, $(a-c)+b$. Man will nun aber für diesen Ausdruck $(a-c)+b$ einen an-

Beispiele. Man soll die Ausdrücke

1) $[(a-b)-c]+b$; 2) $[(a+b)+(b-c]-b$;

3) $[(p-q)-(r-s)]+q$; 4) $[(p+(q-d))+(m-a)]-(q-d)$;

5) $[(a-b)-c]+(b+c)$ u. dergl. m.

in andere gleiche Ausdrücke verwandeln.

Aus unserm Lehrsatze, nach der praktischen Regel (n. 2.) ergiebt sich für den ersten Ausdruck (1.), zunächst der gleiche $[(a-b)+b]-c$, dann $a-c$, so daß man findet $[(a-b)-c]+b=a-c$. — Für das Beispiel (3.) findet man nach derselben Regel den gleichen Ausdruck $[(p-q)+q]-(r-s)$ d. h. den gleichen $p-(r-s)$. — Für das Beispiel (5.) endlich den gleichen Ausdruck $[(a-b)+(b+c)]-c$, dann den gleichen $[(a-b)+b+c]-c$, dann den gleichen $(a+c)-c$, und dann den gleichen a, so daß man für (5.) findet

$$[(a-b)-c]+(b+c)=a.$$

Auf die Beispiele (2. u. 4.) dagegen ist die praktische Regel (n. 1.) anwendbar, und man erhält

$$[(a+b)+(b-c)]-b=[(a+b)-b]+(b-c)=a+(b-c)$$

und nach (Regel 2.) $=(a+b)-c$. — Eben so

$$[(p+(q-d))+(m-a)]-(q-d)=p+(m-a)$$

und dies wieder nach (Regel 2.) $=(p+m)-a$.

Note. Man muß nur nicht vergessen, daß hier gar nichts vorausgesetzt wird, weder etwas aus der gemeinen Rechenkunst, noch etwas aus der Buchstabenrechnung, sondern, daß alles was hier entwickelt oder angegeben wird, aus den vorhergehenden (§. §.) mit Leichtigkeit hervorgehen muß, wenn man sie nur in ihrem eigenen Sinne gehörig aufgefaßt hat.

§. 8. Lehrsatz.

Auch ist

$$2)\quad a-(b+c)=(a-b)-c=(a-c)-b,$$

d. h. es ist einerlei, ob man erst b und c addirt und dann die ganze Summe von a subtrahirt, oder ob man zuerst b allein subtrahirt, und von dem Resultat noch c, oder zuerst c allein und von dem, was hier sich ergiebt noch b subtrahirt.

---

dern, ihm gleichen setzen, und da in der (n. 1. des Lehrsatzes) beide Ausdrücke links und rechts einander gleich sind, so kommt alles darauf an, daß man aus der Formel selber abließt, wie aus dem einen $(a-c)+b$, der als gegeben anzusehen ist, der andere gefunden werden kann, der dem erstern gleich ist. Und dies drücken eben diese praktischen Regeln praktisch aus.

Beweis. Denn man addire b+c zu dem mittlern Ausdruck (a—b)—c, so erhält man nach (§. 1.):

$$[(a-b)-c]+(b+c),$$

und dies ist nach (§. 7. Anmerkung. Regel 2.):

$$=[(a-b)+(b+c)]-c=[(a-b)+b+c]-c \quad (\S.\ 2.)$$
$$=(a+c)-c \qquad =a;$$

also $[(a-b)-c]+(b+c) \quad =a.$

Subtrahirt man nun hievon auf beiden Seiten b+c, so ergiebt sich der Lehrsatz.

Anmerkung. In so ferne die 3 Ausdrücke, die in den Gleichungen des Lehrsatzes vorkommen, einander gleich sind, so kann der Lehrsatz dazu gebraucht werden, wenn einer von ihnen gegeben ist, ihn in jeden der beiden Andern zu verwandeln. Von den praktischen Regeln, die er für diese Verwandlung an die Hand giebt, heben wir folgende heraus:

1) „Eine Summe (b+c) wird von einem Ausdruck a subtrahirt, wenn „man nach und nach jeden einzelnen der Summanden subtrahirt.

2) „Von einer Differenz a—b wird ein Ausdruck c subtrahirt, entwe„der, indem man c von dem Minuendem a allein subtrahirt und den Subtra„henden b unverändert läßt; oder auch, indem man erstlich c zu dem Sub„trahenden b addirt, und dann die ganze Summe (b+c) von dem Mi„nuenden a subtrahirt."

§. 9. Lehrsatz.

Ferner ist noch

$$3) \quad a-(b-c)=(a-b)+c,$$

d. h. es ist einerlei, ob man zuerst c von b subtrahirt, und die Differenz b—c wiederum von a subtrahirt, oder ob man zuerst b allein von a subtrahirt und dann dazu noch c addirt.

Beweis. Denn man addire b—c zu dem Ausdruck rechts, nehmlich zu (a—b)+c, so erhält man:

$[(a-b)+c]+(b-c)$ oder $(a-b)+c+(b-c)$ oder (weil $c+(b-c)=b$ ist) $(a-b)+b$ oder a, so daß man also hat: $[(a-b)+c]+(b-c)=a.$

Subtrahirt man nun hievon auf beiden Seiten wiederum (b—c), so ergiebt sich der Lehrsatz.

Anmerkung. Die praktischen Regeln, die sich für die Anwendung

dieses Lehrsatzes zur Verwandlung der Ausdrücke in andere gleichbedeutende ergeben, sind:

1) „Eine Differenz b—c wird von einem Ausdrucke a subtrahirt, wenn „man den Minuenden b allein subtrahirt, dagegen den Subtrahenden c wie„derum addirt.

2) „Ein Ausdruck c wird zu einer Differenz a—b addirt, wenn man „diesen Ausdruck c (nicht bloß, wie nach (Anmerk. n. 2. §. 7.), zu dem „Minuenden a addirt, und den Subtrahenden b unverändert läßt, sondern „auch, wenn man ihn) von dem Subtrahenden b subtrahirt und den Mi„nuenden a als solchen unverändert läßt."

§. 10. Lehrsatz.

Endlich ist noch:

4) $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$.

Beweis. Denn man addire $b+d$ zu dem Ausdruck links, so erhält man nach (§. §. 1. und 2.): $[(a-b)+(c-d)]+(b+d)$ oder $[(a-b)+b]+[(c-d)+d]$, also $[(a-b)+(c-d)]+(b+d)=a+c$.

Subtrahirt man daher hier auf beiden Seiten wiederum $b+d$, so ergiebt sich der Lehrsatz.

Anmerkung 1. Von den beiden praktischen Regeln, welche für die Anwendung dieses Lehrsatzes zur Verwandlung der Ausdrücke hervorgehen, heben wir heraus:

„Zwei Differenzen a—b und c—d werden zu einander addirt, wenn „man ihre Minuenden a und c zu einander, und auch ihre Subtrahenden „b und d zu einander addirt, und die letztere Summe $b+d$ von der erstern „$a+c$ subtrahirt."

Anmerkung 2. Wir wollen noch einmal, wie schon pag. 14. geschehen, den Sinn näher bezeichnen, in welchem diese praktischen Regeln zu nehmen, überhaupt diese Gleichungen oder Formeln anzuwenden sind. — Soll z. B. die Differenz $(a-b)-d$ zu der Differenz $b-(c-d)$ addirt werden, so erhält man nach (§. 1. Anmerkung) augenblicklich und allemal die Summe $[(a-b)-d]+[b-(c-d)]$. Man verlangt nun aber gewöhnlich sogleich weiter, diesen eben gefundenen Ausdruck wiederum in einen andern gleichbedeutenden zu verwandeln, und dazu dient eben hier die Formel (n. 4.). Nach ihr erhält man statt der obigen Summe, die Differenz $[(a-b)+b]-[d+(c-d)]$, wofür man wiederum $a-c$ setzen kann, nach (§. 2. u. §. 5.).

§. 11. Zusatz.

Weil eine Summe von drei, vier und beliebig viel Summanden auch allemal als eine Summe von zwei Summanden angesehen werden kann, deren Summanden nur selbst wieder Summen sind, so können die vorstehenden Lehrsätze, was sie von Summen zweier Summanden lehren, augenblicklich auf Summen dreier und mehrer Summanden ausgedehnt werden.

So hat man z. B. nach (§. 10.):

$$(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d).$$

Addirt man nun dazu noch e—f, so erhält man:

1) $(a-b)+(c-d)+(e-f)=[(a+c)-(b+d)]+(e-f).$

Aber nach demselben (§. 10.) ist wiederum:

2) $[(a+c)-(b+d)]+(e-f)=(a+c+e)-(b+d+f).$

Folglich auch aus (1. und 2.):

$(a-b)+(c-d)+(e-f)=(a+c+e)-(b+d+f)$; u. s. w. f.

Anmerkung 1. Die Sätze von (§. 5.) an bis (§. 11.) lehren aber, wie man Summen und Differenzen und beliebige, als einfache gedachte Ausdrücke zu einander addirt und von einander subtrahirt, und bilden daher die nothwendige und unentbehrliche Grundlage alles Addirens und Subtrahirens, mithin zu gleicher Zeit alles Operirens überhaupt. —

Betrachtet man dieselben Sätze noch genauer, so findet man leicht, daß sie eigentlich nichts von den Zahlen selbst lehren, sondern mehr lehren, wie die Operationen des Addirens und Subtrahirens sich gegenseitig zu einander verhalten, wie sie sich zum Theil oder ganz gegenseitig aufheben und vernichten, wie aber auch (z. B. in der Form $a-(b-c)=(a-b)+c$) eine doppelt auf einander folgende Subtraktion, gewissermaßen zu einer Addition führen kann.

Anmerkung 2. Man kann sich auch unter Addiren ein Hinzunehmen, und unter Subtrahiren ein Hinwegnehmen denken, hat aber dann schon mehr materielle Begriffe, wie sie nur in besondern Fällen genau passend seyn werden. Aus diesem Gesichtspunkte konnte man die wahrscheinliche Richtigkeit der Lehrsätze (§. §. 7 — 10.) auch noch wie folgt anschaulich machen.

Man setzt nehmlich stillschweigend voraus, daß wenn man zu einem Vorhandenen etwas hinzuthut, und auch etwas hinwegnimmt, es nothwendig für das End-Resultat einerlei seyn werde, ob man das Hinwegnehmen

vor oder nach dem Hinzufügen habe statt finden lassen. — Dann ist der Lehrsatz (§. 7.) völlig überflüssig, weil er derselbe ist, den man hier stillschweigend voraussetzt. — Der Lehrsatz (§. 8.) fällt dann eben so unmittelbar und ohne weitern Beweis in die Augen, weil man ebenfalls stillschweigend als bekannt voraussetzt, oder als sich von selbst verstehend, daß es einerlei seyn werde, ob man erst etwas, dann noch etwas hinwegnimmt, oder beides zusammen auf einmal. — Den Lehrsatz (§. 9.) dagegen kann man dann so behandeln: So wie man b—c von a abziehen soll, so soll das um c verminderte b hinweggenommen werden. Nimmt man daher statt dessen das noch nicht verminderte ganze b hinweg, so hat man zu viel hinweggenommen und zwar das c zu viel, um welches b vorher hat vermindert werden sollen. Man muß also dieses zu viel weggenommene c zu dem erhaltenen a—b wiederum addiren (hinzufügen), wenn man dasselbe haben will, als a—(b—c) ausdrückt. — Der Lehrsatz (§. 10.) endlich versteht sich nach dieser Ansicht wiederum von selbst.

Für unsern gegenwärtigen Zweck mag diese letztere Ansicht ausreichen. Der strengere Wissenschaftsforscher weiß aber, daß es gerade der Wissenschaft zukommt, was uns im Leben dunkel vorschwebt, à priori zu construiren, und so mit Bewußtseyn die Regel hinzustellen, nach welcher sich die Erscheinungen im Leben richten. — Demselben bleibt dann auch nicht verborgen, daß diese letztere mehr materielle Ansicht die hier in Rede stehenden Sätze eigentlich stillschweigend voraussetzt, so daß sie dann eigentlich als Voraussetzungen, die sich von selbst verstehen, bloß ausgesprochen werden.

Anmerkung 3. Uebersieht man übrigens die Beweise der Formeln (§. 7 — 10.), so findet man leicht, daß man allemal zu ihnen gelangt, wenn man einen der beiden Ausdrücke links oder rechts des (=) Zeichens aufsucht und bemerkt, daß er eine Differenz ist. Denn weil die Differenz allemal die Zahl bezeichnet, welche, zu ihrem Subtrahenden addirt, den Minuenden giebt, so darf man nur zu dem Ausdruck auf der andern Seite, was er auch seyn mag, denselben Subtrahenden addiren; kommt dann derselbe Minuend heraus, so ist der Ausdruck selbst mit der Differenz auf der andern Seite nothwendig dieselbe Zahl. — So hat man die obigen Beweise alle gefunden.

§. 12. Erklärung.

Wir haben bisher vorausgesetzt: 1) daß alle Buchstaben (ganze) Zahlen bezeichnen, 2) daß auch alle Minuenden größer sind als ihre Subtrahenden, daß also auch alle Differenzen (ganze) Zahlen sind. Unter dieser Voraussetzung allein

gelten unsre bisher entwickelten Sätze der Addition und der Subtraktion. — Weil wir aber bemerken, daß die bisher entwickelten Sätze uns nicht mit Eigenschaften einzelner Zahlen, sondern mehr mit den Eigenschaften derjenigen Operationen bekannt machen, die wir Addition und Subtraktion nennen, weil sonach die entwickelten Sätze mehr das Verhalten dieser beiden Operationen zu einander aussprechen, so läßt sich schon daher mit Grund erwarten, daß dieses Verhalten der Operationen in denselben Gleichungen ausgesprochen seyn und bleiben werde, wenn wir uns auch gar nicht mehr darum bekümmern, ob a, b, a—b, u. s. w. (ganze) Zahlen bedeuten oder nicht.

Denken wir uns daher unter a+b eine angezeigte Addition, und unter a—b eine angezeigte Subtraktion, unbekümmert ob a und b (ganze) Zahlen sind oder nicht, unbekümmert ob a größer wie b oder nicht; denken wir uns also noch immer unter a—b einen Ausdruck der zu b addirt, a giebt, so daß noch immer

$$(a-b)+b=a$$

gedacht wird; fassen wir überhaupt alle Gleichungen, welche wir den vorhergehenden Sätzen zufolge unter der Voraussetzung ableiten, daß man überall (ganze) Zahlen habe, ganz allgemein auf, so daß wir uns um die Bedeutung der einzelnen Buchstaben nicht mehr bekümmern, sondern nur das Verhalten der Operationen zu einander im Auge haben, so sind zwei Fälle möglich; 1) entweder man hat in der That überall nur (ganze) Zahlen, und dann sind die Resultate alle richtig, weil sie aus, unter dieser Voraussetzung streng erwiesenen Sätzen abgeleitet sind, oder 2) man hat nicht überall (ganze) Zahlen oder nirgend (ganze) Zahlen, so hat man wenigstens nichts unrichtiges, d. h. nichts, was irgend einem früher vorhandenen widersprechen könnte, weil man früher nur (ganze) Zahlen in Betrachtung gezogen hatte.

Solche Ausdrücke wie a+b oder a—b, u. s. w. bei denen

wir uns nicht mehr um die Bedeutung der einzelnen Buchstaben oder der Ausdrücke selbst bekümmern, sondern bei denen wir bloß die angezeigte Addition und Subtraktion, d. h. bloß die Form derselben berücksichtigen, nennen wir nun allgemeine Ausdrücke, und eine Gleichung zwischen ihnen (welche dann auch bloß, nicht sowohl Einerleiheit der Resultate, als mehr im Allgemeinen Einerleiheit der Folge der Operationen ausdrückt) nennen wir eine allgemeine oder identische Gleichung (zuweilen Formel. Vergl. §. 4.).

§. 13. Zusatz.

Die Sätze (§. 5.) und (§. 6.): „Gleiches zu Gleichem „addirt, oder von Gleichem subtrahirt, giebt Gleiches;" und: „Sind zwei Ausdrücke einem dritten gleich, so sind sie auch „unter einander gleich," lassen wir also für allgemeine Ausdrücke und für allgemeine Gleichungen unbedingt gelten; eben so die Sätze (§. 7 — 11.), welche lehren, wie Summen und Differenzen addirt oder subtrahirt werden, zu oder von einem beliebigen Ausdruck. — Denn entweder man hat immer (ganze) Zahlen, und dann liefern sie richtige Resultate, oder man hat nicht immer oder nie (ganze) Zahlen, und dann liefern sie doch nichts unrichtiges, d. h. nichts was mit einem früher vorhandenen im Widerspruch stehen könnte; und alle Gleichungen (Identitäten) die man erhält, sprechen bloß das Verhalten der Addition und der Subtraktion zu einander aus.

Note. Indem wir die Zeichen a+b, a—b bloß ihrer Form nach beibehalten, halten wir gerade die Operationen allein fest und bekümmern uns nicht mehr um das, womit operirt wird. Wie sich nun diese Operationen der Addition und Subtraktion zu einander verhalten, wie sie sich zum Theil in verschiedener Folge einander ersetzen, wie sie sich auch einander aufheben und vernichten, das war in den oben entwickelten Gleichungen schon ausgesprochen, als wir uns noch (ganze) Zahlen dachten, und bleibt natürlich jetzt noch ausgesprochen, wo wir von der Bedeutung der einzelnen Buchstaben ganz abstrahiren, sondern nur die Formen allein berücksichtigen. — Aus dieser einmal festgehaltenen Ansicht geht aber alles folgende jedesmal als specieller Fall hervor, so daß bloß für jeden solchen einzelnen Fall vollends ausge-

sprochen wird, was in dem (§. 13.) selbst bereits im Allgemeinen enthalten ist.

§. 14. Erklärung.

Die allgemeine Differenz p—p, in welcher der Minuend von seinem Subtrahenden nicht verschieden ist, bezeichnen wir von nun an kürzer durch das Zeichen 0, welches wir Null aussprechen. *)

Statt der allgemeinen Summe 0+b schreiben wir in der Folge kürzer bloß +b und nennen letzteres einen additiven Ausdruck (additive Zahl, additive Größe). — Eben so schreiben wir statt der allgemeinen Differenz 0—b kürzer bloß —b und nennen das letztere einen subtraktiven Ausdruck (subtraktive Zahl, subtraktive Größe). In beiden Fällen heißt b selbst das Glied des additiven Ausdrucks +b oder des subtraktiven Ausdrucks —b. Additive und subtraktive Ausdrücke zusammen nennt man auch entgegengesetzte.

Note. Will man sich diese Begriffe mehr versinnlichen, so darf man sich nur, wie früher schon, unter den Buchstaben Größen, und unter dem Addiren ein Hinzufügen, so wie unter dem Subtrahiren ein Hinwegnehmen denken, und dann ist p—p oder 0 (Null) nach der Definition der Differenz (§. 9), diejenige Größe, welche zu der Größe p des Subtrahenden addirt, dieselbe Größe p des Minuenden giebt. Da man aber zu einer Größe p, nichts hinzufügen darf, wenn dieselbe Größe p herauskommen soll, so ist, nach dieser Ansicht, Null als ein Zeichen anzusehen, welches Nichts bedeutet.

Nach derselben Ansicht, in Verbindung mit der vorliegenden Definition und der Definition der Differenz (§. 9.) ist —b oder 0—b die Größe, welche, wenn sie zu der Größe b addirt wird, 0 (Null) oder Nichts giebt. Denkt man sich also unter b z. B. 6 Rthlr. Vermögen, so ist —b die Größe, die, zu 6 Rthlr. Vermögen hinzugefügt, gerade Null oder Nichts giebt; und dies wären offenbar 6 Rthlr. Schulden. — Drückt b etwa 5 Meilen von Süden nach Norden gegangen aus, so würde —b die Größe bedeuten, welche zu diesen 5 Meilen von Süden nach Norden gegangen, hinzugefügt nichts giebt,

---

*) Man erinnere sich nur recht lebhaft (der Anmerkung zu §. 1.), daß wir nehmlich aus der gemeinen Rechenkunst und überhaupt, gar nichts voraussetzen dürfen, daher auch hier nicht bloß das Recht haben, sondern sogar verpflichtet sind, was wir uns in der Folge unter Null denken wollen, anzugeben. Diese Bedeutung müssen wir aber dann durchgehends beibehalten.

d. h. gar kein Vorwärtskommen giebt, und dies sind offenbar 5 Meilen in der entgegengesetzten Richtung gegangen. Bedeutet b etwa 5 Linien gestiegen, so kann —b dieselben 5 Linien gefallen ausdrücken, u. s. w. f. Solche Größen, wie sie hier durch b und —b ausgedrückt werden, nennt man entgegengesetzte Größen, und sie haben ein Bestreben in Verbindung mit einander sich gegenseitig aufzuheben. Die erstere b pflegt dabei die positive, die andere —b dagegen die negative zu heißen.

Besser ist es allerdings, wenn man zu solchen mehr materiellen Ansichten seine Zuflucht nicht zu nehmen braucht, da sie zwar die Begriffe versinnlichen, dagegen auch manche Dunkelheit mit sich führen, und immer nur in einem sehr engen Umfange sich mit Leichtigkeit durchführen lassen. Wir rechnen z. B. mit —b und setzen nachher statt b selbst wieder z. B. —4; soll man nun —b d. h. —(—4) noch zu den negativen Größen rechnen? — Wir multipliciren (—4) mit (—3) und bekommen +12 oder 12; kann man aber, in dem Sinne, wie wir das Multipliciren nehmen müssen, eigentlich 2 Größen mit einander multipliciren, oder muß nicht wenigstens die eine davon eine abstrakte Zahl seyn? — Wir sind 2 Meilen von Süden nach Norden zu Fuße gegangen und gehen dieselben 2 Meilen in der entgegengesetzten Richtung wiederum zurück, so sind wir zwar um nichts vorwärts gekommen, aber wir sind doch 4 ganze Meilen gegangen. Es heben sich also die 2 mal 2 Meilen in einer Beziehung einander auf, in einer andern aber wiederum nicht; also heben sie sich wenigstens nicht deshalb auf, weil sie in entgegengesetzter Richtung gemacht worden sind, denn sonst würden sie sich unbedingt aufheben, auch in Bezug auf unsre Müdigkeit. Scheint es nicht vielmehr, als ob die 2 Meilen immer 2 Meilen wären, weder positiv noch negativ sondern absolut, und daß wir nur „sie subtrahiren müssen," wenn wir wissen wollen um wieviel wir vorwärts gekommen sind, „sie dagegen addiren müssen," wenn wir den Aufwand unsrer Kräfte beurtheilen wollen, so daß der Gegensatz oder das Entgegengesetzte mehr sich anschließen dürfte an den Gegensatz oder an das Entgegengesetzte der Operationen der Addition und der Subtraktion? — Und sollte man aus 9 Rthlr. Schulden nicht eben so gut die Wurzel ausziehen können, als aus 9 Rthlr. Vermögen, während uns das erstere zu den imaginären Größen führte, die wir nun doch nicht mehr versinnlichen können, in so ferne der Gegensatz, der uns in der strengern Wissenschaft zu ihnen führt, von einer eigenthümlichen Art ist, und sich nicht an den Gegensatz anschließt, wie wir ihn so unmittelbar zwischen Schulden und Vermögen, Steigen und Fallen, u. s. w. wahrnehmen? — —

§. 15. Zusatz.

Da nach (§. 13.) die vorstehenden Sätze (§. 5 — 11.) lehren, wie man allgemeine Summen und Differenzen addirt und subtrahirt, zu oder von einem beliebigen Ausdruck, und da 0 und +b und —b, solche allgemeine Summen und Differenzen sind (nach den Definitionen §. 14.) oder vielmehr

vorstellen, so lehren dieselben Sätze auch, wie man 0 und +b und —b addirt und subtrahirt.

Man will z. B. a zu 0 addiren; so will man also a zur Differenz p—p addiren. Nun wird aber nach (§. 7. Anmerkung, Regel 2.) a zu einer Differenz p—p addirt, wenn man zuerst a zu dem Minuenden p addirt (giebt a+p), und den Subtrahenden p unverändert läßt, so daß man

(a+p)—p erhält. Dieses (a+p)—p ist aber nach (§. 5.) nichts weiter als a. Folglich auch a+0=a.

Oder man will den subtraktiven Ausdruck —b d. h. die Differenz 0—b, zu a addiren, so muß man nach derselben Regel erstlich den Minuenden 0 zu a addiren, (dies giebt a selbst wieder) und dann den Subtrahenden b als solchen beibehalten, und erhält also

(a+0)—b oder a—b, so daß man hat

a+(—b)=a—b. *)

Soll dagegen 0 (Null) d. h. die Differenz p—p von a subtrahirt werden, so muß man nach (§. 9. Anmerk. Regel 1.) erstlich den Minuenden p subtrahiren, und dann dazu den Subtrahenden p noch addiren. Dies giebt also

(a—p)+p oder a

(nach §. 5.), so daß man hat

a—0=a.

Wird endlich der subtraktive Ausdruck —b oder die allge-

---

*) Um hier, so wie in der Folge immer den richtigen Gesichtspunkt zu behalten, muß man sich aus (§. 1. und Note zu §. 3.) lebhaft erinnern, daß, wenn z. B. —b zu a addirt werden soll, man bloß die Summe a+(—b) hinschreiben darf. — Hier will man aber allemal schon andere Ausdrücke haben, welche dieser, durch die Addition erhaltenen Summe a+(—b) wiederum gleich (identisch) sind, und in diesem Sinne sind die hier stehenden Auseinandersetzungen zu nehmen.

Soll man z. B. —b von a subtrahiren, so giebt dies nach (§. 3.) ohne weiters a—(—b). Für diese Differenz nun kann man wiederum andere identische Ausdrücke setzen wollen, und dazu werden eben die frühern Formeln (Gleichungen) verwandt, weil sie allemal 2 identische Ausdrücke enthalten; so daß der eine für den andern gesetzt werden kann.

meine Differenz 0—b von a subtrahirt, nach derselben Regel, so erhält man

$$(a-0)+b \quad \text{oder} \quad a+b, \quad \text{so daß man hat}$$

$$a-(-b)=a+b.$$

Man findet also leicht:

1) $a+0=a$; 2) $a-0=a$;

dahero auch 3) $+b=0+b=b$;

4) $a+(-b)=a-b$; 5) $a-(-b)=a+b$.

Und aus (4.), wenn man 0 statt a schreibt,

$$0-(-b)=0+b$$

d. h. 6) $-(-b)=+b=b$.

Eben so

$$0-(b-a)=(0-b)+a=(a+0)-b=a-b$$

d. h. 7) $a-b=-(b-a)$.

Note. Nach der andern Ansicht, nach welcher 0 (Null) Nichts bedeutet, ergeben sich die Resultate (n. 1. und n. 2.) unmittelbar, in so ferne nichts zu a hinzugenommen, oder nichts von a hinweggenommen, das a offenbar unverändert läßt. — Die Formel (n. 4.) kann man nach dieser letztern Ansicht so erklären: Da die entgegengesetzten Größen sich gegenseitig aufheben, so hebt die negative Größe —b, wenn sie zu a hinzugefügt wird (dieses a denkt man sich aber als eine positive Größe) so viel von der positiven a auf, so daß dann nur noch a—b übrig bleibt. — Die Gleichung (n. 5.) dagegen könnte man so versinnlichen: Wenn man zu a erst —b hinzunimmt, und dann auch noch b oder +b hinzunimmt, so heben sich diese Größen —b und +b gegenseitig auf und die Größe a bleibt unverändert. Nimmt man nun von diesem a+(—b)+b d. h. von a, die Größe —b wiederum hinweg, so bleibt noch a+b übrig. — Für die Gleichung (n. 5.): Die Größe b und die Größe —b zusammengenommen geben nichts oder 0; nimmt man daher von diesem Nichts oder Null, die Größe —b wiederum hinweg, so bleibt die andere +b oder b übrig. — Was endlich die Gleichung (n. 6.) betrifft, so kann man solche, wie folgt, veranschaulichen: Die Größe b kann man sich in zwei Theile zerlegt denken, der eine a, der andere b—a; nimmt man daher b hinweg, so kann man jeden der beiden Theile, einen nach dem andern wegnehmen, zuerst a dann noch b—a; nimmt man nun a weg von a, so bleibt Null oder nichts, und davon noch b—a weggenommen, giebt 0—(b—a) oder —(b—a). — Oder auch so: Die Differenz a—b kann man sich vorstellen als eine Summe, wo a der eine, und die negative Größe —b der andere Summand ist (nach n. 4.). Nun hebt die positive Größe a von der negativen —b so viel als a selbst beträgt auf; folglich bleibt nur noch die negative Größe —(b—a).

Etwas Gezwungenes tritt jedoch in diesen Veranschaulichungen immer hervor, so daß es weit einfacher, auch weit leichter zu seyn scheint,

den wissenschaftlichern Gang des Paragraphen selbst zu verfolgen, der bloß eine Anwendung der früher aufgestellten Sätze erfordert.

Anmerkung. Aus den Gleichungen (n. 4. und n. 5.) bilden sich folgende praktische Regeln:

1) „Ein subtraktiver Ausdruck —b wird zu a addirt, wenn man das „Glied b desselben von a subtrahirt.

2) „Ein subtraktiver Ausdruck —b wird subtrahirt (von irgend ei„nem andern Ausdruck a) wenn man das Glied b desselben addirt (zu „diesem Ausdruck a).

3) „Jede Differenz a—b kann man sich denken als eine Summe aus „dem Ausdruck a als den einen Summanden und dem subtraktiven Aus„druck —b als den andern Summanden (n. 4)."

Die Gleichung (n. 7.) dient dazu, eine Differenz a—b (d. h. das was herauskommt, wenn b von a subtrahirt wird) in einen subtraktiven Ausdruck —(b—a) zu verwandeln, nach der praktischen Regel:

4) „Statt b von a zu subtrahiren, subtrahire man umgekehrt a von b „und setze dem Resultat b—a das (—) Zeichen vor."

Note. So giebt —4 zu 7 addirt, 3 zum Resultat, und —4 von 7 subtrahirt giebt 11; und 7 von 4 subtrahirt giebt —3; und s. f.

§. 16. Zusatz.

Aber eben so leicht ist es nun —b zu —a zu addiren oder —b von —a zu subtrahiren.

Sollen nehmlich —a und —b d. h. sollen die Differenzen 0—a und 0—b zu einander addirt werden, so geschieht dies nach (§. 10.) und giebt

(0+0)—(a+b oder 0—(a+b) oder —(a+b). —

Man kann aber auch die vorstehende (Regel 1. §. 15. Anmerkung.) in Anwendung bringen, nach welcher es einerlei ist, ob man —b addirt oder b subtrahirt, oder ob man —a addirt oder a subtrahirt. Wenn man also vorher erhalten hat

$$8)\quad (-a)+(-b)=-(a+b),$$

so erhält man jetzt

$$9)\quad (-a)+(-b)=(-a)-b=(-b)-a,$$

so daß dann auch seyn muß:

$$10)\quad (-a)-b=-(a+b).$$

Soll aber —b von —a subtrahirt werden, so geschieht dies nach (§. 15. Anmerkung. Regel 2.) indem man b zu —a addirt, oder —a zu b addirt, und dies letztere geschieht wieder nach (§. 15. Anmerkung. Regel 1.) indem man a von b subtrahirt, so daß man erhält:

11) $(-a)-(-b)=(-a)+b=b-a$.

Note. Wenn man will, so kann man sich diese Resultate (1—4.) wiederum nach der materiellern Ansicht versinnlichen und anschaulich machen. Die Gleichung (n. 8.) z. B. so: a Rthlr. Schulden und b Rthlr. Schulden zusammengenommen, geben a+b Rthlr. Schulden. — Die Ausdrücke in der Gleichung (n. 9.) nimmt man wohl auch stillschweigend als dieselben an, indem man sich stillschweigend (—a)—b als eine Summe denkt, aus —a und der negativen Größe—b.

Anmerkung. Für das praktische Arbeiten kann man sich auch bloß die Regeln merken.

I. Für das Addiren:

1) „Haben die beiden zu addirenden Ausdrücke einerlei (+ oder —) „Zeichen, so addire man die Glieder und setze der Summe dasselbe (+ oder „—) Zeichen vor.

2) „Haben die zu addirenden Ausdrücke verschiedene (+ oder —) Zei„chen, so subtrahire man irgend eines von dem andern und setze dem „Resultat das Zeichen des Minuenden vor."

Note. Z. B. +a und +b addirt, giebt +(a+b); —a und —b addirt, giebt —(a+b); —a und +b addirt, giebt entweder +(b—a) oder auch —(a—b) (§. 15. n. 7.); 7 und 4 addirt giebt 11; —7 und —4 addirt giebt —11; —7 und +4 addirt giebt —3; endlich +7 und —4 addirt, giebt +3.

II. Für das Subtrahiren:

„Jeden Ausdruck der subtrahirt werden soll, versehe man mit dem ent„gegengesetzten (+ oder —) Zeichen und addire dann den neuen Ausdruck „nach den vorhergehenden Regeln (I. 1. und 2.)"

Note. Z. B. statt —4 zu subtrahiren, addire man +4 oder 4; statt +4 oder 4 zu subtrahiren, addire man —4 nach den vorhergehenden Regeln. — Soll also z. B. —b von a subtrahirt werden, so addire man +b oder b zu a, und man erhält dann a+b; soll —b von —a subtrahirt werden, so addire man +b oder b zu —a und erhält nach (I. 2.) entweder —(a—b) oder b—a.

Die hiesigen Regeln ersetzen also sowohl die des (§. 15. Anmerkung.) als auch die Formeln des (§. 16.), und sind daher die einzigen, die man

für das praktische Arbeiten (Addiren und Subtrahiren) mit additiven und subtraktiven Ausdrücken zu behalten hat, besonders wenn man nicht aus dem Auge verliert, daß +b mit b gleich ist, daß man also immer b statt +b, aber auch +b statt b setzen kann.

Diese Regeln (alle) sprechen aber jedesmal nur in Worten aus, was die Formeln (§. 15. und §. 16.) lehren, während diese Formeln (Gleichungen) selbst sich unmittelbar aus den Sätzen (§. 5 — 11.) ergeben, so daß sie und mit ihnen diese praktischen Regeln, eben dadurch als nothwendig richtige Resultate enthaltend, angesehen werden müssen.

§. 17. Erklärung.

Eine Summe von lauter additiven oder subtraktiven Ausdrücken z. B.

$$(-a)+(-b)+(+c)+(-d)+(+f)$$

oder $(+p)+(-q)+(+r)+(-s)+(-u)+(-v)$

und dergl. m. nennen wir eine algebraische Summe. Die Glieder (nicht —a, —b, +c, etc. etc. sondern) a, b, c, d, f, eben so p, q, r, s, u, v (nicht —u, —v) dieser additiven und subtraktiven Ausdrücke, heißen auch die Glieder der algebraischen Summe (vergl. §. 14.), während die additiven und subtraktiven Ausdrücke selbst, nehmlich —a, —b, +c, —d, +f in der einen, und +p, —q, +r, —s, —u, und —v in der andern algebraischen Summe, wie man aus (§. 2.) weiß, die Summanden der Summe bilden.

Anmerkung. In einer algebraischen Summe können auch alle Summanden lauter additive Ausdrücke seyn, oder lauter subtraktive.

§. 18. Zusatz.

Nimmt man irgend eine algebraische Summe z. B.

(⊙) $(+a)+(-b)+(-c)+(+d)+(-f)+(-g)$,

so kann man nach den Regeln (§. 16. Anmerk.), die beiden ersten Summanden addiren, und erhält dann a—b, dazu noch den dritten Summanden —c, und findet (a—b)—c; dazu den vierten Summanden +d oder d, und dies giebt [(a—b)—c]+d; dazu noch den folgenden Summanden —f addirt, giebt ([(a—b)—c]+d)—f; und addirt man

dazu noch den letzten Summanden —g, so ergiebt sich als ein mit der gegebenen algebraischen Summe (⊙) gleicher (identischer) Ausdruck

$$[([(a-b)-c]+d)-f]-g,$$

den man gewöhnlich bloß so schreibt,

$$a-b-c+d-f-g,$$

ein für allemal voraussetzend, daß wenn Klammern nicht ausdrücklich das Gegentheil bestimmen, man die einzelnen addirten und subtrahirten Theile immer in der Ordnung zusammen verbunden sich denken wolle, in welcher sie, von der linken zur rechten zu gehend, bei dem Lesen auf einander folgen.

Es ist daher die obige algebraische Summe (⊙)

$$=a-b-c+d-f-g$$

und deshalb nennt man wohl auch diesen letztern Ausdruck schon eine algebraische Summe, indem man in ihm die eigentliche algebraische Summe (⊙) vorgestellt sieht, dadurch daß man die Glieder a, b, c, d, f, g, jedes mit seinem vorstehenden (+ oder —) Zeichen genommen, also die dadurch entstehenden additiven und subtraktiven Ausdrücke, zu einander addirt sich denkt.

§. 19. Zusatz.

Da man nun in jeder Summe nach (§. 2.) die Summanden in beliebiger Ordnung nehmen kann, so gilt dies auch von den Gliedern der algebraischen Summe

$$a-b-c+d-f-g,$$

so daß diese anderen

$$-b+a-g-c+d-f,$$
$$-f+d+a-g-c-b, \qquad \text{u. s. w.}$$

alle einander und alle der gegebenen gleich sind, wenn nur jedes Glied dasselbe (+ oder —) Zeichen vor sich stehen behält.

Anmerkung. In einer algebraischen Summe kann man daher je zwei Glieder, welche Stelle sie auch einnehmen, jedes mit seinem vorste-

henden Zeichen, nach den Regeln des (§. 16. Anmerk. n. I.) mit einander vereinigen, so daß sie sich zum Theil oder ganz aufheben (d. h. ein einziges Glied nur oder Null geben) können. Z. B. statt a—b+c+b—d kann man bloß schreiben a+c—d; eben so statt —a—b+c+d—f kann man schreiben —a—(b—d)+c—f oder auch —a+(d—b)+c—f; auch statt a—7+c+3—f schreiben a—4+c—f, u. s. w. f.

§. 20. Lehrsätze.

I. Zwei algebraische Summen werden zu einander addirt, wenn man die Glieder der einen zu den Gliedern der andern in beliebiger Ordnung hinschreibt;

z. B. $(-a+b-c)+(-m+n)=-a+b-c-m+n$.

II. Eine algebraische Summe wird von einer andern subtrahirt, wenn man die Glieder der erstern (des Subtrahenden), jedes mit dem entgegengesetzten (+ oder —) Zeichen versehen, zu den Gliedern der andern in beliebiger Ordnung hinschreibt.

Z. B. $(-m+n)-(-a+b-c)=-m+n+a-b+c$;

auch $(a-b)-(c-d-f+g)=a-b-c+d+f-g$.

Beweise. Da jede algebraische Summe als eine gewöhnliche Summe anzusehen ist, so sollen bei der Addition derselben alle Summanden in eine einzige Summe vereinigt werden, und dies ist in (I.) (nach §. 18.) geschehen.

Da ferner nach der (Regel 1. Anmerk. §. 8.) eine Summe subtrahirt wird, wenn man nach und nach jeden einzelnen der Summanden subtrahirt, so gilt dies auch für die algebraische Summe. Weil aber die Summanden dieser letztern nach (§. 17.) lauter additive oder subtraktive Ausdrücke sind, so werden diese subtrahirt nach der Regel (II. §. 16. Anmerk.) wenn man sie mit dem entgegengesetzten (+ oder —) Zeichen versieht und dann addirt, welches letztere wiederum nach (I.) in dem bloßen hinschreiben besteht.

Anmerkung. Sowohl bei dem Addiren als auch bei dem Subtrahiren der algebraischen Summen, muß man im Praktischen immer mit Sorgfalt darauf sehen, so viel wie möglich von den Gliedern nach (§. 16.

Anmerkung. Regel I.) in ein einziges zu vereinigen, um zu Resultaten zugleich die einfachsten algebraischen Summen zu erhalten.

Note. Man soll z. B. $3a-2b-4c+d$ zu $2n-a+b-3c-p+q$ addiren, so erhält man zuerst nach (§. 20. I.):

$$3a-2b-4c+d+2n-a+b-3c-p+q,$$

dann aber wenn man die Glieder möglichst zusammen nimmt

$$2a-b-7c+d+2n-p+q.$$

Sollte dagegen die erstere der obigen algebraischen Summen subtrahirt werden, so erhielte man nach (§. 3.):

$$(2n-a+b-3c-p+q)-(3a-2b-4c+d),$$

dann nach (§. 20. II.):

$$2n-a+b-3c-p+q-3a+2b+4c-d,$$

und wenn man die Glieder zusammennimmt

$$2n-4a+3b+c-d-p+q.$$

§. 21. Lehrsatz.

Geht man von (ganzen) Zahlen aus; addirt und subtrahirt man jedesmal beliebige zwei derselben; addirt und subtrahirt man diese Resultate wiederum zu und von einander und zu oder von beliebigen (ganzen) Zahlen; und fährt man so fort, die Resultate sowohl unter sich oder mit neuen beliebigen (ganzen) Zahlen immer auf's neue durch Addition und Subtraktion zu verbinden, so ist jedes einzelne Resultat, so viel oder so wenig es auch zusammengesetzt seyn mag, doch nothwendig immer einer (ganzen) Zahl, oder der Null, oder endlich einer subtraktiven (ganzen) Zahl $-b$ gleich, wo b irgend eine (ganze) Zahl ist.

Und sowohl die (ganze) Zahl, als auch die Null, und auch die subtraktive (ganze) Zahl läßt sich allemal als eine Differenz zweier (ganzen) Zahlen schreiben.

Beweis fällt in die Augen.

Note. So kann man z. B. die (ganze) Zahl 3 auch schreiben

$$=4-1=5-2=6-3=7-4=8-5, \text{ u. s. f.}$$

Die (Null) 0 kann man schreiben

$$=1-1=2-2=3-3=4-4= \text{ etc. etc.}$$

Endlich ist

$$-5=1-6=2-7=3-8=4-9= \text{ etc. etc.}$$

§. 22. Zusatz.

Die beliebige Differenz $a-b$ zweier (ganzen) Zahlen schließt also alle möglichen Resultate in sich, welche aus

(ganzen) Zahlen durch Addition und Subtraktion (wie man auch die (ganzen) Zahlen selbst und was aus ihnen durch Addition und Subtraktion hervorgehen mag, auf's neue mit einander verbindet) hervorgehen können.

Note. Hat man z. B. $-7+4-9+16+5-3$, so giebt dies zuerst $-7+4=-3$, dann $-3-9=-12$, $-12+16=4$, $4+5=9$, zuletzt $9-3=6$; und dieses Endresultat 6, welches der algebraischen Summe $-7+4-9+16+5-3$ gleich ist, ist in $a-b$ enthalten, wenn man $a=b+6$ nimmt, für b dagegen eine ganz beliebige (ganze) Zahl setzt.

Eben so findet man z. B.

$$-7-(4-3)+9+(7-11)-8-(5-7)$$

der subtraktiven Zahl -9 gleich ($4-3=1$, $-7-1=-8$, $-8+9=1$, $7-11=-4$, $1+(-4)=-3$, $-3-8=-11$, $5-7=-2$, zuletzt $-11-(-2)=-9$), und dieses Resultat -9 ist in $a-b$ enthalten, wenn man $b=a+9$ nimmt, übrigens statt a eine beliebige (ganze) Zahl setzt.

Schlußfragen.

1) Was ist eine Summe, was eine Differenz, was Summand, was Minuend und Subtrahend? — Man thut wohl, alle diese Benennungen bloß auf die Form der Zeichen zu beziehen.

2) Wodurch unterscheidet sich das Addiren und das Subtrahiren der Zahlen selbst, von dem Addiren und subtrahiren der Zahlzeichen? — Letzteres besteht bloß und einzig darin, daß man die Zahlzeichen neben einander hinschreibt und das (+) oder das (—) Zeichen zwischen beide setzt, nachdem man vorher jeden einzelnen der Ausdrücke mit Klammern versehen hat.

3) In welchen Fällen ist ein Ausdruck (Zahlzeichen) zu umklammern, und in welchen Fällen können diese Klammern weggelassen werden?

4) Was ist eine allgemeine Summe, was eine allgemeine Differenz? Was ist Null? Was denkt man sich unter einem additiven Ausdruck $+b$, und unter einen subtraktiven Ausdruck $-b$?

5) Was ist eine algebraische Summe, was die Glieder derselben?

6) Dürfen in einer algebraischen Summe die Glieder beliebig versetzt werden?

7) Wie werden zwei algebraische Summen zu einander addirt und von einander subtrahirt? Und in welchem Sinne ist diese Frage zu nehmen, wenn man die hier vorstehende Frage (2.) nebst ihrer Beantwortung in Erwägung zieht?

8) Kann und darf die gemeine Rechenkunst als bekannt vorausgesetzt

werden, oder kommt es uns vielleicht zu, sie selbst erst zu erfinden, sobald wir uns vornehmen, alles, was wir von den Zahlen aussagen, selbstthätig zu erfinden.

9) Kann man auch einen einzelnen additiven oder subtraktiven Ausdruck z. B. b oder +b oder —b, als eine algebraische Summe ansehen? In gewissem Sinne allerdings, und es ist sogar praktisch bequem, dies zu thun, weil dann für das praktische Arbeiten nur die Lehrsätze der algebraischen Summen im Gedächtniß behalten zu werden brauchen.

10) Welches ist die praktische Regel für das Zusammenfassen zweier oder mehrer Glieder einer algebraischen Summe in ein Glied? — Haben die Glieder einerlei (+ oder —) Zeichen vor sich stehen, so addirt man sie und setzt dem Ganzen (der Summe) dasselbe (+ oder —) Zeichen vor. Haben sie aber verschiedene (+ oder —) Zeichen, so subtrahirt man sie von einander, und giebt der Differenz das Zeichen welches der Minuend hatte. (Vergl. §. 16. Anmerk. II. I.) *).

---

*) Weniger allgemein wäre diese letztere Regel, im Falle die Glieder verschiedene (+ oder —) Zeichen vor sich stehen haben, wenn man sagte: man subtrahire das kleinere vom größern, und gebe dem Rest das Zeichen des größern.

Arithmetik.

Zweites Kapitel.

Multiplikation, Division. Von den Brüchen. Lehrsätze des Größern und Kleinern, in Bezug auf absolute ganze und gebrochene Zahlen, so wie auch in Bezug auf positive und negative Zahlen.

§. 23. Erklärung.

Bedeuten wiederum wie Anfangs, alle Buchstaben (ganze) Zahlen, so wird eine Zahl a mit einer andern m multiplicirt, wenn man a, m mal nimmt und zu sich addirt. Das Resultat der Multiplikation nennen wir Produkt, und bezeichnen solches durch

ma oder m . a oder m×a

und nennen dabei m den Multiplikator oder den Coefficienten, a den Multiplikanden, und zuweilen beide ohne Unterschied die Faktoren des Produkts. — Das Produkt ma oder m . a oder m×a spricht man aus „m mal a" und das Zeichen (. oder ×) heißt das Multiplikationszeichen.

Note. Das Produkt 3 . 4 oder 3×4 bedeutet also die Summe 4+4+4; während das Produkt 4 . 3 oder 4×3 die Summe 3+3+3+3 vorstellt. Und das Produkt 5 . 1 oder 5×1 bedeutet die Summe 1+1+1+1+1 oder die Zahl 5 selbst.

Anmerkung. Auch hier ist das Zeichen m mit dem Zeichen a bereits multiplicirt, sobald das Produkt ma hingeschrieben ist. (Vergl. Anmerkungen zu §. §. 1 — 3.)

§. 24. Zusatz.

Das Produkt m . 1 ist also die Zahl m selbst, und wenn man unter m . a überhaupt die Summe

$$a+a+a+a+a+\ldots.$$

von m Summanden sich denkt, auch wenn a ein allgemeiner Ausdruck ist, so ist offenbar noch

1) $m \cdot 0 = 0$,

so wie vorher 2) $m \cdot 1 = m$, wenn nur m eine (ganze) Zahl ist.

§. 25. Zusatz.

Ist $\dfrac{a = b,}{ma = mb}$

so ist auch

d. h. Gleiches mit Gleichem multiplicirt, giebt Gleiches. (§. 4.)

§. 26. Lehrsätze.

Sind a, b, c, m (ganze) Zahlen, so ist allemal

1) $m(a+b) = ma+mb$ *)
2) $m(a-b) = ma-mb$
3) $ab = ba$
4) $c(ab) = a(bc) = b(ac)$ u. s. w. f;

*) Eigentlich müssen diese Gleichungen (n. 1. und n. 2.), der (Anmerkung §. 4.) zu Folge, so geschrieben werden:

1) $m(a+b) = (ma)+(mb)$
2) $m(a-b) = (ma)-(mb)$;

um aber so viel wie möglich Klammern zu ersparen, bilde man sich folgende Annahme. Man rechne nehmlich Addition und Subtraktion zur ersten Klasse, Multiplikation und Division zur zweiten Klasse der Operationen und setze fest, daß wo ein Ausdruck wegen Mangel von Klammern unbestimmt wird, man allemal die letztere Klasse der Operationen zuerst berücksichtigt wissen wolle. — Dieser Uebereinkunft zufolge ist nun der Ausdruck $ma+mb$, obgleich er bald als $m(a+m)b$, bald als $(ma)+(mb)$ genommen werden könnte, nicht mehr unbestimmt, weil man die Multipli-

d. h. 1) Es ist einerlei, ob man zuerst a und b addirt, und dann die Summe mit m multiplicirt, oder zuerst jede der Zahlen a und b einzeln mit m multiplicirt und dann diese Produkte ma und mb noch addirt.

2) Es ist einerlei, ob man zuerst b von a subtrahirt, und die Differenz dann mit m multiplicirt, oder ob man zuerst jede der Zahlen a und b einzeln mit m multiplicirt und dann das letztere Produkt mb von dem erstern ma noch subtrahirt.

3) Es ist einerlei, ob man b mit a multiplicirt, oder a mit b, d. h. einerlei ob man b, a mal, oder die Zahl a, b mal nimmt.

4) Wenn mehre Zahlen a, b, c nach und nach mit einander multiplicirt werden, so ist es immer einerlei, in welcher Ordnung dies geschieht. *)

Beweise. 1) Das Produkt $m(a+b)$ verlangt, daß man $a+b$, m mal nehmen und zu sich addiren soll; und da kann man nach (§. 2.) erstlich a, m mal nehmen und dann b, m mal nehmen, und zu einander addiren. Folglich

$$m(a+b) = ma+mb.$$

2) Das Produkt $m(a-b)$ verlangt, man soll die Differenz $a-b$, m mal nehmen und zu sich addiren. Nun werden aber Differenzen $a-b$, $a-b$, $a-b$, etc. etc. zu einander addirt nach (§. 10. in Verbindung mit §. 11.), wenn man ihre Minuenden a alle addirt, giebt ma, dann auch ihre

---

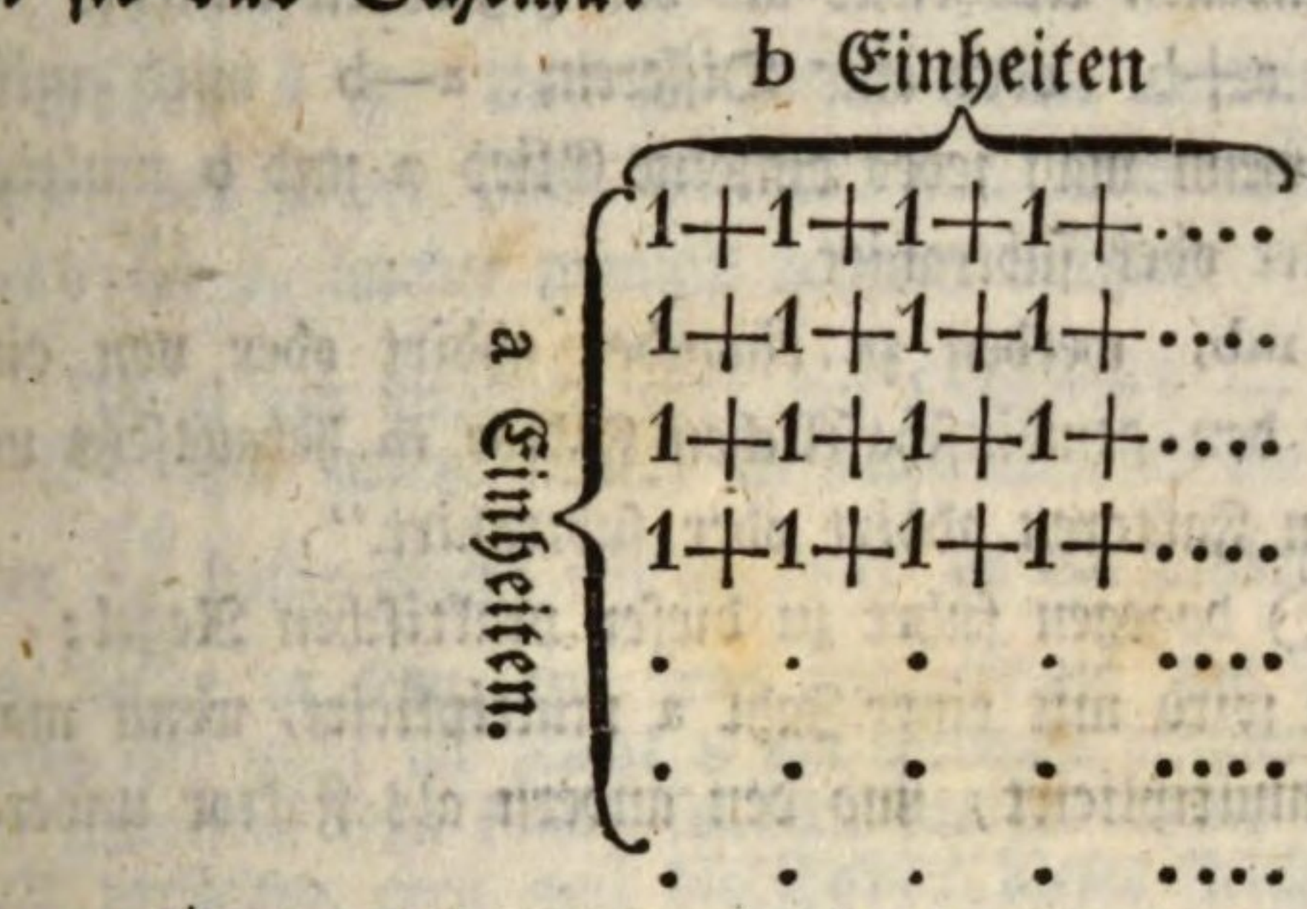
kation vor der Addition muß statt finden lassen. Man darf also ma—mb nicht so nehmen $m(a-m)b$, weil hier zuerst m von a subtrahirt werden müßte, um das a—m zu erhalten, womit m oder b noch multiplicirt werden soll; man muß vielmehr die Multiplikationen zuerst verrichten; also erst m mit a multipliciren, dann m mit b, und dann erst die Subtraktion folgen lassen, so daß dann ma—mb die Bedeutung (ma)—(mb) hat.

*) Wegen dieser (n. 4.) läßt man die Klammern, da wo mehre Zahlen mit einander multiplicirt werden sollen, ganz weg, und schreibt bloß abc, abcd, etc. etc.

Subtrahenden b alle addirt, giebt mb, endlich das letztere Resultat mb von dem erstern subtrahirt. Folglich

$$m(a-b)=ma-mb.$$

3) Man denke sich b Einheiten in einer Horizontalreihe, und a solche Horizontalreihen unter einander geschrieben, so bilden sie das Schema:



und alle darin enthaltenen Einheiten werden durch das Produkt ab vorgestellt. Nun kann man aber die Einheiten in jeder Vertikalreihe zuerst zusammen nehmen, wodurch man überall die Zahl a erhält, und hat dann b solche Vertikalreihen, so daß dieselbe Menge von Einheiten auch durch ba ausgedrückt seyn wird. Folglich ab=ba.

4) Das Produkt c(ab) verlangt, man soll das Produkt ab, c mal nehmen und zu sich addiren, so daß man die Summe von c Summanden

ab+ab+ab+ab+.... erhält.

Nun giebt aber der Satz (1.):

$$ab+ab=a(b+b);$$

also auch $(ab+ab)+ab=a((b+b)+b)$,

d. h. $ab+ab+ab=a(b+b+b)$; u. s. w. f.

Also obige Summe

$$=a(b+b+b+b+....)$$

wo das b, c mal vorkommt, so daß man auch

a . (cb) dafür setzen kann. Folglich ist

$c(ab)=a(cb)$; und nach (3.) ist $cb=bc$ also

wiederum $a\,.\,(cb)=a(bc)=b(ac)=b(ca)=c(ba)$.

Anmerkung. Weil aber in den Gleichungen (1—4.) die beiden Ausdrücke links und rechts einander gleich sind, so kann man den einen für den andern setzen, und es dienen daher diese Lehrsätze dazu, je einen dieser Ausdrücke, wenn er gegeben ist, in den andern zu verwandeln. Für diese Anwendung ergeben sich aus jedem dieser Lehrsätze selbst noch folgende 2 praktische Regeln, je nachdem man den einen oder den andern der durch das (=) Zeichen verbundenen Ausdrücke als den gegebenen ansieht.

1) „Eine Summe a+b oder eine Differenz a—b wird mit einer „Zahl m multiplicirt, wenn man jedes einzelne Glied a und b multiplicirt, „und die Produkte addirt oder subtrahirt.

2) „Produkte ma, mb, werden zu einander addirt oder von einander „subtrahirt, wenn man den gemeinschaftlichen Faktor m herausetzt und die „nicht gemeinschaftlichen Faktoren addirt oder subtrahirt."

Die Gleichung (4.) dagegen führt zu dieser praktischen Regel:

3) „Ein Produkt bc wird mit einer Zahl a multiplicirt, wenn man nur „einen der Faktoren multiplicirt, und den andern als Faktor unverändert „beibehält."

§. 27. Erklärung.

Eine (ganze) Zahl a wird durch eine (ganze) Zahl b dividirt, wenn man sich die Zahl denkt, die mit b multiplicirt, wiederum a giebt. Das Resultat dieser Division bezeichnen wir durch

$$\frac{a}{b} \quad \text{oder} \quad a : b$$

und nennen solches einen Quotienten, so wie a den Dividenden und b den Divisor. — Das Zeichen (— oder :) durch welches a von b getrennt (oder verbunden) ist, heißt das Divisionszeichen, und der Quotient $\frac{a}{b}$ oder a : b selbst wird ausgesprochen „a durch b".

Der Quotient $\frac{a}{b}$ oder a : b ist also diejenige Zahl, welche, wenn man sie mit b multiplicirt, gerade a giebt.

Anmerkung 1. Damit ein Quotient $\frac{a}{b}$ oder a : b wirklich eine Bedeutung habe (möglich sey, eine (ganze) Zahl vorstelle) müssen a

und b gerade solche Zahlen seyn, daß a entstehen kann, indem man b mehremale nimmt. — Für's erste nehmen wir diese Voraussetzung für alle die Quotienten an, mit denen wir es in den folgenden (§. §.) zu thun haben werden.

Anmerkung 2. Auch hier ist das Zeichen a durch das Zeichen b bereits dividirt, sobald nur der Quotient (das Zeichen) $\frac{a}{b}$ oder a : b hingeschrieben ist. Und in diesem Sinne werden wir in der Folge das Dividiren, wie früher schon das Addiren, Subtrahiren und Multipliciren der Ausdrücke, immer zunächst nehmen müssen.

Note. Ist 8 ein Produkt oder ein Quotient? — In so ferne man sich 4.2 dafür gesetzt denkt, ist diese Zahl 8 ein Produkt, in so ferne aber $\frac{24}{3}$ dafür gesetzt würde, wäre sie ein Quotient. — Es scheint daher besser zu seyn, um jede Verwirrung der Begriffe zu vermeiden, wenn wir nicht die Zahl 8 ein Produkt nennen (weil sie eben so gut ein Quotient seyn kann) sondern das Zeichen 4.2 allein unter Produkt verstehen, eben weil die Form dieses Zeichens allein die Art der Zusammensetzung andeutet. Eben so nennen wir besser nicht die Zahl 8 einen Quotienten, sondern verstehen unter Quotienten nur die Form des Zeichens $\frac{24}{3}$ oder 24 : 3 welche die Art andeutet, wie die Zahl 8 entsteht.

Was ferner in der Note zu (§. 3.) noch über die verschiedenen Arten der Addition und Subtraktion bemerkt worden ist, muß auch hier für die Multiplikation und Division bemerkt werden.

Auch hier müssen wir daher besonders bemerken: 1) daß wenn wir mit Zahlen arbeiten, wir doch immer Zahlzeichen (Ausdrücke) an ihre Stelle setzen müssen, 2) daß deshalb das Multipliciren und Dividiren nur immer mit Zahlzeichen (Ausdrücken) wirklich verrichtet wird, und 3) allemal damit beendigt ist, daß man die beiden zu multiplicirenden oder zu dividirenden Zahlzeichen (Ausdrücke) mit einander durch die Multiplikations- oder Divisions-Zeichen verbindet, d. h. dadurch daß man das Produkt ab oder den Quotienten $\frac{a}{b}$ oder a : b hinschreibt, wenn auch 4) gewöhnlich noch gewünscht wird, dieses Produkt oder diesen Quotienten in einen andern (mit den Faktoren oder mit den Dividenden und Divisoren gleichartigen) Ausdruck zu verwandeln.

§. 28. Zusatz.

Es ist daher

I) $b \cdot \frac{a}{b} = a$

II) $\frac{ba}{b} = a$

d. h. 1) ein Quotient mit seinem Divisor multiplicirt, giebt jedesmal den Dividenden;

2) ein Produkt durch einen der beiden Faktoren dividirt, giebt allemal den andern Faktor. (Vergl. Note zu §. 5.).

Anmerkung. Auch ist

$$\frac{a}{a}=1,$$

d. h. jeder Ausdruck, durch sich selber dividirt, giebt die Einheit.

§. 29. Zusatz.

Ist $a = b,$

so ist auch allemal $\frac{a}{m}=\frac{b}{m}$

und $\frac{m}{a}=\frac{m}{b};$

d. h. Gleiches durch Gleiches dividirt, giebt Gleiches.

Anmerkung. In so ferne wir auch hier wieder, wie im (§. 12.) nicht sowohl Eigenschaften einzelner Zahlen, sondern vielmehr das Verhalten der Operationen zu einander (wie sie sich gegenseitig aufheben und vernichten, aber auch wie sie sich einander ersetzen in verschiedener Folge) kennen lernen wollen, so würden wir hier wieder das Recht haben, unsre Produkte und Quotienten ganz allgemein aufzufassen, wie dies (§. 12. und §. 13.) in Bezug auf die Summen und Differenzen geschehen ist. Wenn wir aber dort nur darauf sehen durften, daß wir nicht mit den (ganzen) Zahlen in Widerspruch gerathen, weil wir dort ausser den (ganzen) Zahlen noch nichts anders früher gehabt hatten, so hat uns eben jene Verallgemeinerung der Summe und der Differenz doch zur Null und zur subtraktiven (ganzen) Zahl geführt, welche besonderen Zahlen-Ausdrücke wir alle zusammenfassen in der Differenz zweier (ganzen) Zahlen.

Bei einer ähnlichen Verallgemeinerung der Produkte und Quotienten, wie sie (§. 12.) für die Summen und Differenzen statt gefunden hat, muß man demnach vorher zeigen, daß man mit dem früheren d. h. mit den Differenzen zweier (ganzen) Zahlen nicht in Widerspruch gerathen werde. — Deshalb muß man folgenden Gang gehen:

1) Das Produkt ma heiße ein ganzes Produkt, so oft m eine (ganze) Zahl, a aber ganz willkührlich gedacht ist, und stelle die Summe

a+a+a+a+.... von m Summanden vor. — Für diese ganzen

Produkte erweise man nochmals die Gültigkeit der Formeln (§. 26.), so weit sie einen bestimmten Sinn haben, so wie die Formel

$$(\mu \pm \nu)a = \mu a \pm \nu a,$$

was eben so wie (§. 26.) geschehen ist, durchgeführt wird.

2) Das Produkt ma heiße ein Differenz-Produkt, so oft m einer Differenz zweier (ganzen) Zahlen $\mu - \nu$ gleich ist (also eine ganze Zahl, oder Null, oder eine subtraktive ganze Zahl ist) und stelle die Differenz $\mu a - \nu a$ vor, während μa und νa ganze Produkte sind und die Bedeutung der (n. 1.) haben. — Für diese Differenz-Produkte erweise man die Formeln des (§. 26.) nochmals, damit jene Formeln angewandt werden können, so oft alle Buchstaben Differenzen zweier (ganzen) Zahlen sind.

3) Den Quotienten $\frac{a}{b}$ oder $a : b$ nenne man einen Differenz-Quotienten, so oft a und b Differenzen zweier (ganzen) Zahlen (d. h. ganze Zahlen oder 0 oder subtraktive (ganze) Zahlen) sind, und man bezeichne damit diejenige Differenz ganzer Zahlen, welche mit b (nach n. 2.) multiplicirt, den Dividenden a wieder giebt. — Es wird (wie bei jeder Definition) untersucht, ob dieser Differenz-Quotient, wenn er eine Bedeutung hat, nicht mehre verschiedene Bedeutungen zugleich haben könne, und da findet man, daß dies allerdings der Fall ist, so oft a und b zugleich Null sind, weil jede Differenz ganzer Zahlen mit Null multiplicirt, nach (n. 2.) auch wieder Null giebt. — Daraus wird gefolgert, daß man nie durch Null dividiren soll, und daß, wenn man durch m dividirt, man voraussetzt, daß solches m nicht Null sey. *) Dann gelten auch die (§. §. 25. 28. 29.) für diese Differenz-Produkte und für diese Differenz-Quotienten ohne weitere Ausnahme. — Man erhält demnach auf diesem Wege von nachstehendem Satze die Ueberzeugung:

„Es finden alle bisher aufgestellten Sätze der Multi-
„plikation und der Division statt, wenn man sich auch unter
„den einzelnen Buchstaben lauter Differenzen zweier (ganzen)
„Zahlen denkt, wenn man nur nie durch Null dividirt."

Note. Es ist übrigens dieser Gang hier nur angedeutet. Wer solchen in

---

*) Diese Bemerkung ist in der höhern Mathematik von ungemein wichtigen Einfluß, daher sie selbst hier wohl zu beherzigen. — A posteriori könnte man dies so anschaulich machen: Es ist $0.7 = 0$ und $0.3 = 0$, also $0.7 = 0.3$, und wenn man durch 0 auf beiden Seiten dividiren dürfte auch

$$\frac{0.7}{0} = \frac{0.3}{0} \quad \text{oder} \quad 7 = 3.$$

seiner wissenschaftlichen Strenge kennen lernen will, hat das „Lehrbuch der Arithmetik, Algebra und Analysis" Berlin 1822 nachzulesen, Kap. (I — IV.), welches allemal empfohlen werden muß, so oft eine größere Strenge und Wissenschaftlichkeit gewünscht werden sollte.

§. 30. Erklärung.

Da wir auch hier wieder die Absicht haben, weniger die Eigenschaften einzelner Zahlen kennen zu lernen, als vielmehr zu untersuchen, wie sich die beiden neuen Operationen (die Multiplikation und die Division) sowohl unter sich, als auch zu den beiden erstern, nehmlich zur Addition und zur Subtraktion verhalten, so werden wir uns auch hier wieder weniger um die Bedeutung der einzelnen Buchstaben, als vielmehr um die Form der Ausdrücke d. h. um die durch diese Form angezeigten Operationen bekümmern.

Wir denken uns daher auch hier wieder unter ab, a . b oder $a \times b$ eine angezeigte Multiplikation, so wie unter $\frac{a}{b}$ oder $a : b$ eine angezeigte Division, denken uns also noch immer unter $\frac{a}{b}$ oder $a : b$ einen Ausdruck, der mit b multiplicirt, a giebt, so daß noch immer

$$b \cdot \frac{a}{b} = a$$

genommen wird. — Fassen wir nun überhaupt alle Gleichungen, welche wir den vorhergehenden Sätzen zufolge unter der Voraussetzung ableiten, daß man überall Differenzen zweier (ganzen) Zahlen habe, ganz allgemein auf, so daß wir uns um die Bedeutung der einzelnen Buchstaben nicht mehr bekümmern, so sind zwei Fälle möglich: 1) entweder man hat in der That überall Differenzen zweier (ganzen) Zahlen, und dann sind die Resultate alle richtig; oder 2) man hat nicht überall, oder nirgends Differenzen zweier (ganzen) Zahlen, so hat man wenigstens nichts unrichtiges d. h. nichts, was irgend einem früher vorhandenen widersprechen könnte.

Die so gedachten Produkte und Quotienten heißen nun allgemeine Produkte und allgemeine Quotienten.

§. 31. Zusatz.

Die Sätze (§. 28.), dann (§. §. 25 und §. 29.), nehmlich: Gleiches mit Gleichem multiplicirt, oder Gleiches durch Gleiches dividirt, giebt Gleiches; dann die Sätze (§. 26.), welche lehren, wie man Summen und Differenzen und Produkte multiplicirt, und wie man Produkte, die einen gemeinschaftlichen Faktor haben, addirt oder subtrahirt; — überhaupt alles was für (ganze) Zahlen und daher auch nach (Anmerkung §. 29.) für Differenzen zweier (ganzen) Zahlen gilt, lassen wir hier also unbedingt noch gelten, wenn wir uns auch die Ausdrücke ganz allgemein denken. — Denn entweder man hat immer Differenzen zweier (ganzen) Zahlen; dann liefern sie richtige Resultate; oder man hat nicht immer, oder nie Differenzen zweier (ganzen) Zahlen, und dann liefern sie nichts unrichtiges, d. h. nichts was mit irgend einem früher vorhandenen im Widerspruche stehen könnte, in so ferne früher nur die Differenz zweier (ganzen) Zahlen [d. h. die (ganze) Zahl, die Null und die subtraktive (ganze) Zahl] vorhanden war. Und alle Gleichungen, die man erhält, sprechen bloß das Verhalten der 4 Operationen zu einander aus.

Note. Von einer ganz andern Seite kann man ähnliche Versuche statt finden lassen, die Begriffe des Produkts, und somit auch des Quotienten zu verallgemeinern. Indem man sich nehmlich unter den Buchstaben Größen denkt, erweitert man den Begriff des Produkts ma dahin, daß man sich diejenige Größe darunter denkt, die aus dem Multiplikanden a eben so hervorgeht, wie der Multiplikator m aus der Einheit. — Diese verallgemeinerte Definition schließt die frühere, wo m eine (ganze) Zahl ist, und wo a, m mal genommen wird, ebenfalls als einen besondern Fall in sich, und sie ist daher ebenfalls zu gebrauchen, wo es darauf ankommt, diese elementaren Begriffe anschaulich zu machen. Zum allgemeinen Produkt, wie wir solches in der That selbst schon in der Elementar-Algebra gebrauchen, führt letztere Ansicht jedoch nicht, sondern sie giebt bloß dem Produkt eine Bedeutung, so lange der Multiplikator einer Differenz, oder einem Quotienten zweier (ganzen) Zahlen gleich ist. (Auf die sogenannten imaginären Wurzeln angewandt, würde sie sogar ein von dem gewöhnlichen sehr verschiedenes

Resultat liefern.) Dagegen ist unsre obige Definition des Differenz-Produkts in letzterer Definition genau enthalten.

§. 32. Erklärung.

Einen allgemeinen Quotienten $\frac{a}{b}$ oder a : b dessen Dividend a und Divisor b (ganze) Zahlen sind, der aber nicht selbst eine (ganze) Zahl ist, nennt man insbesondere einen Bruch oder eine gebrochene Zahl, und dann a den Zähler und b den Nenner des Bruches. — Die Zahlen selbst nennt man, im Gegensatz mit diesen Brüchen, gewöhnlich ganze Zahlen.

Jeder Bruch oder jede gebrochene Zahl heißt ächt oder eigentlich, wenn der Zähler kleiner wie der Nenner, unächt oder uneigentlich, wenn der Zähler größer ist als sein Nenner.

Note. So sind z. B. $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{7}{8}$ u. s. w. gebrochene Zahlen oder Brüche. Dagegen sind $\frac{8}{4}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{12}{3}$, $\frac{-2}{3}$, $\frac{2}{-3}$, $\frac{-2}{-3}$, $\frac{-7}{2}$ zwar auch noch immer Quotienten, aber nicht solche, die man Brüche nennt. Und genau genommen kann man nach der obigen Definition selbst $\frac{2\frac{1}{2}}{4}$, $\frac{5\frac{7}{8}}{6}$, $\frac{5\frac{1}{2}}{2\frac{3}{4}}$, und dergl. nicht mehr zu den Brüchen zählen, obgleich sie noch immer Quotienten sind. Gewöhnlich nennt man letztere Gattung der Quotienten auch Bruchsbrüche.

Nimmt man eine etwas materiellere Ansicht zu Hilfe, so kann man sich auch diesen Begriff noch versinnlichen und veranschaulichen. Denkt man sich nehmlich unter Multipliciren ein mehrmal wiederholtes Nehmen (Addiren), und überall eine bereits bestimmte Einheit (eine Größe) und zwar eine beliebig theilbare Einheit, so wird nach obiger Definition der Bruch $\frac{1}{4}$ diejenige Größe seyn, welche mit 4 multiplicirt, d. h. 4 mal genommen, die Einheit giebt, weil der Quotient $\frac{a}{b}$ dasjenige ist, was mit b multiplicirt, a geben soll. Folglich kann man sich auch unter $\frac{1}{4}$ den vierten Theil der Einheit denken (eine beliebig theilbare Einheit vorausgesetzt). Eben so wird nach dieser letztern Ansicht, in Verbindung mit unserer Definition im Paragraphen, der Bruch $\frac{3}{4}$ als diejenige Größe angesehen werden müssen, welche mit 4 multiplicirt, d. h. 4 mal genommen, 3 (ganze) Einheiten giebt, also auch dieselbe Größe, die man erhält, wenn man den 4ten Theil der Einheit 3 mal nimmt. — Man kann also überhaupt, nach unserer Definition im Paragraphen, sobald man nur die letztere materielle Ansicht zu Hilfe nimmt, unter einem Bruche $\frac{a}{b}$ sich alle-

mal eine Größe denken, welche entsteht, wenn man den bten Theil der Einheit, a mal nimmt; welche Erklärung des Bruches gewöhnlich in der gemeinen Rechenkunst sowohl, als auch in den mathematischen Lehrbüchern gegeben sich findet.

So gut es für einen Anfänger aber seyn mag, sich diese Sachen alle, so wie wir hier in den Noten es versuchen, noch zu versinnlichen, so gut mag es auch seyn, wenn man immer mehr und mehr dahin arbeitet, diese Versinnlichungen und Veranschaulichungen entbehren zu können, weil sie nie zum Allgemeinen führen, und die Anschaulichkeit, welche so erhalten wird, im weitern Fortschreiten zuweilen große Unbequemlichkeit und Undeutlichkeit mit sich zu führen scheint, wie wir bereits in der Note zu (§. 14.) solches bemerklich gemacht haben, hier aber nicht weiter verfolgen wollen. — Halten wir uns also so viel wie möglich an die Ansicht, wie sie in den (§. §.) selbst hier gegeben wird.

§. 33. Zusatz.

Aus dieser Erklärung des Bruches (§. 32.) geht aber hervor, daß, was für alle Quotienten gilt, zu gleicher Zeit auch für diejenigen gelten müsse, welche man Brüche oder gebrochene Zahlen nennt. —

Anmerkung. Im praktischen Arbeiten braucht man deshalb Bruch und Quotient nicht so genau zu unterscheiden, daher auch nicht so genau Zähler und Dividend, Nenner und Divisor; und auch wir werden in der Folge, wo es mehr auf Praxis abgesehen ist, diesen Unterschied, wie er zwischen Bruch und Quotient nach (§. 32.) besteht, nur dann genau berücksichtigen, wenn es unumgänglich nothwendig zu seyn scheint.

§. 34. Lehrsätze.

Sind a, b und m ganz allgemeine Ausdrücke, so ist immer:

$$1)\quad \frac{a+b}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m};$$

und

$$2)\quad \frac{a-b}{m}=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}\ *).$$

Beweise. Man multiplicire $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}$ mit m, so erhält man nach (§. 26.):

$$m\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}\right)=m.\frac{a}{m}+m.\frac{b}{m},$$

*) Vergleiche die Note zu (§. 26.) unten, die Klammern betreffend.

oder nach (§. 28.):

$$m\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}\right)=a+b.$$

Dividirt man daher auf beiden Seiten wiederum durch m, so erhält man nach (§. 28. II.) und nach (§. 29.) sogleich die Gleichung (n. 1.). — Die Gleichung (n. 2.) wird aber auf dieselbe Weise erwiesen.

Anmerkung. Diese Gleichungen lehren wieder, wie ein Ausdruck in einen andern identischen verwandelt werden kann. Sie führen zu den praktischen Regeln:

1) „Eine Summe a+b oder eine Differenz a—b wird durch einen Aus„druck m dividirt, wenn man jedes einzelne Glied a und b durch m divi„dirt, und die Resultate addirt, oder subtrahirt.

2) „Zwei Quotienten (Brüche) $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{m}$, die einen gemein„schaftlichen Divisor (Nenner) haben, werden zu einander addirt oder von „einander subtrahirt, wenn man ihre Dividenden (Zähler) addirt oder sub„trahirt, ihren gemeinschaftlichen Nenner aber beibehält."

Note. $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$ giebt $\frac{5}{7}$; $\frac{5}{9}+\frac{4}{9}$ sind $\frac{9}{9}$ oder 1; eben so $\frac{3}{8}$ von $\frac{7}{8}$ bleiben $\frac{4}{8}$; $\frac{1}{6}$ von $\frac{6}{6}$ bleiben $\frac{5}{6}$; u. s. w. f.

Daß $\frac{5}{9}\pm\frac{2}{9}=\frac{5\pm2}{9}$, also allgemein, daß $\frac{a}{m}\pm\frac{b}{m}=\frac{a\pm b}{m}$ ist, kann man nach der materiellern Ansicht, sehr leicht anschaulich machen. Der Bruch $\frac{5}{9}$ enthält 5 solche Neuntheil der Einheit, und der Bruch $\frac{2}{9}$, zwei solche Theile. Nimmt man also beide Brüche zusammen, so bekommt man nothwendig 5 und 2 d. h. 7 solche Theile, d. h. $\frac{7}{9}$. Subtrahirt man aber den Einen von dem Andern, d. h. nimmt man die 2 Theile von den 7 Theilen weg, so bleiben noch 5 derselben Theile d. h. $\frac{5}{9}$.

§. 35. Lehrsätze.

Sind abermals a, b und m beliebige Ausdrücke, so wird man ebenfalls allemal haben:

$$3)\quad m\cdot\frac{a}{b}=\frac{ma}{b}$$

$$4)\quad \text{auch}=\frac{a}{b:m}$$

$$5)\quad \text{auch}=a\cdot\frac{m}{b}.$$

Beweise. Denn man multiplicire $m.\frac{a}{b}$ mit b, so erhält man nach (§. 26. n. 4.):

$$b.\left(m.\frac{a}{b}\right) = m.\left(b.\frac{a}{b}\right)$$

oder nach (§. 28.), weil $b.\frac{a}{b} = a$,

$$b.\left(m.\frac{a}{b}\right) = m.a.$$

Dividirt man daher auf beiden Seiten durch b, so erhält man augenblicklich die Gleichung (3.) nach (§. 28. II. und §. 29.).

Eben so multiplicire man $m.\frac{a}{b}$ mit $b:m$ oder $\frac{b}{m}$, so erhält man:

$$\frac{b}{m}\left(m.\frac{a}{b}\right) = \frac{b}{m}.m.\frac{a}{b} = b.\frac{a}{b} = a;$$

folglich, wenn man auf beiden Seiten durch $\frac{b}{m}$ wieder dividirt, ergiebt sich (n. 4.).

Die Gleichung (n. 5.) folgt unmittelbar aus (n. 3.).

Anmerkung. Diese Lehrsätze dienen aber wiederum dazu, einen gegebenen Ausdruck in einen andern identischen zu verwandeln. Namentlich führen sie zu folgenden praktischen Regeln:

1) „Ein Quotient (Bruch) $\frac{a}{b}$ wird mit einem Ausdruck m multi„plicirt; I) wenn man den Dividenden (Zähler) a multiplicirt, den Di„visor (Nenner) b dagegen als solchen unverändert beibehält; II) wenn „man den Divisor (Nenner) b durch diesen Ausdruck m dividirt, und den „Dividenden (Zähler) a als solchen unverändert beibehält; endlich III) wenn „man zuerst den Ausdruck m durch den Divisor (Nenner) b dividirt, und „was herauskommt noch mit dem Zähler a multiplicirt."

2) I. Ein Produkt ma wird durch einen Ausdruck b dividirt, wenn man nur den einen Faktor a allein dividirt, den andern Faktor m dagegen als solchen unverändert beibehält.

II. Ein Ausdruck a wird durch einen Quotienten (Bruch) $b:m$ oder $\frac{b}{m}$.

dividirt, wenn man diesen Ausdruck a durch den Dividenden (Zähler) b dividirt, und dann mit dem Nenner m noch multiplicirt; oder zuerst mit m multiplicirt und dann noch durch b dividirt.

Note. Denkt man sich unter den Quotienten bloß Brüche, so läßt sich nach der materiellern Ansicht jeder dieser Lehrsätze auch noch wie folgt anschaulich machen. — Soll nehmlich 1) der Bruch $\frac{3}{4}$ mit 5 multiplicirt, d. h. 5 mal genommen werden, so sollen die 3 Theile, welche Viertheil der Einheit sind, 5 mal genommen werden, und man erhält also 5 mal 3 solche Theile d. h. $\frac{5.3}{4}$ oder $\frac{15}{4}$. — Wollte man aber $\frac{5}{8}$ mit 4 multipliciren, so könnte man zwar auch wiederum $\frac{20}{8}$ erhalten; allein man erhält offenbar nicht bloß dadurch das 4fache von $\frac{5}{8}$ daß man die 5 Theile, welche Achtel sind, 4 mal nimmt, sondern auch dadurch, daß man von jedem der 5 Theile das 4fache nimmt. Denkt man sich nun die Einheit in 8 Theile getheilt, so könnte man sie erst in 2 Theile theilen, und jeden dieser beiden Theile noch in 4 Theile. Das 4fache eines Achttheils ist also ein Halbes, und das 4fache von den 5 Achttheilen, beträgt also 5 Halbe, d. h. $4 : \frac{5}{8} = \frac{5}{2}$, wo das 2 im Nenner entsteht, wenn man 8 durch 4 dividirt. — Soll 3) die Zahl 6 durch $\frac{3}{4}$ dividirt werden, so soll sie nicht durch 3 sondern nur durch den 4ten Theil von 3 dividirt werden. Der 4te Theil von 3 ist aber in 6 offenbar 4 mal so oft enthalten, als 3 selbst. Dividirt man also 6 zuerst durch 3, so muß was herauskommt, nachher noch 4 mal genommen, d. h. mit 4 multiplicirt werden, wenn man bloß durch $\frac{3}{4}$ dividirt haben will; dies giebt also $4.\frac{6}{3}$ oder 4.2 oder 8, so daß $\frac{3}{4}$ in 6 gerade 8 mal enthalten ist, oder 8 die Zahl ist, welche mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt werden muß (d. h. welche anzeigt, wie oft mal $\frac{3}{4}$ genommen werden muß) um gerade die Zahl 6 zu geben.

§. 36. Lehrsätze.

Ferner ist:

$$6) \quad \frac{a}{b} : m = \frac{a : m}{b}$$

$$7) \quad \text{auch} = \frac{a}{bm}.$$

Beweis. Denn man multiplicire den Ausdruck rechts in (6.) nehmlich $\frac{a : m}{b}$ mit m nach der Regel (1. I. Anmerkung §. 35.), indem man den Zähler $a : m$ multiplicirt (giebt a) und den Nenner b unverändert läßt; so wird man haben

$$m . \frac{a : m}{b} = \frac{a}{b}.$$

Dividirt man daher auf beiden Seiten durch m wieder weg, so erhält man die Gleichung (6.).

Ferner multiplicire man den Ausdruck rechts in (7.) nehmlich $\frac{a}{bm}$ mit m, nach der Regel (1. II. Anmerkung §. 35.), indem man den Nenner bm durch m dividirt (giebt b) und den Zähler a unverändert läßt, so daß man erhält:

$$m \cdot \frac{a}{bm} = \frac{a}{b}.$$

Dividirt man nun wiederum auf beiden Seiten durch m, so erhält man die Gleichung (7.).

Anmerkung. Diese Lehrsätze enthalten aber folgende praktische Regeln:

1) „Ein Bruch $\frac{a}{b}$ wird durch einen Ausdruck m dividirt, I) wenn „man den Zähler a dividirt, den Nenner b aber unverändert beibehält; „oder II) wenn man den Nenner b mit diesem Ausdruck m multiplicirt, „und den Zähler a unverändert als solchen beibehält.

2) „Ein Ausdruck a wird durch ein Produkt bm dividirt, wenn man „zuerst durch einen der Faktoren dividirt, und was herauskommt, noch durch „den Andern."

Note. Will man sich diese Lehrsätze oder vielmehr diese Formeln (Gleichungen) (6. 7.) noch versinnlichen, so sey zuerst der Bruch $\frac{6}{7}$ durch 3 zu dividiren, d. h. von 6 solchen Theilen, die man Siebentheil nennt, der dritte Theil zu nehmen, und man wird offenbar dann 2 solche Siebentheil erhalten, d. h. $\frac{6:3}{7}$ oder $\frac{2}{7}$. — Man kann aber auch von jedem einzelnen Siebentheil den dritten Theil nehmen. Theilt man aber jedes Siebentheil noch in 3 Theile, so wird das Ganze (die Einheit) dadurch in 7 . 3 d. h. in 21 Theile getheilt, und ein solches Einundzwanzigtheilchen ist daher der dritte Theil von einem Siebentheilchen. Also wird $\frac{6}{7}$ durch 3 dividirt, wiederum 6, aber Einundzwanzigtheilchen d. h. $\frac{6}{21}$ geben.

§. 37. Lehrsatz.

Auch ist

$$8) \quad a : \frac{b}{m} = a \cdot \frac{m}{b}$$

d. h. statt durch einen Bruch $\frac{b}{m}$ zu dividiren, kehre man den Bruch $\frac{b}{m}$ in $\frac{m}{b}$ um, und multiplicire damit. —

Beweis. Denn man hat:

$$\frac{b}{m}\left(a \cdot \frac{m}{b}\right) = \frac{b}{m} \cdot \frac{m}{b} \cdot a = \frac{\frac{b}{m} \cdot m}{b} \cdot a = \frac{b}{b} \cdot a = \frac{ba}{b} = a;$$

folglich, wenn man auf beiden Seiten durch $\frac{b}{m}$ wiederum dividirt

$$a \cdot \frac{m}{b} = a : \frac{b}{m}.$$

§. 38. Lehrsätze.

Auch ergiebt sich

$$9) \quad \frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$$

$$10) \text{ und } = \frac{a : m}{b : m};$$

d. h. ein Bruch bleibt unverändert am Werth, wenn man Zähler und Nenner, durch irgend einen und denselben Ausdruck m, zugleich multiplicirt, oder beide zugleich durch einen solchen Ausdruck m dividirt.

Beweis. Denn man hat:

$$bm \cdot \frac{a}{b} = m \cdot b \cdot \frac{a}{b} = am,$$

und

$$\frac{b}{m} \cdot \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{b} \cdot b}{m} = a : m;$$

folglich, wenn man auf beiden Seiten, die erste dieser Gleichungen durch bm, die andere durch $\frac{b}{m}$ dividirt, ergeben sich die obigen Gleichungen.

Anmerkung. Dieselben Sätze lehren auch noch: 1) daß man aus einem Quotienten $\frac{am}{bm}$ den gemeinschaftlichen Faktor m im Zähler und

im Nenner zugleich weglassen darf; 2) daß zwei Brüche $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{m}$ durch einander dividirt werden, wenn man ihre Zähler a und b allein durch einander dividirt, sobald sie nehmlich einerlei Nenner haben.

Wenn man Zähler und Nenner durch einen und denselben Ausdruck dividirt, so nennt man dies auch das Aufheben der Brüche.

Note. Um sich die Formel (9.) zu versinnlichen, denke man sich zuerst den Bruch $\frac{3}{4}$, welcher die Größe ausdrückt, die entsteht, wenn man die Einheit in 4 gleiche Theile theilt und dann 3 solcher Theile nimmt. — Theilt man aber die Einheit in 4 . 5 d. h. in 20 gleiche Theile, so muß man jeden vierten Theil noch in 5 Theile theilen. Wenn aber jeder vierte Theil, 5 solche Zwanzigtheilchen enthält, so werden die 3 Viertheile, 3 mal 5 d. h. 15 solche Zwanzigtheile enthalten. Also wird $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$ seyn, während $\frac{15}{20}$ aus $\frac{3}{4}$ hervorgeht, wenn man Zähler und Nenner des letztern Bruches mit 5 multiplicirt. — Umgekehrt ist dann auch $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$, während der letztere Bruch aus dem erstern hervorgeht, wenn man Zähler und Nenner desselben durch eine und dieselbe Zahl 5 dividirt.

§. 39. Lehrsätze.

Ferner läßt sich noch aufstellen:

$$11)\quad a + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$$

$$12)\quad a - \frac{b}{c} = \frac{ac-b}{c}$$

$$13)\quad \frac{b}{c} - a = \frac{b-ac}{c}.$$

Beweise. Man multiplicire die 3 Ausdrücke links mit c nach (§. 26. n. 1. und n. 2.), so erhält man:

$$c.\left(a+\frac{b}{c}\right) = ac+b,$$

$$c.\left(a-\frac{b}{c}\right) = ac-b,$$

$$c.\left(\frac{b}{c}-a\right) = b-ac.$$

Dividirt man nun diese 3 Gleichungen auf beiden Seiten wiederum durch c, so ergeben sich die Gleichungen (11. 12. 13.).

Anmerkung. Diese Gleichungen lehren aber, daß wenn man einen einzelnen Ausdruck a mit einem Bruche $\frac{b}{c}$ durch Addition oder durch Sub-

traktion verbinden soll, man diesen Ausdruck a vor allen Dingen mit dem Nenner c des Bruches multipliciren und dieses Produkt nun mit dem Zähler b allein durch die angezeigte Addition oder Subtraktion verbinden müsse, während der Nenner c unverändert als Nenner beibehalten wird.

Note. Zur Versinnlichung denke man sich $6+\frac{2}{3}$ (was man in der gemeinen Rechenkunst auch bloß $6\frac{2}{3}$ schreibt), so sollen also 6 ganze Einheiten und 2 Drittheil zusammen genommen werden. Weil aber jede Einheit 3 Drittheile hat, so haben die 6 Einheiten 6 . 3 oder 18 Drittheile, und nun noch die 2 Drittheile dazu genommen, giebt 20 Drittheile oder $\frac{20}{3}$, wie nach unsrer obigen Formel (11.). — Die Anwendung dieser Lehrsätze nennt man gewöhnlich in der Rechenkunst „die Ganzen unter den Bruch bringen."

§. 40. Zusatz.

Daran schließen sich aber die Formeln:

$$14)\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$15)\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd},$$

von deren Richtigkeit man sich ebenfalls überzeugt, wenn man die Ausdrücke links mit bd nach (§. 26. n. 1. und n. 2.) multiplicirt, und nachher auf beiden Seiten wiederum durch bd weg dividirt.

Anmerkung. Es lehren aber diese Formeln, wie man zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$, wenn sie verschiedene Nenner haben, zu einander addirt, und von einander subtrahirt. — Man multiplicirt nehmlich über das Kreuz, und addirt oder subtrahirt diese Produkte ad, bc, indem man das Produkt der Nenner bd zum neuen Nenner nimmt.

Note. Es giebt also $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ addirt das Resultat $\frac{2.4+3.3}{3.4}$ d. h. $\frac{17}{12}$; und man kann dies noch so anschaulich machen: Der Bruch $\frac{2}{3}$ ist einerlei mit $\frac{8}{12}$ und der Bruch $\frac{3}{4}$ einerlei mit $\frac{9}{12}$; folglich geben beide Brüche, wenn man sie addirt nach (§. 34. Anmerkung. Regel 2.) $\frac{17}{12}$. — Eben so erhält man $\frac{1}{12}$, wenn $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ subtrahirt werden soll, d. h. $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$.

§. 41. Lehrsatz.

Endlich stellen wir noch auf:

16) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

17) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a:c}{b:d}$.

(auch $= \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ nach §. 37. n. 8.).

Beweise. Denn multiplicirt man den Ausdruck links in (n. 16.) nehmlich $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ mit bd, so erhält man:

$$bd \cdot \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) = b \cdot \frac{a}{b} \times d \cdot \frac{c}{d} = a \cdot c;$$

folglich, wenn man wiederum auf beiden Seiten durch bd dividirt:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Ferner multiplicire man den Ausdruck rechts (n. 17.) nehmlich $\frac{a:c}{b:d}$ mit $\frac{c}{d}$, so erhält man nach (n. 16.):

$$\frac{c}{d} \cdot \frac{a:c}{b:d} = \frac{c(a:c)}{d(b:d)} = \frac{a}{b};$$

folglich wenn man auf beiden Seiten durch $\frac{c}{d}$ dividirt:

$$\frac{a:c}{b:d} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}.$$

Anmerkung. Es lehret aber (n. 16.):

1) „Zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ werden mit einander multiplicirt, wenn „man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt, und erste„res Resultat durch letzteres dividirt.

2) „Zwei Produkte ac und bd werden durch einander dividirt, wenn „man den ersten Faktor a durch den ersten b, und den zweiten Faktor c „durch den zweiten d dividirt, und die Resultate dann mit einander mul„tiplicirt."

Dagegen lehrt (n. 17.):

„Zwei Brüche werden durch einander dividirt, wenn man Zähler durch „Zähler, und Nenner durch Nenner dividirt (oder nach (§. 37.) wenn man

„den Divisor $\frac{c}{d}$ umkehrt, und mit diesem durch Umkehrung erhaltenen „$\frac{d}{c}$ multiplicirt)."

Note. Man kann sich diese Formeln auch noch auf die von uns bisher in den Noten bemerklich gemachte Art versinnlichen. — Soll nehmlich $\frac{2}{3}$ mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt werden, so soll man dieses $\frac{2}{3}$ nicht 3 mal nehmen, sondern nur den 4ten Theil von 3 mal nehmen. Nimmt man daher $\frac{2}{3}$, 3 mal, wodurch man $\frac{6}{3}$ erhält, so muß man hievon noch den 4ten Theil nehmen, um $\frac{2}{3}$ gerade $\frac{3}{4}$ mal genommen zu haben. Der 4te Theil von $\frac{6}{3}$ wird aber genommen, wenn man von jedem Drittheil den 4ten Theil nimmt, d. h. wenn man statt der Drittheile, Zwölftheile nimmt, und so erhält man, wie nach unsrer Formel (n. 16.) $\frac{6}{12}$ zum Resultat. — Oder auch so: $\frac{2}{3}$ mit $\frac{3}{4}$ multipliciren heißt, man soll das Produkt aus $\frac{2}{3}$ eben so erzeugen, wie $\frac{3}{4}$ aus der Einheit erzeugt ist. Nun entsteht aber $\frac{3}{4}$ aus der Einheit, wenn man die Einheit in 4 Theile theilt, und 3 solche Theile nimmt; also muß auch $\frac{2}{3}$ in 4 Theile getheilt werden, giebt $\frac{2}{12}$, und dann ein solcher Theil 3 mal genommen, wodurch man wiederum $\frac{6}{12}$ erhält.

Ferner sey $\frac{2}{3}$ durch $\frac{3}{4}$ zu dividiren, so verwandle man $\frac{2}{3}$ in $\frac{8}{12}$ und $\frac{3}{4}$ in $\frac{9}{12}$, und dividire nun $\frac{8}{12}$ durch $\frac{9}{12}$, welches dadurch geschieht daß man bloß 8 durch 9 dividirt, so daß man $\frac{8}{9}$ erhält, gerade wie nach unsrer Formel (n. 17.); denn nach dieser Formel hat man:

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9}.$$

Soll endlich $\frac{15}{16}$ durch $\frac{3}{2}$ dividirt werden, so giebt es deshalb $\frac{5}{8}$, weil, wenn man $\frac{5}{8}$ mit $\frac{3}{2}$ wiederum multiplicirt, auch wieder Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt werden muß, und dann wieder $\frac{15}{16}$ sich ergiebt.

Anmerkung. Uebersieht man die Beweise der (§. §. 34 — 41.) so findet man abermals, daß sie alle gleichmäßig dadurch gefunden werden, daß man die zu erweisenden Gleichungen betrachtet, und untersucht, welcher der beiden gleich sein sollenden Ausdrücke ein Quotient ist. Da nehmlich dieser Quotient allemal die Zahl bezeichnet, welche mit dem Divisor multiplicirt, den Dividenden giebt, so darf man nur den Ausdruck auf der andern Seite mit demselben Divisor multipliciren. Kommt dann derselbe Dividend als Resultat der Multiplikation, so ist die Gleichung nothwendig richtig, weil dann nothwendig beide Ausdrücke links und rechts einerlei bedeuten. — So sind die genannten Beweise alle gefunden worden, und man hat ihnen hier nur diejenige Form gegeben, wie sie am bequemsten vorgetragen werden können.

§. 42. Zusatz.

Weil eine Summe von mehr Summanden auch als eine Summe von zwei Summanden angesehen werden kann, deren Summanden nur selbst wieder Summen sind; weil

eben so ein Produkt mehrer Faktoren als ein Produkt von zwei Faktoren zu betrachten ist, dessen Faktoren nur selbst wieder Produkte seyn können, so werden von den vorstehenden Sätzen, diejenigen welche sich auf Summen und Produkte beziehen, augenblicklich für den Fall ausgedehnt werden können, daß die Summen mehre Summanden und die Produkte mehre Faktoren haben. — Namentlich wird man leicht finden, z. B.

1) $m(a+b+c+d)=ma+mb+mc+md$ (§. 26. n. 1.)

2) $\frac{a+b+c+d+f}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}+\frac{d}{m}+\frac{f}{m}$ (§. 34. n. 1.)

3) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}+\frac{g}{h}=\frac{adfh+bcfh+bdeh+bdfg}{bdfh}$ (§. 40.)

4) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\cdot\frac{g}{h}=\frac{aceg}{bdfh}$ (§. 41. n. 16.)

5) $\frac{abdpqst}{cdpsgh}=\frac{abqt}{cgh}$ (§. 38. n. 9.).

§. 43. Zusatz.

In so ferne aber diese Sätze (§. §. 5 — 11.) und (§. §. 34 — 42.) lehren, wie man Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten und einen beliebigen (als einfach angesehenen) Ausdruck addirt, subtrahirt, multiplicirt und dividirt, so werden sie sich unmittelbar auch auf die Null, auf die additiven und subtraktiven Ausdrücke, so wie auch auf die algebraischen Summen anwenden lassen, weil alle diese letztgenannten Ausdrücke nichts anders sind oder doch nichts anders vorstellen, als Summen und Differenzen. — So findet man zunächst für Null und für die subtraktiven Ausdrücke:

12) $0\cdot a=a\cdot 0=0$; *)

13) $\frac{0}{a}=0$;

---

*) In den (§. §. 15 und 16.) stehen die hieher gehörigen ersten 11 Nummern.

14) $(-b) \cdot a = a \cdot (-b) = -ab$;

15) $(-b) \cdot (-a) = (-a) \cdot (-b) = +ab = ab$;

16) $\frac{-b}{a} = -\frac{b}{a}$;

17) $\frac{b}{-a} = -\frac{b}{a}$;

und

18) $\frac{-b}{-a} = +\frac{b}{a} = \frac{b}{a}$.

Es ist nehmlich 0 (Null) nichts anders als p—p, also 0 . a nichts anders als (p—p) . a und dieses nach (§. 26. n. 2.) =pa—pa, welches wiederum nichts anders als Null ist. — Eben so:

$\frac{0}{a} = \frac{p-p}{a} = \frac{p}{a} - \frac{p}{a} = 0$ nach (§. 34. n. 2.).

Ferner ist —b nichts weiter als 0—b; soll daher diese Differenz 0—b mit a multiplicirt werden, so geschieht dies nach (§. 26. n. 2.) und giebt 0 . a—b . a d. h. 0—ba oder —ba oder —ab.

Ist aber $(-b) \cdot a = -ab$, so kann man (—a) statt a setzen, und hat dann auch

$(-b) \cdot (-a) = -(-a) \cdot b$, und dabei $(-a) \cdot b = -ab$,

also auch $(-b) \cdot (-a) = -(-ab)$,

folglich nach (§. 15. n. 5.) $= +ab = ab$.

Für (n. 16.) bemerke man, daß —b oder 0—b als Differenz durch a dividirt wird nach (§. 34. n. 2.) und $\frac{0}{a} - \frac{b}{a}$ giebt, während $\frac{0}{a} = 0$ ist, so daß $0 - \frac{b}{a}$ oder $-\frac{b}{a}$ herauskommt.

Um die Formeln (n. 17. und n. 18.) zu erweisen, multiplicire man die Ausdrücke rechts mit (—a) und erhält dann, nach (n. 15.) und (n. 14.):

$$(-a) \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) = a \cdot \frac{b}{a} = b;$$

$$(-a) \cdot \frac{b}{a} = -\left(a \cdot \frac{b}{a}\right) = -b;$$

folglich, wenn man auf beiden Seiten durch —a wegdividirt,

$$-\frac{b}{a} = \frac{b}{-a}$$

und

$$\frac{b}{a} = \frac{-b}{-a}.$$

Anmerkung. In so ferne jeder Ausdruck a durch den additiven Ausdruck +a ersetzt werden kann, so daß a als ein (+) Zeichen vor sich habend angesehen werden darf, enthalten die Nummern (3 — 7.) folgende praktische Regel:

„Additive und subtraktive Ausdrücke werden mit einander multiplicirt „und durch einander dividirt, wenn man bloß ihre Glieder (§. 14.) mul„tiplicirt oder dividirt, und dem Resultat das + oder — Zeichen vorsetzt, „je nachdem die beiden Faktoren oder Dividend und Divisor einerlei oder „verschiedene + oder — Zeichen vorstehend haben." — Eine Regel, die man gewöhnlich noch kürzer und im Lapidarstyl so ausspricht: „Gleiche + „oder — Zeichen mit einander multiplicirt oder durch einander dividirt, „geben (+); ungleiche dagegen —(minus)."

Note. Sehen wir zu, wie sich dieselben Resultate nach der materiellern Ansicht versinnlichen und veranschaulichen lassen. — Erstlich: 0 mal a heißt, man soll a gar nicht nehmen, weil 0 Nichts ist, und man erhält also dann auch Nichts oder 0; so daß also $0 . a = 0$ seyn muß. — Durch a dividiren heißt nichts weiter als durch a theilen, d. h. in a gleiche Theile theilen, (weil die Größe gesucht wird, die a mal genommen den Dividenden wieder giebt). Dividirt man also 0 oder Nichts durch a, d. h. theilt man Nichts in a gleiche Theile, so erhält man ebenfalls Nichts oder Null. Oder auch: 0 durch a dividirt muß 0 geben, weil letzteres 0 mit a multiplicirt, wieder das erste Null giebt. — Denkt man sich unter —b etwa 24 Rthlr. Schulden, und soll nun dieses durch a z. B. durch 4 dividirt werden, so sucht man die Größe die 4 mal genommen, die 24 Rthlr. Schulden wiederum hervorbringt, und diese Größe besteht offenbar aus 6 Rthlr. Schulden; so daß also $\frac{-24}{4} = -6$ d. h. $\frac{-b}{a} = -\frac{b}{a}$ wird. — Daß $\frac{-24}{-4} = 6$ ist, sieht man deshalb ein, weil 6 mit —4 multiplicirt, wieder —24 giebt. — Auf diese letztere Weise erkennt man auch, daß $\frac{24}{-4} = -6$ seyn müsse, welche beiden letzten Beweise mit denen im Paragraphen selbst geführten übereinkommen.

§. 44. Zusatz.

Ferner ergiebt sich aus (§. 42. n. 1.), wenn man z. B. die Summe $a+b+c+d$ mit der Summe $p+q+r$ multipliciren soll, daß man jeden Summanden a, b, c, d, einzeln mit $p+q+r$ multipliciren müsse, während, wenn z. B. b mit $p+q+r$ multiplicirt werden soll, wiederum jeder Summand p, q, r einzeln mit b zu multipliciren ist, nach derselben Formel (§. 42. n. 1.). —

Es werden also zwei Summen a+b+c+d und p+q+r mit einander multiplicirt, wenn man jeden Summanden der einen Summe, mit jedem Summanden der andern Summe multiplicirt und zuletzt alle Produkte addirt. Und es ergiebt sich also:

$$(a+b+c+d).(p+q+r)=ap+bp+cp+dp+aq+bq+cq+dq+ar+br+cr+dr.$$

Weil ferner algebraische Summen nichts anders sind als gewöhnliche Summen, nur daß ihre Summanden lauter additive oder subtraktive Ausdrücke sein werden, so gilt derselbe Satz auch für algebraische Summen, nur daß die einzelnen Summanden, weil sie alle additive oder subtraktive Ausdrücke sind, nach der Regel des (§. 43.) mit einander multiplicirt werden, und die Addition der Resultate nach (§. 18.) durch bloßes Neben.einandersetzen der durch Multiplikation der Summanden entstehenden additiven und subtraktiven Ausdrücke verrichtet wird.

§. 45. Zusatz.

Die Regel, die sich hieraus für das Multipliciren der algebraischen Summen ergiebt, ist daher folgende:

„Zwei algebraische Summen werden mit einander multi„plicirt, wenn man jedes Glied der Einen, mit jedem Gliede „der Andern multiplicirt, den Produkten das (+) oder (—) „Zeichen vorsetzt, nach der Regel „daß gleiche Zeichen mit „einander multiplicirt (+), ungleiche dagegen (—) geben," „und die entstehenden additiven und subtraktiven Ausdrücke „bloß neben einander in beliebiger Ordnung hinschreibt."

So findet man z. B.

$$(-a+b-c+d).(-m+n-p)=$$
$$am-bm+cm-dm-an+bn-cn+dn+ap-bp+cp-dp$$

und $(-m).(-a+b-c)=+am-bm+cm$

und $m.(-a-b+c+d-f)=-am-bm+cm+dm-fm.$

Anmerkung 1. Dieser letztern Gleichung bedient man sich auch, um die algebraische Summe

$$-am-bm+cm+dm-fm,$$

deren Glieder alle den gemeinschaftlichen Faktor m haben, in ein Produkt zu verwandeln; indem man den gemeinschaftlichen Faktor m herausetzt, und die durch Weglassen dieses gemeinschaftlichen Faktors m übrig bleibende algebraische Summe $-a-b+c+d-f$ zum zweiten Faktor nimmt, so daß man $(-a-b+c+d-f).m$ erhält. — Dies geht auch dann noch an, wenn in der algebraischen Summe das m selbst als Glied vorkommt, weil man dafür das Produkt $1.m$ schreiben kann. So kann man statt $ax+x$ setzen $(a+1).x$

statt $ax-x$ setzen $(a-1).x$,

statt $-ax-bx+x+cx-dx$ setzen $(-a-b+1+c-d).x$,

u. s. w. f.

Anmerkung 2. Auch ergiebt sich daraus leicht umgekehrt:

$$\frac{a-b+c+d-e-f}{m}=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}+\frac{c}{m}+\frac{d}{m}-\frac{e}{m}-\frac{f}{m},$$

und

$$\frac{-a-b+c-d+e+f}{m}=-\frac{a}{m}-\frac{b}{m}+\frac{c}{m}-\frac{d}{m}+\frac{e}{m}+\frac{f}{m},$$

u. s. w. f.

§. 46. Lehrsatz.

Welche Ausdrücke durch A, B und x auch immer vorgestellt sein mögen, so ist doch allemal:

$$18)\quad \frac{A}{B}=x+\frac{A-Bx}{B}.$$

Beweis. Denn man multiplicire den Ausdruck rechts, nehmlich $x+\frac{A-Bx}{B}$ mit B, so erhält man nach (§. 26. n. 1.):

$$B.\left(x+\frac{A-Bx}{B}\right)=Bx+B.\frac{A-Bx}{B}$$

oder nach (§. 28. I.) $=Bx+A-Bx,$

d. h. $B.\left(x+\frac{A-Bx}{B}\right)=A;$

folglich, wenn man auf beiden Seiten durch B wiederum weg dividirt:

$$x+\frac{A-Bx}{B}=\frac{A}{B}.$$

Anmerkung. Man bedient sich aber dieses Lehrsatzes, um einen beliebigen Quotienten, d. h. eine angezeigte Division $\frac{A}{B}$, in eine Summe von zwei Summanden zu verwandeln, deren erster Summand x ganz beliebig genommen werden kann, deren zweiter Summand $\frac{A-Bx}{B}$ dagegen, wie man sieht, gefunden wird, wenn man den ersten x mit dem Divisor B multiplicirt, das Produkt Bx von dem Dividenden A subtrahirt, und die Differenz (den Rest) A—Bx wiederum durch den Divisor B dividirt.

So ist z. B. nach diesem Lehrsatze und der daraus hervorgehenden Regel:

$$\frac{23}{6} = 1 + \frac{17}{6} = 2 + \frac{11}{6} = 3 + \frac{5}{6}.$$

Eben so findet sich nach diesem Lehrsatze:

$$\frac{1}{1+b} = 1 - \frac{b}{1+b};$$

und wieder $\frac{b}{1+b} = b - \frac{bb}{1+b}$; folglich

$$\frac{1}{1+b} = 1 - b + \frac{bb}{1+b};$$

und wieder $\frac{bb}{1+b} = bb - \frac{bbb}{1+b}$, also

$$\frac{1}{1+b} = 1 - b + bb - \frac{bbb}{1+b};$$

und abermals $\frac{bbb}{1+b} = bbb - \frac{bbbb}{1+b}$, folglich

$$\frac{1}{1+b} = 1 - b + bb - bbb + \frac{bbbb}{1+b};$$ u. s. w. f.

Gerade so findet man auf demselben Wege:

$$\frac{1}{1-b} = 1 + \frac{b}{1-b} = 1 + b + \frac{bb}{1-b}$$

$$= 1 + b + bb + \frac{bbb}{1-b}$$

$$= 1 + b + bb + bbb + \frac{bbbb}{1-b}$$

$$= 1 + b + bb + bbb + bbbb + \frac{bbbbb}{1-b};$$ u. s. w. f.

Da nehmlich der Lehrsatz für jeden Quotienten eine Summe von zwei Summanden liefert, deren zweiter Summand in der Regel selbst wieder ein Quotient ist, so wird derselbe Lehrsatz für diesen letztern Quotienten im-

mer wieder eine Summe von zwei Summanden liefern, u. s. f. entweder bis ins unendliche fort, oder doch so lange, bis der zweite Summand der letzten Umwandlung selbst nicht mehr Quotienten-Form hat.

§. 47. Zusatz.

Für das Dividiren zweier algebraischen Summen, deren eine durch A, die andere durch B vorgestellt sein mag, kann man hieraus die Regel ableiten:

1) Man dividire Ein Glied des Dividenden durch Ein Glied des Divisors, und was sich ergiebt, nehme man als ersten Summanden, d. h. als erstes Glied an (des in Summen-Form gesuchter Quotienten-Werthes).

2) Dazu finde man den zweiten Summanden nach dem Lehrsatze (§. 46.), indem man diesen ersten (dieses erste Glied) mit dem Divisor multiplicirt, das Produkt von dem Dividenden subtrahirt [und die Differenz (den Rest) dann wieder durch den Divisor dividirt].

3) Weil aber dieser letztere Quotient (diese angezeigte Division) dieselbe Form hat wie der gegebene, so wendet man sogleich denselben Lehrsatz auf ihn noch einmal an, um ihn abermals in eine Summe von zwei Summanden zu verwandeln. Zu dem Ende verrichtet man den Theil der (n. 2.), welcher in eckigen Klammern eingeschlossen ist, nicht, sondern betrachtet den Rest sogleich wieder als neuen Dividenden, der durch den Divisor B dividirt werden soll, nach demselben Lehrsatze.

4) So fortfahrend kann man sich nun immer neue und neue Glieder des Quotienten-Werthes bilden, und bei welchem Reste man aufhört, so muß er jedesmal durch den Divisor B dividirt werden; und der Quotient (die angezeigte Division) wird dann jedesmal als letzter Summand der gesuchten Summe hingeschrieben.

5) Wird aber einer der Reste Null, so wird auch dieser letzte Summand 0 und bleibt dann ganz weg.

6) Auf dieses letztere aber arbeitet man bei diesem Divi-

diren der algebraischen Summen gewöhnlich hin, und dies ist der Grund, warum man, obgleich es geschehen dürfte, nicht jeden beliebigen Ausdruck zum jedesmaligen ersten Summanden nimmt, sondern nur das, was sich ergiebt, wenn man ein Glied des Dividenden durch ein Glied des Divisors dividirt, weil man dann Hoffnung hat, immer einfachere und einfachere Reste zu erhalten, so daß einer zuletzt auch Null werden kann. Man wird daher bei der jedesmaligen Wahl der Glieder im Dividenden und Divisor, die durch einander dividirt, das neue Glied des Quotienten geben, ebenfalls darauf hinsehen müssen, und nicht gerade immer die ersten Glieder nehmen, wenn nicht absichtlich oder zufällig der Dividend und der Divisor vorher so geordnet worden sind, daß die ersten Glieder durch einander dividirt, den jedesmaligen Wünschen entsprechen.

Anmerkung. Im Praktischen nimmt sich eine Division zweier algebraischen Summen ohngefähr so aus:

Divisor	Dividend	Quotient
$-a+b$	$am-an+ap-bm+bn-bp$	$-m+n-p$

Divisor $\times -m = am-bm$

1ster Rest oder neuer Dividend $= -an+ap+bn-bp$

Divisor $\times n = -an+bn$

2ter Rest oder neuer Dividend $= ap-bp$

Divisor $\times -p = ap-bp$

3ter Rest oder neuer Dividend $= 0$ (Null).

Da nehmlich bei dem Multipliciren und Subtrahiren, algebraische Summen es sind, welche multiplicirt oder subtrahirt werden sollen, so müssen dabei jedesmal die Sätze (§. 45.) und (§. 20. II.) in Anwendung gebracht werden.

Noch ein anderes Beispiel in seiner praktischen Form: Sei nehmlich zu dividiren

$aaaaaa-bbbbbb$ durch $-a-b$.

Divisor	Dividend	Quotient
—a—b	aaaaaa—bbbbbb	—aaaaa+aaaab—aaabb
	aaaaaa+aaaaab	+aabbb—abbbb+bbbbb
1ster Rest =	—aaaaab—bbbbbb	
	—aaaaab—aaaabb	
2ter Rest =	aaaabb—bbbbbb	
	aaaabb+aaabbb	
3ter Rest =	—aaabbb—bbbbbb	
	—aaabbb—aabbbb	
4ter Rest =	aabbbb—bbbbbb	
	aabbbb+abbbbb	
5ter Rest =	—abbbbb—bbbbbb	
	—abbbbb—bbbbbb	
6ter Rest =	Null.	

Der Quotient ist also =

—aaaaa+aaaab—aaabb+aabbb—abbbb+bbbbb.

§. 48. Erklärung.

Jeden additiven Ausdruck +b nennt man einen positiven oder eine positive Zahl, wenn b eine ganze oder gebrochene Zahl ist; in demselben Falle heißt der subtraktive Ausdruck —b zugleich auch ein negativer, oder eine negative Zahl. — Die ganzen und gebrochenen Zahlen selbst heißen dann im Gegensatz dieser positiven und negativen Ausdrücke absolute (auch zuweilen abstrakte) Zahlen.

Note. Der Ausdruck —a ist ein subtraktiver Ausdruck und bleibt es, mag für a gesetzt werden, was man will; also ist auch $-(-\frac{2}{3})$ noch immer ein subtraktiver Ausdruck; dagegen ist $+\frac{2}{3}$ ein positiver und additiver zugleich, während $-(-\frac{2}{3})$ nur ein subtraktiver sein wird, aber kein negativer. — Daß $-(-\frac{2}{3})=+\frac{2}{3}$ ist, berechtigt uns so wenig dazu, den Ausdruck links $-(-\frac{2}{3})$ einen positiven, als dazu den Ausdruck rechts $+\frac{2}{3}$ einen subtraktiven Ausdruck zu nennen; eben so wie man nicht deshalb, weil

$$5+3=12-4$$

ist, den Ausdruck links 5+3 eine Differenz, oder den Ausdruck rechts 12—4 eine Summe nennen kann. (Vergl. d. Note zu §. 3.)

So ist auch allemal +b=0+b=b d. h. +b=b, daher die positive Zahl allemal der absoluten gleich. Doch mag es gut sein, den Unterschied zwischen der positiven Zahl +b, welche eine Summe aus 0 und b andeutet, und der absoluten Zahl b selbst zu beachten. Will man alle Verwirrung vermeiden, so muß man recht sorgfältig beachten, daß die Art, wie die Ausdrücke zusammengesetzt sind, allein für uns Interesse hat; daß diese Art der Zusammensetzung allemal die Form des Zeichens (des Ausdrucks) bestimmt, und daß also diese Form es ist, mit welcher wir es gewöhnlich zu thun haben. Daher

der Unterschied zwischen der Form $-(-\frac{2}{3})$ und der Form $+\frac{2}{3}$, den wir auch durch Verschiedenheit der Benennung beachten.

Weil aber, wie wir bereits in den Noten gesehen haben, die ganze und gebrochene, also die absolute Zahl, eine Größe vorstellen kann, sobald sie auf bestimmte Einheiten bezogen wird, und diese Größen nach der materiellern Ansicht in positive und negative (oder so genannte entgegengesetzte) Größen übergehen, sobald die absolute Zahl in eine positive z. B. $+\frac{2}{3}$, oder in eine negative z. B. $-\frac{3}{4}$ oder -5, übergeht, so wird es für die Anwendungen erforderlich sein, daß wir alle aus bestimmten Zahlen zusammengesetzte Ausdrücke in, ihnen gleiche positive oder negative Zahlen (positive oder negative Ausdrücke, z. B. $-(-\frac{2}{3})$ in $+\frac{2}{3}$ oder $\frac{2}{3}$) umwandeln, weil diese letztern erst Größen-Resultate liefern werden.

§. 49. Erklärung.

Sind a und b beliebige positive oder negative (ganze oder gebrochene) Zahlen oder Null, so nennt man a größer wie b und b kleiner wie a, und schreibt dies so

$$a > b \quad \text{oder} \quad b < a,$$

wenn die Differenz a—b einer positiven Zahl gleich ist.

Beispiele. Demnach ist also $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$; $5 > 2\frac{3}{4}$; $9 > 5$; $\frac{1}{2} > 0$; $3 > 0$; $0 > -5$; $0 > -\frac{5}{4}$; $2 > -\frac{4}{3}$; $-2 > -3$; $-4 > -7\frac{3}{4}$; u. s. w. f.

Anmerkung 1. Ist $a > b$ und $b > c$ so ist auch $a > c$. — Denn da a—b und b—c beide positiv sind, so ist auch ihre Summe positiv. Nun ist aber $(a-b)+(b-c)=a-c$ folglich auch a—c positiv, d. h. $a > c$.

Anmerkung 2. Ein ächter Bruch ist immer kleiner als 1, ein unächter dagegen größer als 1. — So sind z. B. die ächten Brüche $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{8}$, u. s. w. f. alle kleiner als 1; dagegen die unächten Brüche $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{8}{5}$ u. s. w. alle größer als 1.

Note. Nach der materiellern Ansicht, nach welcher man sich unter $\frac{3}{4}$ den 3fachen vierten Theil der Einheit denkt, d. h. eine Größe, und wo entweder stillschweigend als bekannt vorausgesetzt wird, wodurch sich die größere Größe von der kleinern unterscheidet, oder wo man die Definition (§. 4.) eintreten läßt, pflegt man diese Definition (§. 49.) als überflüssig ganz wegzulassen, weil man z. B. ohnedieß schon weiß, daß jede positive Größe größer ist als Nichts d. h. als Null, und daß $\frac{3}{4}$ größer ist als $\frac{2}{3}$, weil $\frac{3}{4}$, 9 solche Theile, $\frac{2}{3}$ aber nur 8 solche Theile enthält, die man Zwölftheil nennt.

Daß aber 0 oder Nichts größer sey, als jede negative Größe $-\frac{5}{4}$, erklärt man dadurch, daß zu $-\frac{5}{4}$ noch die Größe $+\frac{5}{4}$ oder $\frac{5}{4}$ hinzugenommen werden müsse, um dann erst 0 oder Nichts zu haben. Eben

so ist eine negative Größe —7 kleiner als eine andere —3, je größer ihr absolutes Glied ist, weil dann desto mehr (eine desto größere positive Größe) hinzugenommen werden muß, um die andere negative Größe —3 zu erhalten.

Nach unsrer Ansicht, die in den Paragraphen verfolgt wird, haben wir es nur mit den angezeigten Operationen zu thun, weil wir überhaupt nur das Verhalten der Operationen zu einander im Allgemeinen im Auge haben. Jeder Ausdruck der entsteht, hat eben deshalb seine bestimmte Bedeutung, weil er aus bestimmten Zahlen durch bestimmte Operationen zusammengesetzt ist, nur daß wir seine Bedeutung aus unserem mehr abstrakten Standpunkte, der Natur der Sache gemäß, aufzufassen suchen, ohne den Ausdrücken ihre Bedeutung unmittelbar im Leben nachzuweisen, weil sie diese letztere Bedeutung nur in sehr speciellen Fällen und nur in Bezug auf Anwendung gewinnen, was erst in dem Augenblicke gezeigt werden kann und muß, wo die Anwendungen auf Größen gemacht werden. Nach dieser allgemeinern, weniger materiellen Ansicht ist aber eine bestimmte Definition, wie die (§. 49.) gegebene, unentbehrlich, wenn man vom Größern und Kleinern in Bezug auf unsre abstrakten Ausdrücke sprechen will. Daß diese Definition so gewählt ist, wie sie sich nachher in den wenigen besondern Fällen, wo diese Zahlen-Ausdrücke als Größenrepräsentanten betrachtet werden dürfen, an die Definition des Größern und Kleinern zwischen Größen selbst anschließt, sieht jeder hierauf aufmerksame Leser von selbst ein, so wie auch, daß die frühere Definition des Größern und Kleinern zwischen ganzen Zahlen (§. 4.) als ein besonderer Begriff in diesem hier gegebenen enthalten seyn muß und auch wirklich enthalten ist.

§. 50. Zusatz.

Ist $a-b$ positiv, so ist $(a+m)-(b+m)$ auch positiv und auch $(a-m)-(b-m)$, während $(m-a)-(m-b)=b-a$ also negativ ist, mag auch m positiv oder negativ seyn. Dagegen ist $am-bm$ und $\frac{a}{m}-\frac{b}{m}$ nur dann positiv, wenn m positiv ist, negativ dagegen, wenn m negativ ist.

Ist also $a > b$,

so ist auch

1) $a+m > b+m$
2) $a-m > b-m$
3) $m-a < m-b$,

mag m positiv oder negativ seyn. Dagegen

4) $am \gtrless bm$
5) $\frac{a}{m} \lessgtr \frac{b}{m}$,

je nachdem m $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist. Die Ausdrücke a und b selbst, mögen positiv, negativ oder 0 seyn.

Sind aber a und b und m alle positiv, so ist noch:

$$6)\quad \frac{m}{a} < \frac{m}{b},$$

welches Resultat (n. 6.) jedoch nicht nothwendig mehr statt finden muß, wenn m oder a oder b negativ werden sollten. In diesem letztern Falle kann jedoch das jedesmalige Verhalten zwischen $\frac{m}{a}$ und $\frac{m}{b}$ in Bezug auf das Größere und Kleinere leicht aus der Differenz

$$\frac{m}{a} - \frac{m}{b} \text{ d. h. } \frac{mb - ma}{ab} \text{ d. h. } \frac{m(b-a)}{ab}$$

der Definition (§. 49.) gemäß, beurtheilt werden. Man findet nehmlich aus dieser Differenz, da b—a immer negativ ist:

1) Haben a und b einerlei + oder — Zeichen, so daß ab positiv ist, so ist diese Differenz $\frac{m}{b} - \frac{m}{a} \left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$, wenn m $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}\right\}$ ist, folglich dann $\frac{m}{a} \gtrless \frac{m}{b}$, wenn m $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}\right\}$ ist.

2) Haben aber a und b verschiedene + oder — Zeichen, so daß ab negativ ist, so ist

$$\frac{m}{a} \gtrless \frac{m}{b},$$ je nachdem m $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ seyn sollte.

Note. So ist z. B. $1 > -4$. Addirt oder subtrahirt man nun auf beiden Seiten z. B. 2, so erhält man:

$1+2 > -4+2$ d. h. $3 > -2$

und $1-2 > -4-2$ d. h. $-1 > -6$.

Multiplicirt und dividirt man ferner auf beiden Seiten durch 2, so ergiebt sich $1 \cdot 2 > (-4) \cdot 2$ d. h. $2 > -8$

und $\frac{1}{2} > -\frac{4}{2}$ d. h. $\frac{1}{2} > -2$.

Multiplicirt und dividirt man aber auf beiden Seiten durch —2, so ergiebt sich $1 \cdot (-2) < (-4) \cdot (-2)$ d. h. $-2 < 8$

und $1 : (-2) < (-4) : (-2)$ d. h. $-\frac{1}{2} < 2$.

§. 51. Zusatz.

Ist $a > b$ und $c > d$,

so ist allemal 1) $a + c > b + d$

und 2) $a - d > b - c$;

weil, wenn $a - b$ und $c - d$ positiv sind, auch $(a-b)+(c-d)$ d. h. $(a+c)-(b+d) = (a-d)-(b-c)$ positiv seyn muß, es mögen a, b, c, d, positiv oder negativ oder Null seyn. —

Dagegen ist unter derselben Voraussetzung, daß

$a > b$ und $c > d$ ist,

nur dann nothwendig auch

3) $a \cdot c > b \cdot d$ *)

und 4) $a : d > b : c$,

wenn a, b, c, d alle positiv sind. — In jedem andern Falle muß erst eine ähnliche Untersuchung, wie zu Ende des (§. 50.), angestellt werden, ehe man aus

$a > b$ und $c > d$

die Folgerungen

$a \cdot c \gtrless b \cdot d$ und $\frac{a}{d} \gtrless \frac{b}{d}$

zieht.

Note. Ist z. B. $4 > \frac{3}{2}$ und $\frac{11}{3} > \frac{1}{4}$ so ist auch

$4 + \frac{11}{3} > \frac{3}{2} + \frac{1}{4}$ d. h. $7\frac{2}{3} > 1\frac{3}{4}$

$4 \cdot \frac{11}{3} > \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4}$ d. h. $14\frac{2}{3} > \frac{3}{8}$;

dagegen nicht:

$4 - \frac{11}{3} > \frac{3}{2} - \frac{1}{4}$

auch nicht:

$4 : \frac{11}{3} > \frac{3}{2} : \frac{1}{4}$,

wohl aber allemal:

$4 - \frac{1}{4} > \frac{3}{2} - \frac{11}{3}$ d. h. $3\frac{3}{4} > -\frac{13}{6}$

und $4 : \frac{1}{4} > \frac{3}{2} : \frac{11}{3}$ d. h. $16 > \frac{9}{22}$.

---

*) Ist nehmlich $a > b$, so ist $a = b + q$, wo q eine gewisse absolute (positive) Zahl ist; da nun $c > d$, so ist auch nach (§. 50.) $ac > ad$; aber $ad = (b+q)d = bd + qd$, also, weil qd positiv ist, $ac > bd$.

Und dividirt man $ac > bd$ auf beiden Seiten durch die absolute (positive) Zahl cd, so erhält man nach (§. 50. n. 5.) die hiesige (n. 4.).

§. 51*. Erklärung.

Geht man ursprünglich von ganzen Zahlen aus, so erhält man durch Addition und Subtraktion nach (§. 21.) lauter Differenzen zweier ganzen Zahlen. Und wenn man noch Multiplikation und Division beliebig eintreten läßt, so werden alle möglichen Verbindungen, welche man erhält, doch immer entweder selber wieder Differenzen ganzer Zahlen (d. h. einer ganzen Zahl oder der Null oder einer negativen ganzen Zahl) gleich seyn, oder doch einem Quotienten $\frac{a}{b}$, in welchem der Dividend a, so wie der Divisor b beliebige solche Differenzen zweier ganzen Zahlen (d. h. beliebig eine ganze Zahl oder Null oder eine negative ganze Zahl) vorstellen sollen. Jeder ursprünglich aus ganzen Zahlen, übrigens beliebig durch Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division zusammengesetzte Ausdruck ist daher nothwendig, entweder der Null oder einer positiven oder negativen, ganzen oder gebrochenen (d. h. einer positiven ganzen oder positiven gebrochenen, oder einer negativen ganzen oder negativen gebrochenen) Zahl gleich.

Diese positive ganze, positive gebrochene, negative ganze, so wie negative gebrochene Zahl, so wie auch die Null, werden wir in der Folge zusammenfassen unter dem Namen der reellen Zahlen.

Anmerkung. Jeder ursprünglich aus ganzen Zahlen übrigens beliebig, durch die 4 bis jetzt betrachteten (sogenannten elementaren) Operationen zusammengesetzte Ausdruck, ist daher nothwendig eine reelle Zahl.

Note. Nach der mehr materiellen Ansicht, welche wir bis jetzt in den Noten verfolgt haben, nennt man, was hier positive und negative Zahl genannt wurde, lieber positive und negative Größe; und versteht unter reeller Größe, allemal die positive und die negative (wohl auch die Null).

Schlußfragen?

1) Wie werden zwei Ausdrücke, von denen der eine und auch der andere beliebig ein einfacher seyn kann, oder eine Summe, Differenz, ein Produkt

oder ein Quotient, zu einander addirt, von einander subtrahirt, mit einander multiplicirt oder durch einander dividirt? Antw. Allemal und ohne weiteres dadurch, daß man sie beide hinschreibt, jeden in Klammern eingeschlossen, und zwischen beide das Zeichen + oder —, oder das Multiplikationszeichen (.) oder (×), oder endlich das Divisionszeichen (:) oder (—) den (§. §. 1. 3. 23. 27.) gemäß, hinsetzt. — Diesen so entstehenden Ausdruck, welcher eine Summe, Differenz, Produkt oder Quotient ist, kann man aber sogleich wieder in einen andern gleichen (identischen) Ausdruck verwandeln wollen, und dazu bedient man sich der allgemeinen Gleichungen (§. §. 7 — 10 und §. §. 34 — 46.) in so ferne diese immer zwei gleiche Ausdrücke enthalten, so daß, wenn der eine davon als der gegebene angesehen werden darf, der andere allemal dafür gesetzt werden kann. Die in den Anmerkungen ausgesprochenen praktischen Regeln weisen aber die Art näher nach, wie man den zweiten Ausdruck aus dem ersten gegebenen ableiten kann, worauf es in der Praxis gerade vorzüglich ankommt.

2) Auf wie vielerlei Arten kann man einen Bruch mit einer ganzen Zahl multipliciren; und in welchen der Formeln wird solches gelehrt?

3) Auf wie vielerlei Arten wird ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt; welche der Formeln lehren solches, und wodurch unterscheidet sich die eine Art von der andern? —

4) Wie wird eine ganze Zahl durch einen Bruch dividirt, und welche der Formeln lehrt solches? —

5) Wie werden ein Bruch und eine ganze Zahl zu einander addirt und von einander subtrahirt?

6) Wie werden 2 Brüche zu einander addirt, oder von einander subtrahirt? —

7) Wie werden mehre Brüche zu einander addirt, und welches Verfahren tritt ein, wenn auch ganze Zahlen darunter vorkommen, die nebst Brüchen zu einander addirt werden sollen?

8) Wie muß der Zähler und der Nenner eines Bruches behandelt werden, wenn der neue Bruch dem gegebenen gleich seyn (denselben Werth haben) soll? Antw. Man muß Zähler und Nenner mit einer und derselben Zahl multipliciren, oder beide zugleich durch eine und dieselbe Zahl dividiren. — Jede andere Veränderung dürfte nur mit großer Vorsicht zugelassen werden, wenn der Werth des Bruches sich nicht ändern sollte. —

9) Wie werden zwei (oder mehr) Brüche mit einander multiplicirt, und wie geschieht die Multiplikation, wenn auch ganze Zahlen darunter vorkommen?

10) Wie werden zwei Brüche durch einander dividirt?

11) Welche praktische Regel kann man sich für das Multipliciren und Dividiren der additiven und subtraktiven Ausdrücke bilden? —

12) Bleibt ein Quotient von der Form $\frac{-a-b+c-d-f}{p-q+r+s-u-v}$, dessen Dividend und Divisor algebraische Summen sind, am Werthe unverändert, wenn man allen Gliedern im Dividenden und im Divisor das entgegengesetzte (+ oder —) Zeichen vorsetzt, also wenn man $\frac{a+b-c+d+f}{-p+q-r-s+u+v}$ dafür setzt? — Und warum?

13) Wie werden algebraische Summen mit einander multiplicirt und durch einander dividirt? —

14) Wodurch unterscheidet sich genau genommen der Bruch (oder die gebrochene Zahl) von dem Quotienten? — Wodurch die positive und negative Zahl von dem additiven und subtraktiven Ausdruck?

15) Wodurch unterscheidet sich die absolute oder abstrakte Zahl von der positiven?

16) Woran erkennt man, daß eine positive oder negative Zahl größer oder kleiner ist als die Null oder als eine andere positive oder negative Zahl?

17) Ist auch allemal

$$\frac{a}{b+c}=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}$$

oder

$$\frac{a}{b-c}=\frac{a}{b}-\frac{a}{c},$$

für jeden Werth von a, b und c? —

18) Welche von den 4 Gleichungen

$$(a+c)-(b+c)=a-b$$
$$(a-c)-(b-c)=a-b$$
$$(a\,.\,c)-(b\,.\,c)=a-b$$
$$(a:c)-(b:c)=a-b$$

sind richtig, d. h. gelten für jeden Werth von a, b, c, und welche davon sind nicht richtig, d. h. welche darunter gelten nicht für jeden Werth von a, b und c?? —

19) Und in denen der 4 Gleichungen, welche nicht richtig sind, d. h. welche nicht gelten für jeden Werth von a, b und c, welchen bestimmten Werth müßte man dem c geben, damit die Gleichungen wenigstens für diesen bestimmten Werth von c, wenn auch nicht für jeden Werth von c, richtig seyn würden?

20) Im Falle die beiden Gleichungen in (n. 17)

$$\frac{a}{b+c}=\frac{a}{b}+\frac{a}{c} \quad \text{und} \quad \frac{a}{b-c}=\frac{a}{b}-\frac{a}{c}$$

nicht richtig seyn, also nicht für jeden Werth von a, b, c, gelten sollten, könnte man nicht nach dem Ausdruck fragen, der statt c gesetzt werden müßte, damit die eine oder die andere dieser Gleichungen, wenn auch nicht für jedes c, doch für dieses Werth von c richtig werden würde, d. h. gelten würde für jeden Werth von a und b (und für diesen bestimmten Ausdruck für c.)? —

21) Welche von nachstehenden 4 Gleichungen

$$\frac{a}{b}=\frac{a\,.\,c}{b\,.\,c}, \qquad \frac{a}{b}=\frac{a:c}{b:c},$$

$$\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+c}, \quad \text{und} \quad \frac{a}{b}=\frac{a-c}{b-c}$$

sind richtig, d. h. gelten für jeden Werth von a, b und c; welche nicht? —

22) Und wenn eine dieser Gleichungen nicht richtig ist, d. h. nicht gilt für jeden Werth von a, b und c, welchen bestimmten Ausdruck müßte man für c setzen, damit diese Gleichung für dieses Werth von c doch, wenn auch nicht für jeden Werth von c, richtig würde, d. h. gelten müßte, welche Werthe man auch dem a und dem b noch beilegen möchte? — —

23) Wie kann ein gegebener Bruch z. B. $\frac{3}{4}$ oder $\frac{a}{b}$ in einen andern gleichgeltenden verwandelt werden, welcher einen gegebenen Nenner z. B. 24 oder bc hat?

24) Wie lassen sich zwei und mehr Brüche, z. B. $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{9}$ oder $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{bd}$, $\frac{m}{d}$, $\frac{p}{dq}$ jeder für sich in einen andern gleichgeltenden verwandeln, so daß alle denselben gegebenen Nenner, z. B. die ersten 4 den Nenner 72, die andern 4 den Nenner bdq erhalten? —

25) Es ist $a > b$ und $c > d$ angenommen. Ist dann nothwendig auch allemal

$$a\,.\,c > b\,.\,d$$

oder $a-c > b-d$

oder $a:c > b:d$???

und unter welchen Voraussetzungen ist die erste dieser 3 Ungleichungen allemal richtig?

Arithmetik.

Drittes Kapitel.

Ganze Potenzen. Wurzeln. Gebrochene und negative Potenzen.

§. 52. Erklärung.

Ein Produkt von m gleichen Faktoren, wo jeder a, nennt man die mte Potenz von a, bezeichnet solches durch

a^m spricht diesen Ausdruck aus „a hoch m" oder „a zur mten Potenz" und nennt dabei a den Dignanden (Basis, Wurzel) und m den Exponenten der Potenz. — Und wenn wir sagen „a werde m mal mit sich multiplicirt" so verstehen wir nichts weiter darunter, als es werde das Produkt von m Faktoren, wo jeder a ist, gebildet (wenn auch bei der Multiplikation dieser m Faktoren eigentlich nur m—1 mal das Geschäft des Multiplicirens wiederholt ist.). — Jede solche Potenz, wo der Exponent m eine ganze Zahl ist, nennt man auch eine ganze Potenz. Die Potenz a^m hinschreiben heißt a mit m potenziren.

Note. Die Potenz 2^3 bedeutet also das Produkt 2 . 2 . 2; eben so ist $7^2 = 7 . 7 = 49$; $4^5 = 4 . 4 . 4 . 4 . 4 = 1024$; u. s. w. f. — Dabei mag vorläufig bemerkt werden, daß wir hier, was wir Dignand nannten, nie Wurzel, auch nie Basis nennen werden (wenn diese

Benennungen auch sonst üblich sind) weil wir zwischen Dignand und Wurzel, oder zwischen Dignand und Basis einen ähnlichen Unterschied machen müssen, wie zwischen Faktor und Quotient, oder wie zwischen Summand und Differenz. —

Anmerkung. Auch ergiebt sich unmittelbar

1) $0^m = 0$, 2) $1^m = 1$,

wenn nur m eine ganze Zahl ist.

§. 53. Zusatz.

Die zweite Potenz z. B. a^2, b^2, $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ u. s. w. heißt auch das Quadrat von a, b, oder $\frac{a}{b}$, etc. etc. Die dritte Potenz z. B. a^3, b^3, $\left(\frac{a}{b}\right)^3$, etc. wird auch der Würfel oder Kubus genannt, von a, von b, oder von $\frac{a}{b}$, etc. etc. Die vierte Potenz heißt auch zuweilen das Biquadrat. Quadriren, Kubiren heißt daher auch so viel, als mit 2 oder mit 3 potenziren, oder zur 2ten, 3ten Potenz erheben, d. h. die 2te, 3te Potenz bilden.

§. 54. Zusatz.

Ist m eine ganze Zahl, so ist auch

$$a^m \cdot a = a^{m+1},$$

weil a^m bereits ein Produkt bedeutet, von m Faktoren wo jeder a ist, so daß nothwendig ein Produkt von $m+1$ solchen Faktoren sich ergeben muß, wenn das erstere mit demselben Faktor a noch einmal multiplicirt wird.

Note. So ist $2^4 \cdot 2 = 2^5$, $z^3 \cdot z = z^4$; $z^2 \cdot z = z^3$; u. s. w.; und $2^7 = 2^6 \cdot 2$, $10^9 = 10^8 \cdot 10$, u. s. w. Ferner noch $z^m = z^{m-1} \cdot z$, $a^{n-3} = a^{n-4} \cdot a$, u. s. w. f., wenn nur die Exponenten alle, ganze Zahlen sind.

§. 55. Lehrsatz.

Sind m und n ganze Zahlen, so ist allemal

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Beweis. Denn a^m bedeutet ein Produkt von m Faktoren, wo jeder a ist, und a^n ein Produkt von n derselben Faktoren; folglich, wenn man a^m mit a^n multiplicirt, weil es nach (§. 26. n. 4.) einerlei ist, in welcher Ordnung man mehre Zahlen multiplicirt, erhält man ein Produkt von m und noch von n, also von $m+n$ solchen Faktoren a, welches eben durch die Potenz a^{m+n} vorgestellt wird.

Anmerkung. Dieser Formel kann man sich wieder bedienen, um den einen der beiden gleichen Ausdrücke, wenn er gegeben ist, in den andern identischen zu verwandeln. Sie führt zu den beiden praktischen Regeln:

1) „Potenzen a^m, a^n, die einen gemeinschaftlichen Dignanden a haben, werden mit einander multiplicirt, wenn man ihre Exponenten m und „n addirt, und den gemeinschaftlichen Dignanden a als solchen beibehält.

2) „Ein Ausdruck a wird mit einer Summe $m+n$ potenzirt, wenn „man ihn mit jedem Summanden einzeln potenzirt, und diese Potenzen „hernach mit einander multiplicirt."

Note. So hat man z. B. $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$; $10^4 \cdot 10^2 = 10^6$; u. s. f. und 8^{13} läßt sich zerlegen in $8^2 \cdot 8^{11}$, und in $8^3 \cdot 8^{10}$ und in $8^4 \cdot 8^9$, auch in $8^5 \cdot 8^8$, ebenfalls in $8^6 \cdot 8^7$, u. s. w. f.

§. 56. Lehrsatz.

Ferner ist, wenn m, n und $m-n$ ganze Zahlen sind,

$$2)\quad a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Beweis. Denn man multiplicire die Potenz rechts nehmlich a^{m-n} mit a^n, so erhält man nach (§. 55. Anmerkung. Regel 1.)

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m.$$

Folglich wenn man hier auf beiden Seiten durch a^n wieder weg dividirt:

$$a^{m-n} = a^m : a^n.$$

Anmerkung. Die beiden praktischen Regeln, welche diese Formel für die Anwendung enthält, sind folgende:

1) „Zwei Potenzen a^m, a^n, welche einen gemeinschaftlichen Dignanden „a haben, werden durch einander dividirt, wenn man ihre Exponenten m, n, „von einander subtrahirt, und den gemeinschaftlichen Dignanden a als solchen beibehält.

2) „Ein Ausdruck a wird mit einer Differenz m—n potenzirt, wenn „man ihn mit dem Minuenden m und dem Subtrahenden n einzeln poten„zirt, und erstere Potenz durch letztere dividirt."

Note. So ergiebt sich $z^5 : z^2 = z^3$, $10^7 : 10^3 = 10^4$ u. s. w. f.; und 2^3 kann als Quotient geschrieben werden entweder

$$= \frac{2^5}{2^2} \quad \text{oder} \quad = \frac{2^6}{2^3} = \frac{2^7}{2^4} = \frac{2^8}{2^5} = \text{etc. etc.}$$

§. 57. Lehrsatz.

Ist ferner m eine ganze Zahl, so hat man noch:

3) $(ab)^m = a^m . b^m$.

Beweis. Denn $(ab)^m$ bedeutet ein Produkt von m Faktoren, wo jeder ab ist. Weil es aber einerlei ist, in welcher Ordnung mehre Zahlen multiplicirt werden (§. 26. n. 4.), so kann man erstlich alle a mit einander multipliciren und dafür a^m schreiben, dann alle b mit einander, welches b^m giebt, und diese beiden Resultate noch mit einander multipliciren, wodurch man eben $a^m . b^m$ als dem $(ab)^m$ gleich, erhält.

Anmerkung. Praktische Regeln:

1) „Ein Produkt ab wird mit einer Zahl m potenzirt, wenn man je„den Faktor einzeln potenzirt, und die Potenzen zuletzt noch mit einander „multiplicirt.

2) „Potenzen a^m, b^m, welche einen gemeinschaftlichen Exponenten m „haben, werden mit einander multiplicirt, wenn man die Dignanden a und „b mit einander multiplicirt, den gemeinschaftlichen Exponenten m aber „als solchen beibehält."

Note. So hat man z. B. $2^4 . 5^4 = 10^4$; $3^2 . 5^2 = 15^2$, u. s. w. f. Eben so kann man $(2 . z)^4$ zerlegen in $2^4 . z^4$; desgleichen 18^5 in $2^5 . 9^5$ oder in $3^5 . 6^5$; und dergl. m.

§. 58. Lehrsatz.

Ferner ist, wenn m eine ganze Zahl,

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

Beweis. Denn man multiplicire $\left(\frac{a}{b}\right)^m$ mit b^m, so erhält man nach (§. 57. Anmerkung. Regel 2.):

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m . b^m = \left(\frac{a}{b} . b\right)^m, \text{ auch } = a^m.$$

Dividirt man daher hier links und rechts wieder durch b^m weg, so ergiebt sich der Lehrsatz.

Anmerkung. Praktische Regeln:

1) „Ein Quotient oder ein Bruch $\frac{a}{b}$ wird mit einer Zahl m potenzirt, wenn man den Zähler a allein und den Nenner b allein potenzirt, „und erstere Potenz durch letztere dividirt.

2) „Zwei Potenzen a^m, b^m, welche einen gemeinschaftlichen Exponenten m haben, werden durch einander dividirt, wenn man die Dignanden a und b allein durch einander dividirt, den gemeinschaftlichen Exponenten m aber als solchen beibehält."

Note. So ist z. B. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$, u. s. w. Desgleichen ist $3^4 = \frac{12^4}{4^4} = \frac{15^4}{5^4} = \frac{18^4}{6^4} =$ etc. etc.; und $\frac{64}{625} = \frac{8^2}{25^2} = \left(\frac{8}{25}\right)^2$, u. s. w. f.

§. 59. Lehrsatz.

Endlich ist noch, wenn m und n ganze Zahlen sind,

$$5) \quad (a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m.$$

Beweis. Denn es ist $(a^m)^n$ eine Potenz und bedeutet ein Produkt von n Faktoren, wo jeder a^m ist. Multiplicirt man nun zwei dieser Faktoren a^m mit einander, so erhält man nach (§. 55.) a^{m+m}, und wenn dieses noch mit dem dritten Faktor a^m multiplicirt wird, so ergiebt sich nach demselben (§. 55.) a^{m+m+m}; daher zuletzt, wenn alle n Faktoren a^m mit einander multiplicirt sind, das Resultat

$$a^{m+m+m+m+m+\ldots\ldots},$$

wo das m im Exponenten n mal vorkommt, so daß nach (§. 23.) der ganze Exponent $= nm = mn$ ist. Folglich

$$(a^m)^n = a^{mn} = a^{nm}.$$

Und vertauscht man hier m und n mit einander so ergiebt sich noch

$$(a^n)^m = a^{nm} = a^{mn}.$$

Folglich unser Lehrsaß außer Zweifel.

Anmerkung. Praktische Regeln:

1) „Eine Potenz a^m wird noch mit n potenzirt (zur n^{ten} Potenz erhoben) wenn man den Exponenten m mit n multiplicirt, den Dignanden „a dagegen als solchen unverändert beibehält.

2) „Ein Ausdruck a wird mit einem Produkt mn potenzirt, wenn man „ihn zuerst mit einem der Faktoren, dann was herauskommt, noch mit dem „andern Faktor potenzirt."

Note. So findet sich z. B. $(4^2)^3 = 4^6$; $(2^4)^5 = 2^{20}$; $(3^2)^4 = 3^8 = (3^4)^2$; u. s. w. f. — Ferner kann man statt z^4 schreiben $(z^2)^2$; statt z^6 auch schreiben $(z^2)^3$ oder auch $(z^3)^2$; statt $z^{4.m}$ noch $(z^4)^m$ oder auch $(z^m)^4$. Statt 2^{10} kann geschrieben werden $(2^2)^5$ oder auch $(2^5)^2$; u. s. w. f.

§. 60. Zusatz.

Aus den Sätzen (§. §. 55 — 59.) geht auch noch hervor:

z. B. 1) $a^{m+n+p+q} = a^m . a^n . a^p . a^q$;

2) $a^{m-n+p+q-r} = \frac{a^m . a^p . a^q}{a^n . a^r}$;

3) $(abcd)^m = a^m . b^m . c^m . d^m$;

4) $\left(\frac{abc}{gh}\right)^m = \frac{a^m . b^m . c^m}{g^m . h^m}$;

5) $((a^m)^n)^p = a^{mnp} = (a^{mn})^p = (a^p)^{mn} =$ etc. etc.

u. s. w. f.; wie sich durch wiederholte Anwendung der angeführten Sätze sehr leicht ergiebt.

Note. So ist z. B. $2^3 . 2^2 . 2^4 = 2^9$; eben so $3^{11} = 3^4 . 3^7 = 3^4 . 3^5 . 3^2 = 3^3 . 3^3 . 3^5 = 3^6 . 3^2 . 3^3 =$ u. s. w. f. — Ferner $(2 . 3 . 4 . 5)^3 = 2^3 . 3^3 . 4^3 . 5^3$; $(2 . 7 . 3)^2 = 2^2 . 7^2 . 3^2$; u. s. w. f. Auch $\left(\frac{5 . 7}{6 . 2 . 4}\right)^3 = \frac{5^3 . 7^3}{6^3 . 2^3 . 4^3}$; $\left(\frac{6 . 5 . 2}{3 . 4 . 7}\right)^2 = \frac{6^2 . 5^2 . 2^2}{3^2 . 4^2 . 7^2}$, u. s. w.

Auch noch $((a^2)^3)^4 = a^{24}$, $((10^3)^3)^2 = 10^{18}$; und 2^{12} kann zerlegt werden in $((2^2)^2)^3$, auch in $((2^3)^2)^2$, auch in $(2^6)^2$ auch in $(2^2)^6$, auch in $(2^4)^3$, auch in $(2^3)^4$, u. s. w. f.

§. 61. Lehrsatz.

Sind a und b zwei absolute ganze oder gebrochene Zahlen oder Null, m dagegen eine ganze Zahl,

ist ferner $a > b$,

so ist auch $a^m > b^m$.

Beweis folgt unmittelbar aus (§. 51. n. 3.) wiederholt angewandt. Aus $a > b$ und $a > b$ folgt nehmlich $aa > bb$; dann aus $aa > bb$ und $a > b$ abermals $aaa > bbb$, u. s. w. f.

§. 62. Zusatz.

Jeder ächte Bruch $\frac{\alpha}{\beta}$ mit m potenzirt, giebt daher jedesmal wieder einen ächten Bruch, der kleiner ist als $\frac{\alpha}{\beta}$ selbst; und jeder unächte Bruch $\frac{\gamma}{\delta}$ mit m potenzirt, giebt allemal ein Resultat $> \frac{\gamma}{\delta}$ also auch größer als 1, folglich in so ferne dieses Resultat ein Bruch ist, abermals einen unächten Bruch, wenn nur m eine absolute ganze Zahl ist. —

Denn weil $\frac{\alpha}{\beta} < 1$ ist, so ist auch (§. 61.): $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^m < 1^m$. —

Aber $1^m = 1$, also $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^m < 1$. — Multiplicirt man ferner $\frac{\alpha}{\beta} < 1$ links und rechts mit $\frac{\alpha}{\beta}$ so erhält man nach (§. 50. n. 4.):

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\beta} < 1 \cdot \frac{\alpha}{\beta}$$

d. h. $$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 < \frac{\alpha}{\beta}$$

und nochmals links und rechts mit $\frac{\alpha}{\beta}$ multiplicirend nach (§. 50. n. 4.) auch:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 < \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2,$$

also um so mehr $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 < \frac{\alpha}{\beta}$; u. s. w. f.

Eben so wird aber auch die andere Behauptung des Zusatzes nachgewiesen.

Note. So ist z. B. $(\frac{2}{3})^2 < \frac{2}{3}$ und auch < 1; $(\frac{4}{5})^3 < \frac{4}{5}$ und < 1; $(\frac{4}{3})^2$ dagegen $> \frac{4}{3}$ und > 1; desgleichen $(\frac{7}{4})^3 > \frac{7}{4}$ und auch > 1; u. s. w. f.

§. 63. Zusatz.

Denkt man sich eine auf einander folgende Reihe (A) von ganzen und gebrochenen Zahlen, die von 0 an unmerklich aber immer fort größer werden, so daß darunter 1, 2, 3, 4, etc. etc. und alle ganzen Zahlen, dazwischen aber, nehmlich zwischen 1 und 2, 2 und 3, 3 und 4, etc. auch alle möglichen gebrochenen Zahlen gedacht werden, so werden nach (§. 61.), wenn man jede dieser Zahlen der Reihe nach mit einer und derselben ganzen Zahl m potenzirt sich denkt, diese Potenzen eine neue Reihe (B) von immer und unmerklich größer werdenden Zahlen bilden, von 0 an bis in's unendliche fortgehend.

Zu jeder gegebenen Zahl, die sich in der zweiten Reihe (B) befindet, d. h. zu jeder ganzen oder gebrochenen absoluten Zahl, wird sich also eine Zahl in der ersten Reihe (A) dazu finden lassen, folglich ebenfalls eine ganze oder gebrochene absolute Zahl, und nur eine einzige, so daß diese letztere mit m potenzirt, die erstere hervorbringt, wenn nur m eine ganze Zahl ist.

Note. Es ist hier anschaulich gemacht, was im „Lehrbuch der Arithmetik, Algebra und Analysis" strenge zu erweisen versucht worden ist.

§. 64. Erklärung.

Ist a Null oder eine beliebige ganze oder gebrochene absolute Zahl, m dagegen eine beliebige ganze Zahl, so verstehen wir unter der mten Wurzel aus a, die durch

$\sqrt[m]{a}$ bezeichnet wird, diejenige absolute Zahl (ganze oder gebrochene oder die Null), welche, wenn sie mit m potenzirt wird (§. 52.), gerade a wieder giebt. — Dabei heißt a der Radikand (der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen) und m der Wurzel-Exponent.

Die zweite Wurzel nehmlich $\sqrt[2]{a}$ schreibt man kürzer auch bloß so $\sqrt{a}$, indem man sich den Wurzel-Exponenten 2 noch hinzu denkt, und nennt solche die Quadrat-Wurzel, so wie die dritte Wurzel $\sqrt[3]{a}$ noch ins besondere die Kubik-Wurzel genannt wird.

Anmerkung. Dem (§. 63.) zufolge, hat $\sqrt[m]{a}$ allemal einen, aber auch nur einen einzigen Werth, wenn a eine absolute, m dagegen eine ganze Zahl ist. Auch ist:

1) $\sqrt[m]{0}=0$ und 2) $\sqrt[m]{1}=1$;

und die m^{te} Wurzel aus einem ächten Bruche $\frac{a}{b}$ ist immer wieder ein ächter Bruch, aber $>\frac{a}{b}$; dagegen die m^{te} Wurzel aus einem unächten Bruche $\frac{b}{a}$ allemal wieder ein unächter Bruch, aber $<\frac{b}{a}$ (§. 62.).

Note. So hat man z. B. $\sqrt[3]{8}=2$; $\sqrt[2]{25}=\sqrt{25}=5$; $\sqrt[4]{81}=3$, $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}=\frac{2}{5}$; $\sqrt[2]{\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$; $\sqrt[5]{32}=2$; $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}=\frac{2}{3}$, $\sqrt[2]{0}=\sqrt{0}=0$; $\sqrt[3]{0}=0$; $\sqrt[2]{1}=\sqrt{1}=1$; $\sqrt[3]{1}=1$; u. s. w. f.

§. 65. Zusatz.

Bezeichnet man die durch $\sqrt[m]{a}$ vorgestellte Zahl auf einen Augenblick durch r, so ist r die Zahl, welche mit m potenzirt, a wieder giebt, also:

$$\sqrt[m]{a}=r \quad \text{und} \quad r^m=a,$$

dahero auch:

I. $(\sqrt[m]{a})^m=a$, so wie noch II. $\sqrt[m]{(a^m)}=a$.

§. 66. Lehrsatz.

Es ist allemal, wenn m eine ganze Zahl ist:

$$1)\quad \sqrt[m]{(ab)} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$$

$$2)\quad \sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

Beweise. Man potenzire die Ausdrücke rechts mit m, so erhält man, erstlich $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$ nehmend:

$$(\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b})^m = (\sqrt[m]{a})^m \cdot (\sqrt[m]{b})^m \quad \text{nach (§. 57.),}$$

$$\text{oder} \qquad = a \cdot b \quad \text{nach (§. 65. I.).}$$

Folglich ist $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$ die Zahl, die mit m potenzirt ab giebt, also ist sie auch der Wurzel $\sqrt[m]{ab}$ gleich.

Für (n. 2.) hat man nach (§. 58.) und (§. 65. I.):

$$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{(\sqrt[m]{a})^m}{(\sqrt[m]{b})^m} = \frac{a}{b};$$

folglich ist auch diese Formel richtig.

Anmerkung 1. Man erhält aber aus (n. 1.) mehremal angewandt, sogleich noch:

$$\sqrt[m]{(abc)} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c}$$

$$\sqrt[m]{(abcd)} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c} \cdot \sqrt[m]{d} \quad \text{u. s. w. f.}$$

Auch $$\sqrt[m]{\frac{abc}{df}} = \frac{\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d} \cdot \sqrt[m]{f}} \quad \text{u. s. w. f.}$$

Anmerkung 2. Praktische Regeln, welche aus diesen Formeln für die Verwandlung der Ausdrücke hervorgehen:

1) „Aus einem Produkt ab und aus einem Quotienten (Bruche) $\frac{a}{b}$ „wird die mte Wurzel gezogen, wenn man sie aus jedem Faktor einzeln, oder „aus dem Dividend und auch aus dem Divisor einzeln zieht, und die Re„sultate dann wieder mit einander multiplicirt oder durch einander dividirt.

2) „Wurzeln $\sqrt[m]{a}$ und $\sqrt[m]{b}$, welche einen gemeinschaftlichen Wur-„zel-Exponenten m haben, werden mit einander multiplicirt oder durch ein-„ander dividirt, wenn man bloß die Radikanden mit einander multiplicirt „oder durch einander dividirt, den gemeinschaftlichen Wurzel-Exponenten „m aber als solchen unverändert beibehält.“

Note. So erhält man z. B., wenn man bemerkt, daß $225 = 9 . 25$ ist,

$$\sqrt{225} = \sqrt{9 . 25} = \sqrt{9} . \sqrt{25} = 3 . 5 = 15.$$ Eben so:

$$\sqrt[3]{\tfrac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \tfrac{2}{3}; \quad \sqrt{\tfrac{9}{100}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{100}} = \tfrac{3}{10}; \quad \sqrt[4]{\tfrac{1}{16}} = \frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{16}} = \tfrac{1}{2};$$

$$\sqrt[5]{\frac{32}{100000}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{100000}} = \tfrac{2}{10} = \tfrac{1}{5}; \text{ u. s. w. f. Und } \sqrt{a} . \sqrt{b} = \sqrt{(ab)};$$

$$\sqrt{4} . \sqrt{5} = \sqrt{(4 . 5)} = \sqrt{20}; \quad \sqrt{5} . \sqrt{\tfrac{4}{5}} = \sqrt{(5 . \tfrac{4}{5})} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\sqrt[3]{2} . \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{32}; \quad \sqrt[5]{16} . \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{32} = 2; \text{ ferner } \sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} = 2;$$

$$\sqrt[3]{64} : \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{\frac{64}{125}}; \text{ u. s. w. f.}$$

Noch $$\sqrt{a} . \sqrt{\frac{1}{b}} = \sqrt{(a . \frac{1}{b})} = \sqrt{\frac{a}{b}};$$

$$\sqrt[3]{a} . \sqrt[3]{\frac{b}{c}} = \sqrt[3]{(\frac{ab}{c})}; \text{ u. s. f. f.; so wie auch:}$$

$$\sqrt{a} : \sqrt{\frac{b}{c}} = \sqrt{(a : \frac{b}{c})} = \sqrt{\frac{ac}{b}} = \frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} . \sqrt{c}}{\sqrt{b}}; \text{ u. f. f.}$$

Ferner: $\sqrt{54} = \sqrt{(9 . 6)} = \sqrt{9} . \sqrt{6} = 3 . \sqrt{6};$

$$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{(27 . 2)} = \sqrt[3]{27} . \sqrt[3]{2} = 3 . \sqrt[3]{2};$$

$$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{(16 . 2)} = \sqrt[3]{16} . \sqrt[3]{2} = 4 . \sqrt[3]{2};$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{18}{27}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{18}}{3} = \tfrac{1}{3}\sqrt{18};$$

$$\sqrt{\frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{10}{25}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{10}}{5} = \tfrac{1}{5}\sqrt{10};$$

$$\sqrt[4]{a^4 b c^2} = \sqrt[4]{(a^4)} . \sqrt[4]{(bc^2)} = a . \sqrt[4]{(bc^2)} = a . \sqrt[4]{b} . \sqrt[4]{c^2};$$

u. s. w. f.

§. 67. Lehrsatz.

Ferner ist noch:

3) $\sqrt[m]{(a^n)} = (\sqrt[m]{a})^n$,

wenn nur m und n ganze Zahlen sind.

Beweis. Denn potenzirt man den Ausdruck rechts, nehmlich $(\sqrt[m]{a})^n$ mit m, so erhält man nach (§. 59.):

$$((\sqrt[m]{a})^n)^m = ((\sqrt[m]{a})^m)^n;$$

aber weil $(\sqrt[m]{a})^m = a$ ist, auch

$$[(\sqrt[m]{a})^n]^m = a^n.$$

Es ist also $(\sqrt[m]{a})^n$ die Zahl, die mit m potenzirt a^n giebt; sie ist also zugleich $\sqrt[m]{(a^n)}$.

Anmerkung. Man erhält also einerlei, ob man eine Zahl a mit n potenzirt, und dann daraus die m^{te} Wurzel nimmt, oder ob man zuerst aus a sogleich die m^{te} Wurzel nimmt, und dann diese erst mit n potenzirt. — Deshalb kann man auch $(\sqrt[m]{a})^n$ und $\sqrt[m]{(a^n)}$ bloß durch $\sqrt[m]{a^n}$ andeuten, wo im Zeichen noch ganz willkührlich gelassen ist, ob man solches als eine Wurzel oder als eine Potenz ansehen will, d. h. ob man zuerst potenziren und dann die Wurzel nehmen will, oder umgekehrt, zuerst die Wurzel nehmen und dann potenziren.

Note. Es mag hier auch noch bemerkt werden, daß man die Zahl 8 z. B., an sich weder eine Potenz noch eine Wurzel nennen kann. In so ferne nehmlich 8 als ein Produkt betrachtet wird von 3 Faktoren, wo jeder 2 ist, wäre solche Zahl die 3te Potenz von 2; in so ferne aber dieselbe Zahl 8 als die Zahl betrachtet wird, die mit sich selber multiplicirt 64 giebt, ist 8 auch die Quadratwurzel von 64. — Die Benennungen Potenz, Wurzel beziehen sich daher eigentlich nicht auf eine Zahl, sondern auf bestimmte Zusammensetzungen zweier Zahlen, und in so ferne diese Zusammensetzungen durch die Form des Zeichens (2^3 oder $\sqrt{64}$) ausgesprochen sind, so kommen diese Benennungen Potenz, Wurzel eigentlich bloß den Formen a^m, $\sqrt[m]{a}$ zu, nicht aber den Zahlen, die durch diese Formen vorgestellt seyn können. — In diesem Sinne genommen ist $(\sqrt[m]{a})^n$ eine Potenz und $\sqrt[m]{(a^n)}$ eine Wurzel, wenn auch beide nach unserem Lehrsatze dieselbe Bedeutung haben. — (Vergl. die Noten zu §. 3. und §. 27.).

Eben so ist $2^3 = 8$ und $\sqrt[3]{8} = 2$; aber nicht 8, sondern die Form 2^3 ist eigentlich die Potenz, und nicht 2, sondern $\sqrt[3]{8}$ ist

eigentlich die Wurzel. — Desgleichen ist $2 \cdot 4 = 8$ und $\frac{8}{2} = 4$; und in $2 \cdot 4$ sind 2 und 4 die Faktoren, in $\frac{8}{2}$ dagegen ist dasselbe 2 der Divisor, dasselbe 4 das Resultat der Division und keine dieser Zahlen wird mehr Faktor genannt. Die Benennung Faktor bezieht sich auf die Zusammensetzung mit einer zweiten Zahl zum Produkt; und die Benennungen Divisor, Quotient ebenfalls auf die Art der Zusammensetzung dieser Zahl 2 mit einer zweiten. So wie es nun unbequem wäre und leicht Verwirrung erzeugen konnte, in dem Produkt $2 \cdot 4$, das 4, welches Faktor ist, auch Quotient zu nennen (obwohl aus $2 \cdot 4 = 8$ diese andere Gleichung $\frac{8}{2} = 4$ hervorgeht), eben so unbequem ist es und leicht verwirrend, in 2^3 die Zahl 2 Wurzel zu nennen, wenn auch aus $2^3 = 8$ diese andere Gleichung $\sqrt[3]{8} = 2$ hervorgeht; eben weil die Benennung Wurzel immer nur der Art der Zusammensetzung entsprechen, also immer nur der Form des Zeichens $\sqrt[3]{8}$ oder allgemein $\sqrt[m]{a}$, zukommen kann. —

Dies ist der Grund, warum schon in der „Elementarzahlenlehre." 1816. das a in der Potenz a^m die besondere Benennung Dignand erhalten hat. Möglichste Absonderung der Begriffe erfodert auch immer eine genaue Unterscheidung der Worte, welche diese Begriffe bezeichnen sollen.

§. 68. Lehrsatz.

Es ist auch allemal, wenn m, n, p ganze Zahlen sind:

$$4)\quad \sqrt[m]{\left(\sqrt[n]{a}\right)} = \sqrt[mn]{a}$$

und

$$5)\quad \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m:p]{a^{n:p}},$$

wenn nur m, n, p und m:p ganze Zahlen sind.

Beweise. Denn potenzirt man $\sqrt[m]{\left(\sqrt[n]{a}\right)}$ mit mn nach (§. 59.), so erhält man, erstlich mit m potenzirend nach (§. 65.) $\sqrt[n]{a}$; und dies noch mit n potenzirend nach (§. 65.) a selbst. Also ist $\sqrt[m]{\left(\sqrt[n]{a}\right)}$ diejenige Zahl, welche mit mn potenzirt, a giebt; also $= \sqrt[mn]{a}$.

Potenzirt man ferner $\sqrt[m]{a^n}$ mit mp, nach denselben (§. §.), so erhält man $(a^n)^p$ oder a^{np}. — Folglich ist nach

(§. 64.) $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}}$. — Und setzt man hier $\frac{m}{p}$, $\frac{n}{p}$ statt m, n, so ergiebt sich noch $\sqrt[m:p]{a^{n:p}} = \sqrt[m]{a^n}$. —

Anmerkung. In einem Ausdruck von der Form $\sqrt[m]{a^n}$ kann man also Potenz-Exponent und Wurzel-Exponent mit einer und derselben Zahl p multipliciren oder beide durch selbige dividiren, und die neuen Ausdrücke sind den vorigen gleich.

§. 69. Zusatz.

Auf demselben Wege ergiebt sich noch:

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[mp]{a^p},$$

wenn m und p ganze Zahlen sind.

Note. So findet sich z. B.

$$\sqrt{2^3} = \sqrt[2]{2^3} = \sqrt[6]{2^9} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt[8]{2^{12}} = \sqrt[10]{2^{15}} = \text{etc. etc;}$$

$$\sqrt[12]{2^8} = \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^2}; \quad \sqrt{3} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[8]{3^4} = \text{etc. etc;}$$

ferner: $\sqrt[6]{2^3} = \sqrt[2]{2} = \sqrt{2}$; u. s. w. f. Dann aus (n. 4.):

$$\sqrt[6]{54} = \sqrt[3]{\sqrt{54}} = \sqrt[3]{\sqrt{54}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{54}} = \sqrt{\sqrt[3]{54}}. —$$

Ferner: $\sqrt[8]{2} = \sqrt[2]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\sqrt{2}}$ und $\sqrt[4]{2} = \sqrt{\sqrt{2}}$, also auch: $\sqrt[8]{2} = \sqrt{(\sqrt{(\sqrt{2})})}$, d. h. man findet die 8te Wurzel aus 2, wenn man 3 mal hinter einander die Quadrat-Wurzel auszieht. — Eben so:

$\sqrt[6]{\frac{8}{125}} = \sqrt{\sqrt[3]{\frac{8}{125}}}$, und weil $\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{5}$ ist,

auch $\sqrt[6]{\frac{8}{125}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$; u. s. w. f.

§. 70. Lehrsatz.

Sind ferner m, n und auch $\frac{n}{m}$ ganze Zahlen, so ist noch:

$$6) \quad \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Beweis. Man potenzire rechts mit m, so erhält man nach (§. 59.):

$$\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^m = a^{\frac{n}{m}\cdot m} = a^n.$$

Folglich ist $a^{\frac{n}{m}}$ die Zahl, die mit m potenzirt, a^n giebt, also ist sie auch $= \sqrt[m]{a^n}$.

Note. Man hat also z. B. $\sqrt{a^6} = \sqrt[2]{a^6} = a^{6:2} = a^3$; $\sqrt[3]{2^{12}} = 2^{12:3} = 2^4$;

$$\sqrt{\frac{2^6}{3^8}} = \frac{\sqrt{(2^6)}}{\sqrt{(3^8)}} = \frac{2^{6:2}}{3^{8:2}} = \frac{2^3}{3^4}; \quad \sqrt[m]{a^{3m}} = a^{3m:m} = a^3,$$

$$\sqrt[m]{\left(\frac{a^{3m}}{b^{2m}}\right)} = \frac{\sqrt[m]{a^{3m}}}{\sqrt[m]{b^{2m}}} = \frac{a^3}{b^2}; \text{ u. s. w. s.}$$

§. 71. Erklärung.

Man kann sich aber dieser Formel (n. 6. §. 70.) bedienen, um auch gebrochene Potenzen einzuführen. Mag nehmlich $\frac{n}{m}$ eine ganze oder eine gebrochene Zahl seyn, so verstehen wir von nun an unter $a^{\frac{n}{m}}$, oder wenn $\frac{n}{m}$ durch μ vorgestellt wird, unter a^{μ} nichts weiter als $\sqrt[m]{a^n}$. — Im Falle nehmlich μ oder $\frac{n}{m}$ eine ganze Zahl, also a^{μ} eine ganze Potenz ist, so ist das, was diese ganze Potenz nach (§. 52.) bedeutet, nach (§. 70.) der Wurzel $\sqrt[m]{a^n}$ wirklich gleich, daher enthält die jetzige Erklärung in diesem Falle keinen Widerspruch; und ist μ oder $\frac{n}{m}$ eine gebrochene Zahl, so hat a^{μ} noch gar keine Bedeutung gehabt, und es ist ihm also dadurch eine Bedeutung gegeben.

Den Ausdruck a^{μ}, im Falle μ eine gebrochene Zahl ist,

nennen wir aber eine gebrochene Potenz, und a noch den Dignanden, so wie μ den Exponenten derselben.

Note. Die gebrochene Potenz $a^{\frac{2}{3}}$, d. h. das Zeichen $a^{\frac{2}{3}}$ bedeutet also, dieser Erklärung zufolge, nichts weiter als $\sqrt[3]{a^2}$, so wie $a^{\frac{37}{100}}$ nichts weiter bedeuten soll, als $\sqrt[100]{a^{37}}$; ferner soll $25^{\frac{3}{2}}$ nichts weiter bedeuten als $\sqrt[2]{25^3}$ oder $\sqrt{25^3}$ oder $(\sqrt{25})^3$ oder 5^3 oder 125; u. s. w. f.

Anmerkung. Wenn $\frac{n}{m}=\frac{q}{p}$ seyn sollte, aber nicht $n=q$ und auch nicht $m=p$, so wäre $\mu=\frac{n}{m}$ und auch $\mu=\frac{q}{p}$; und daher würde dann a^{μ} sowohl $\sqrt[m]{a^n}$, als auch $\sqrt[p]{a^q}$ vorstellen, nach unsrer eben gegebenen Definition. — Es läßt sich aber leicht erweisen, daß so oft $\frac{n}{m}=\frac{q}{p}$ ist, dann auch allemal $\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[p]{a^q}$ seyn müsse. — Es ist nehmlich nach (§. 68. n. 5.) $\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[mp]{a^{np}}$ und $\sqrt[p]{a^q}=\sqrt[mp]{a^{mq}}$. Aber aus $\frac{n}{m}=\frac{q}{p}$ geht hervor $np=mq$, folglich auch $a^{np}=a^{mq}$; und die Behauptung fällt in die Augen. — Daraus folgt aber, daß unsre Definition (§. 71.) völlig bestimmt ist.

Bemerkung. Wenn aber nach der vorstehenden Erklärung auch jede gebrochene, so wie nach (§. 52.) jede ganze Potenz ihre bestimmte Bedeutung hat, so lehren doch die (§. §. 55 — 60.), wie mit ganzen Potenzen operirt wird, und es entsteht daher nun die so wichtige Frage, ob dieselben Formeln (§. §. 55 — 60.) auch noch gelten werden, wenn die vorkommenden Potenzen beliebig ganze oder gebrochene Potenzen seyn sollten. Daher folgender

§. 72. Lehrsatz.

Die Formeln (§. §. 55 — 60.) gelten allemal, es mögen die vorkommenden Potenzen ganze oder gebrochene seyn, in beliebiger Verbindung.

1. Beweis der Formel (§. 55. n. 1.), wenn $m=\frac{\alpha}{\beta}$ und $n=\frac{\gamma}{\delta}$ ist, und dabei $\frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{\gamma}{\delta}$ beliebig ganze oder gebrochene Zahlen sind.

In diesem Falle bedeutet nehmlich, weil man

$$m+n=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta}$$

hat,

a^m die Wurzel $\sqrt[\beta]{a^\alpha}$,

a^n = = = $\sqrt[\delta]{a^\gamma}$,

a^{m+n} = = = $\sqrt[\beta\delta]{a^{\alpha\delta+\beta\gamma}}$ nach (§. 71.);

und es fragt sich also, ob $a^m . a^n = a^{m+n}$

d. h. ob $\sqrt[\beta]{a^\alpha}.\sqrt[\delta]{a^\gamma}=\sqrt[\beta\delta]{a^{\alpha\delta+\beta\gamma}}$ seyn werde, oder nicht. — Es ist aber nach (§. 68. n. 5.):

$$\sqrt[\beta]{a^\alpha}=\sqrt[\beta\delta]{a^{\alpha\delta}} \quad \text{und} \quad \sqrt[\delta]{a^\gamma}=\sqrt[\beta\delta]{a^{\beta\gamma}};$$

folglich, wenn man diese beiden Gleichungen mit einander multiplicirt, rechts aber erstlich (§. 66. n. 1.) und dann (§. 55.) *) anwendet, ergiebt sich augenblicklich die zu erweisende Gleichung.

2. Beweis der Formel (§. 56. n. 2.) für den Fall, daß $m=\frac{\alpha}{\beta}$, $n=\frac{\gamma}{\delta}$ und $m-n=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\beta\delta}$, beliebige ganze oder gebrochene (absolute, positive) Zahlen sind. — Unter dieser Voraussetzung hat man nach (n. 1.):

$$a^{m-n} . a^n = a^{m-n+n} = a^m;$$

folglich auf beiden Seiten durch a^n weg dividirend, ergiebt sich auch diese andere Formel.

3. Beweis der Formel (§. 57. n. 3.), wenn $m=\frac{\alpha}{\beta}$ eine beliebige ganze oder gebrochene Zahl ist. — Man versteht hier nach (§. 71.):

---

*) Man darf nehmlich nicht übersehen, daß α, β, γ, δ, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$ ganze Zahlen, also die Potenzen a^α, a^β, a^γ, a^δ, etc. etc. $a^{\alpha\delta}$, $a^{\beta\gamma}$, ganze Potenzen sind, und daß die Formeln (§. 55 — 60.) für solche ganze Potenzen bereits erwiesen sind, daher hier (für solche ganze Potenzen) angewandt werden können.

unter $(ab)^m$ die Wurzel $\sqrt[\beta]{(ab)^\alpha}$

" a^m " " " $\sqrt[\beta]{a^\alpha}$

" b^m " " " $\sqrt[\beta]{b^\alpha}$;

und es fragt sich also, ob jetzt noch $(ab)^m = a^m . b^m$, d. h. ob $\sqrt[\beta]{(ab)^\alpha} = \sqrt[\beta]{a^\alpha} . \sqrt[\beta]{b^\alpha}$ seyn werde, oder nicht. Nun ist aber nach (§. 66. n. 1.):

$$\sqrt[\beta]{a^\alpha} . \sqrt[\beta]{b^\alpha} = \sqrt[\beta]{(a^\alpha . b^\alpha)} = \sqrt[\beta]{(ab)^\alpha},$$

nach (§. 57. n. 3.) welche für ganze Potenzen bereits erwiesen ist; folglich unsre hiesige Gleichung erwiesen.

4. Beweis der Formel (§. 58. n. 4.) wenn $m = \frac{\alpha}{\beta}$ beliebig eine ganze oder gebrochene Zahl ist. — Es ist dann nach (n. 3.), unter dieser Voraussetzung:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m . b^m = \left(\frac{a}{b} . b\right)^m = a^m;$$

folglich, wenn man auf beiden Seiten durch b^m weg dividirt:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m},$$

wenn auch m eine gebrochene Zahl seyn sollte.

5. Beweis der Formel (§. 59. n. 5.), wenn $m = \frac{\alpha}{\beta}$, $n = \frac{\gamma}{\delta}$, also $m . n = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$ beliebige ganze oder gebrochene Zahlen seyn sollten. — Unter dieser Voraussetzung versteht man nach (§. 71.):

unter a^m die Wurzel $\sqrt[\beta]{a^\alpha}$

" $(a^m)^n$ " " " $\sqrt[\delta]{(a^m)^\gamma}$ oder $\sqrt[\delta]{(\sqrt[\beta]{a^\alpha})^\gamma}$

" a^{mn} " " " $\sqrt[\beta\delta]{a^{\alpha\gamma}}$;

und es fragt sich nun, ob jetzt noch $(a^m)^n = a^{mn}$ d. h. $\sqrt[\delta]{(\sqrt[\beta]{a^\alpha})^\gamma} = \sqrt[\beta\delta]{a^{\alpha\gamma}}$ seyn werde, oder nicht. Es ist aber

$$(\sqrt[\beta]{a^\alpha})^\gamma = \sqrt[\beta]{[(a^\alpha)^\gamma]} = \sqrt[\beta]{a^{\alpha\gamma}}$$

nach (§. 59. n. 5.), welche Formel, wenn die Exponenten α, γ, $\alpha\gamma$ ganze Zahlen sind, schon gilt. — Folglich ist auch:

$$\sqrt[\delta]{(\sqrt[\beta]{a^\alpha})^\gamma} = \sqrt[\delta]{\sqrt[\beta]{a^{\alpha\gamma}}}, \quad \text{und letzteres wieder nach}$$

(§. 68. n. 4.) $$= \sqrt[\beta\delta]{a^{\alpha\gamma}}.$$ W. Z. E. W.

Gelten aber die Formeln (§. 55 — 59.) für beliebig ganze oder gebrochene Potenzen, so gelten auch die Formeln des (§. 60.) nicht allein für ganze, sondern auch für gebrochene Exponenten, weil solche durch bloßes wiederholtes Anwenden der vorgenannten Formeln sich ergeben haben.

Anmerkung. Man wird sich also der Formeln (§. 55 — 60.) in der Folge zur Verwandlung der Potenzen-Ausdrücke bedienen können, ohne sich darum zu bekümmern, ob die Potenzen ganze oder gebrochene sind, während jede ganze Potenz nach (§. 64.) und jede gebrochene Potenz nach (§. 71.) ihre völlig bestimmte Bedeutung hat. —

Note. Man hat z. B.

$a^{\frac{7}{3}} = a^{2+\frac{1}{3}} = a^2 . a^{\frac{1}{3}} = a^2 . \sqrt[3]{a^1}$ *); $a^{\frac{8}{3}} = a^{2+\frac{2}{3}} = a^2 . a^{\frac{2}{3}} = a^2 . \sqrt[3]{a^2}$;

oder auch $a^{\frac{7}{3}} = a^{3-\frac{2}{3}} = \frac{a^3}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^3}{\sqrt[3]{a^2}}$; $a^{\frac{8}{3}} = a^{3-\frac{1}{3}} = \frac{a^3}{a^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^3}{\sqrt[3]{a^1}}$;

$a^{\frac{2}{3}} . b^{\frac{2}{3}} = (ab)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(ab)^2}$; $\frac{a^{\frac{11}{3}}}{b^{\frac{11}{3}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{11}{3}} = \left(\frac{a}{b}\right)^3 . \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}} =$

$= \left(\frac{a}{b}\right)^3 . \sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^2} = \frac{a^3}{b^3} . \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}$; $(a^{\frac{2}{3}})^3 = a^2$; $(a^{\frac{3}{2}})^4 = a^6$;

$(a^{\frac{1}{3}})^2 = a^{\frac{2}{3}}$; u. s. w. f. — Auch noch $(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{3}}$, u. s. f.

§. 73. Erklärung.

Jede absolute (positive), jede negative ganze oder gebrochene Zahl, endlich auch die Null kann man immer als

---

*) Es wird zwar leicht zugegeben, daß $a^1 = a$ sey, aber genau genommen geht solches weder aus (§. 71.) noch aus (§. 64.) hervor. — Wir haben daher vorgezogen, zur Zeit noch nicht zu wissen, was a^1 bedeute, so wenig wir wissen können, was a^0, a^{-3}, $a^{-\frac{3}{4}}$ bedeuten mögen, weil diese Ausdrücke in den Definitionen (§. 64. und §. 71.) nicht enthalten sind.

eine Differenz $\alpha - \beta$ zweier ganzen oder gebrochenen aber absoluten (positiven) Zahlen schreiben, wo $\alpha \gtreqless \beta$ seyn wird, je nachdem die auszudrückende Zahl positiv, Null oder negativ ist. Da nun nach (§. 56. n. 2. und §. 72.) a^m oder $a^{\alpha-\beta} = \frac{a^\alpha}{a^\beta}$ ist, allemal so oft $\alpha > \beta$, also $\alpha - \beta$ oder m selbst eine absolute (positive) ganze oder gebrochene Zahl, so kann dieselbe Formel dazu dienen, auch negative und Null-Potenzen einzuführen.

Ist nehmlich $m = \alpha - \beta$, und sind dabei α und β beliebige ganze oder gebrochene Zahlen, also $\alpha \gtreqless \beta$, so verstehen wir unter a^m von nun an nichts weiter als den Quotienten $\frac{a^\alpha}{a^\beta}$, und nennen diese Potenz eine Differenz-Potenz (auch eine positive Potenz wenn $\alpha > \beta$, auch eine negative Potenz, wenn $\alpha < \beta$, auch eine Null-Potenz, wenn $\alpha = \beta$ ist). Der Dignand ist noch immer a, und m noch immer der Exponent. —

Anmerkung. Es sind nehmlich 2 Fälle möglich. Entweder es ist $\alpha > \beta$, und m eine ganze oder gebrochene Zahl; so daß a^m als ganze oder gebrochene (als positive) Potenz schon eine Bedeutung hat (§. 64. oder §. 71.), und dann enthält die eben gemachte Annahme keinen Widerspruch; weil dann wirklich $a^{\alpha-\beta} = \frac{a^\alpha}{a^\beta}$ ist; oder es ist α nicht $> \beta$, dann hat a^m d. h. $a^{\alpha-\beta}$ noch gar keine Bedeutung bisher erhalten, und es ist also dann in diesem (§. 73.) der Potenz a^m für diesen Fall ihre Bedeutung festgesetzt. — Doch mag man noch bemerken, daß $\alpha - \beta = \gamma - \delta$ seyn kann, ohne daß $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$ seyn müßte. Ist daher $m = \alpha - \beta$, so ist auch $m = \gamma - \delta$ (wo γ, δ, eben so wie α, β, ganze oder gebrochene absolute (positive) Zahlen sind) und nach unsrer eben aufgestellten Definition, wenn man $m = \alpha - \beta$ nimmt, stellt a^m den Quotienten $\frac{a^\alpha}{a^\beta}$ vor, während derselbe Ausdruck a^m den Quotienten $\frac{a^\gamma}{a^\delta}$ vorstellen würde, wenn $m = \gamma - \delta$ genommen werden sollte. Es läßt sich aber leicht er-

weisen, daß, so oft $\alpha-\beta=\gamma-\delta$ ist, dann auch $\frac{a^\alpha}{a^\beta}=\frac{a^\gamma}{a^\delta}$ seyn müsse, weil dann auch ist $\alpha+\delta=\beta+\gamma$ und $a^{\alpha+\delta}=a^{\beta+\gamma}$, also auch $a^\alpha . a^\delta = a^\beta . a^\gamma$, woraus zuletzt $\frac{a^\alpha}{a^\beta}=\frac{a^\gamma}{a^\delta}$ folgt. — Man mag also für m die Differenz $\alpha-\beta$, oder die gleiche Differenz $\gamma-\delta$ setzen, so liefert unsre Definition für a^m zwar die beiden verschiedenen Quotienten $\frac{a^\alpha}{a^\beta}$ und $\frac{a^\gamma}{a^\delta}$, die aber beide einander gleich sind. Die Definition der Differenz-Potenz selbst ist daher völlig bestimmt, und nicht bloß jede positive ganze oder gebrochene (§. 64. und §. 71.), sondern auch die Null-Potenz und die negative ganze oder gebrochene Potenz hat ihre völlig bestimmte Bedeutung. —

Es fragt sich aber nun noch, ob die Formeln der (§. 55 — §. 60.), welche mit Potenzen zu operiren lehren, und welche nach (§. 72.) für ganze und gebrochene (positive) Potenzen gelten, — ob dieselben auch noch gelten werden, wenn die vorkommenden Potenzen beliebig positive, oder negative, oder Null-Potenzen seyn sollten.

§. 74. Lehrsatz.

Die Formeln der (§. §. 55 — 60.) gelten allemal, es mögen die vorkommenden Potenzen positive ganze oder gebrochene, oder negative ganze oder gebrochene, oder Null-Potenzen seyn, in beliebiger Verbindung.

1. Beweis der Formel (§. 55. n. 1.) für den Fall, daß $m=\alpha-\beta$, $n=\gamma-\delta$, also $m+n=(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)$ ist, und m, n, m+n beliebige positive oder negative (ganze oder gebrochene) Zahlen oder Null sind. — Unter dieser Voraussetzung bedeutet nehmlich

die Potenz a^m den Quotienten $a^\alpha : a^\beta$
" " a^n " " " $a^\gamma : a^\delta$
" " a^{m+n} " " " $a^{\alpha+\gamma} : a^{\beta+\delta}$

und es fragt sich nun, ob jetzt noch $a^m . a^n = a^{m+n}$ d. h. ob $\frac{a^\alpha}{a^\beta}\cdot\frac{a^\gamma}{a^\delta}=\frac{a^{\alpha+\gamma}}{a^{\beta+\delta}}$ seyn werde, oder nicht. — Es ist aber nach (§. 41.):

$$\frac{a^\alpha}{a^\beta}\cdot\frac{a^\gamma}{a^\delta}=\frac{a^\alpha . a^\gamma}{a^\beta . a^\delta}.$$

In so ferne nun $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ absolute (positive, ganze oder gebrochene) Zahlen sind, ist nach (§. 72. und §. 55.):

$$a^{\alpha} . a^{\gamma} = a^{\alpha+\gamma} \quad \text{und} \quad a^{\beta} . a^{\delta} = a^{\beta+\delta}.$$

Folglich auch $\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} \cdot \frac{a^{\gamma}}{a^{\delta}} = \frac{a^{\alpha+\gamma}}{a^{\beta+\delta}}$, d. h. $a^{m} . a^{n} = a^{m+n}$.

2. Beweis der Formel (§. 56. n. 2.) ist genau wie der Beweis (§. 72. n. 2.).

3. Beweis der Formel (§. 57. n. 3.) für den Fall, daß $m = \alpha - \beta$ und beliebig positiv oder negativ oder Null ist. — Es bedeutet nehmlich nach (§. 73.):

die Potenz a^{m} nichts anders als den Quotienten $\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}$

" " b^{m} " " " " " " $\frac{b^{\alpha}}{b^{\beta}}$

" " $(ab)^{m}$ " " " " " " $\frac{(ab)^{\alpha}}{(ab)^{\beta}}$;

und es fragt sich nun, ob jetzt noch $a^{m} . b^{m} = (ab)^{m}$ d. h. ob $\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} \cdot \frac{b^{\alpha}}{b^{\beta}} = \frac{(ab)^{\alpha}}{(ab)^{\beta}}$ seyn werde, welches nach (§. 41.) und (§. 57. n. 3.) und (§. 72.) bejaht werden muß. *)

4. Beweis der Formel (§. 58. n. 4.) für den Fall, daß $m = \alpha - \beta$ beliebig positiv, negativ oder Null ist, genau so wie der (§. 72. n. 4.) geführte.

5. Beweis der Formel (§. 59. n. 5.) für den Fall, daß $m = \alpha - \beta$, $n = \gamma - \delta$, also $mn = (\alpha\gamma + \beta\delta) - (\alpha\delta + \beta\gamma)$ und m und n und mn beliebig positive oder negative (ganze oder gebrochene) Zahlen oder Null bedeuten. — Unter der letztern Voraussetzung stellt nehmlich

---

*) Man darf nur nicht übersehen, daß alle griechischen Buchstaben hier absolute ganze oder gebrochene Zahlen seyn sollen, und daß für solche Exponenten die Formeln bereits gelten, welche eben für den Fall der negativen oder Null-Potenzen hier noch erwiesen werden sollen.

die Potenz a^m den Quotienten $\frac{a^\alpha}{a^\beta}$

die Potenz $(a^m)^n$ den Quotienten $\frac{(a^m)^\gamma}{(a^m)^\delta}$

oder den Quotienten $\frac{(a^\alpha : a^\beta)^\gamma}{(a^\alpha : a^\beta)^\delta}$

und die Potenz a^{mn} den Quotienten $\frac{a^{\alpha\gamma+\beta\delta}}{a^{\alpha\delta+\beta\gamma}}$

vor, und es fragt sich also, ob jetzt noch $(a^m)^n = a^{mn}$ d. h. ob $\frac{(a^\alpha : a^\beta)^\gamma}{(a^\alpha : a^\beta)^\delta} = \frac{a^{\alpha\gamma+\beta\delta}}{a^{\alpha\delta+\beta\gamma}}$ seyn werde, oder nicht. Nun ist aber nach (§. 58. n. 4.):

$$(a^\alpha : a^\beta)^\gamma = (a^\alpha)^\gamma : (a^\beta)^\gamma,$$

also auch nach (§. 59. n. 5. und §. 72.): $= a^{\alpha\gamma} : a^{\beta\gamma}$. Eben so auch aus denselben Gründen:

$$(a^\alpha : a^\beta)^\delta = a^{\alpha\delta} : a^{\beta\delta}.$$

Folglich noch, nach (§. 41.) und (§. 55. n. 1. und §. 72.):

$$\frac{(a^\alpha : a^\beta)^\gamma}{(a^\alpha : a^\beta)^\delta} = \frac{a^{\alpha\gamma}}{a^{\beta\gamma}} : \frac{a^{\alpha\delta}}{a^{\beta\delta}} = \frac{a^{\alpha\gamma}}{a^{\beta\gamma}} \cdot \frac{a^{\beta\delta}}{a^{\alpha\delta}} = \frac{a^{\alpha\gamma+\beta\delta}}{a^{\alpha\delta+\beta\gamma}},$$

welches zu erweisen war.

Die Formeln des (§. 60.) sind aus denen der (§. §. 55 — 59.) abgeleitet, durch bloße wiederholte Anwendung der letztern; folglich gelten sie ebenfalls mit den andern zugleich, sowohl für ganze und gebrochene positive, als auch für ganze und gebrochene negative Potenzen, als auch wenn Null-Potenzen darunter vorkommen sollten.

§. 75. Zusatz.

Wollen wir nun die Bedeutung von a^1, a^0 und a^{-n} kennen lernen, so wird solche aus (§. 73.) augenblicklich bestimmt sich ergeben, während (§. 74.) mit allen diesen Potenzen zu arbeiten lehrt. Es ist nehmlich, wenn m eine beliebige ganze Zahl vorstellt: $1 = (m+1) - m$, also stellt (nach §. 73.) a^1 den Quotienten $\frac{a^{m+1}}{a^m}$ vor. Nun ist aber

nach (§. 54.): $a^{m+1} = a^m . a$; folglich $a^1 = \frac{a^m . a}{a^m} = a$;

d. h. a^1 fällt mit a selbst zusammen. — Eben so ist $0 = \alpha - \alpha$;

folglich $a^0 = \frac{a^\alpha}{a^\alpha} = 1$. — Endlich ist $a^{-n} = a^{0-n}$ nach

(§. 74. und §. 56. n. 2.) $= \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$.

Man hat also, mag n eine positive oder negative ganze oder gebrochene Zahl seyn:

1) $a^1 = a$;

2) $a^0 = 1$;

3) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$;

also auch:

4) $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$.

Note. So ist z. B. $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $1^0 = 1$, $1^1 = 1$; $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $z^0 = 1$, $z^1 = z$, $z^{-3} = \frac{1}{z^3}$, $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{10 \cdot 10} = \frac{1}{100}$. — Ferner ist $a^m b^{-n} = a^m . \frac{1}{b^n} = \frac{a^m}{b^n}$; eben so $\frac{a^m b^{-n}}{c^p d^{-q}} = \frac{a^m . d^q}{b^n . c^p} = \frac{d^q}{a^{-m} . b^n . c^p}$ $= \frac{1}{a^{-m} . b^n . c^p . d^{-q}} = \frac{a^m}{b^n . c^p . d^{-q}} = \frac{b^{-n} . c^{-p}}{a^{-m} . d^{-q}} = \frac{a^m . b^{-n} . d^q}{c^p} =$ u. s. f.

§. 76. Zusatz.

Es ist daher wie (§. 54.) auch jetzt noch immer, wenn auch m eine beliebige positive oder negative ganze oder gebrochene Zahl seyn sollte $a^m . a = a^{m+1}$, weil $a = a^1$, also $a^m . a = a^m . a^1$ ist.

Eben so ist aber auch:

$$\frac{a^m}{a} = a^{m-1}.$$

Note. So ist z. B. $a^{\frac{1}{3}} . a = a^{\frac{4}{3}}$; $a^{-\frac{2}{3}} . a = a^{\frac{1}{3}}$; $a^{-\frac{7}{4}} . a = a^{-\frac{3}{4}}$; $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a} = a^{-\frac{1}{3}}$; $\frac{a^{\frac{7}{4}}}{a} = a^{\frac{3}{4}}$; u. s. w. f.

Anmerkung 1. Uebrigens setzen alle diese Untersuchungen, wo gebrochene Potenzen vorkommen, in der Regel voraus, daß der Dignand derselben eine absolute (positive) Zahl oder Null ist, weil sonst nach (§. 64.) und (§. 71.) solche nicht nothwendig einen bestimmten Werth hätten. Wollte man diese Einschränkung noch beseitigen, d. h. wollte man zur allgemeinen Potenz gelangen, in welcher der Dignand wie der Exponent, allgemein jeden Ausdruck vorstellen kann, (wie dies allerdings von demjenigen gewünscht werden muß, welcher in der Wissenschaft weiter fortgehen und sie ihrer selbst wegen treiben will), so müßte man einen andern Weg betreten, ähnlich dem in dem „Lehrbuch der Arithmetik, Algebra und Analysis. I. II. Theil. Berlin 1822." befolgten. — Hier sollte nur der Begriff der gebrochenen und der negativen Potenz bestimmt herausgehoben und anschaulich hingestellt werden, während dabei der systematische Gang, dem Zwecke eines jeden Unterrichts gemäß, nicht vernachläßigt bleiben durfte, wenn wir auch in der Folge bei den praktischen Arbeiten nicht so strenge darauf sehen wollen, ob die Dignanden allemal absolute Zahlen sind oder nicht.

Anmerkung 2. Aehnliches gilt für die Wurzeln. Auch bei diesen wollen wir in der Folge (bei den praktischen Arbeiten) nicht so strenge darauf sehen, daß die Radikanden ihrer Definition zufolge (§. 64.), jedesmal absolute (positive) Zahlen sind. Wir denken uns dann unter der m^{ten} Wurzel aus a d. h. unter dem Ausdruck $\sqrt[m]{a}$ allezeit etwas, was mit m potenzirt, wieder a giebt, so daß $(\sqrt[m]{a})^m = a$ wird, mag dieses etwas nach unsern bisherigen Begriffen angebbar seyn, oder zur Zeit hier von uns nicht erklärt, so daß die Erklärung einem wissenschaftlichern Vortrage überlassen bleiben muß und namentlich aus dem schon öfter angeführten „Lehrbuche der Arithm. Alg. u. Analys." entnommen werden kann. Uebrigens werden die hier gegebenen Erklärungen für den gegenwärtigen Zweck meistens ausreichen, so daß nur selten der Fall eintreten wird, wo wir gezwungen sind, mit Begriffen symbolisch zu arbeiten, die, weil wir sie nicht erklärt haben, uns eigentlich noch völlig unbekannt geblieben seyn müssen.

Schlußfragen.

1) Kann man in einer Potenz z. B. 4^3 oder a^b, den Dignanden und den Exponenten mit einander verwechseln; d. h. ist allemal

$$a^b = b^a \quad \text{oder} \quad 4^3 = 3^4 \; ?? \; —$$

2) Werden die beiden Zahlen verschieden seyn, diejenige welche mit 2 (oder b) potenzirt, 64 (oder a) giebt, und diejenige mit welcher 2 (oder b) potenzirt werden muß, um 64 (oder a) zu erhalten?

3) Wodurch unterscheidet sich die ganze Potenz von der gebrochenen und diese wieder von der negativen?

4) Wie werden Potenzen mit einander multiplicirt oder durch einander dividirt, wenn sie einerlei Dignanden haben, wie aber, wenn sie einerlei Exponenten haben?

5) Wie wird eine Potenz auf's neue potenzirt, und wie wird mit einem Produkt potenzirt?

6) Wie wird der Werth von $8^{\frac{1}{3}}$ gefunden? — Und wie ergiebt sich der Werth von $8^{\frac{3}{10}}$? —

7) Wie werden Wurzeln, die einerlei Wurzel-Exponenten haben, mit einander multiplicirt und durch einander dividirt? Wie aber, wenn sie verschiedene Wurzel-Exponenten haben? — Wenn man sie vorher in andere verwandelt nach (§. 68. n. 5. oder §. 69.), welche einerlei Wurzel-Exponenten haben.

8) Kann man statt $\sqrt[m]{a}$ auch setzen die Potenz $a^{\frac{1}{m}}$? Und wenn man dies thun kann, können dann wohl für das praktische Arbeiten mit Wurzeln, die Lehrsätze der Wurzeln ganz übergangen werden, indem man für jede Wurzel die ihr gleiche Potenz schreibt, und nun bloß mit den Potenzen operirt? — Allerdings, wenn man so will.

9) Von den Potenzen 9°, 5°, 3°, 1°, 7°, welche hat den größesten Werth?

10) Von den Potenzen 1^3, 1^5, 1°, $1^{\frac{2}{3}}$, $1^{\frac{5}{9}}$, $1^{-\frac{2}{3}}$, 1^{-3}, 1^{-7}, $1^{-\frac{7}{4}}$, welche hat den größesten Werth?

11) Ist allemal für jeden Werth von m, $0^m = 0$, auch noch, wenn m eine negative Zahl ist?

12) Welche Potenz kann man statt $\sqrt{a}$ schreiben? Antw. Die Potenz $a^{\frac{1}{2}}$. —

13) Wenn a eine absolute Zahl ist, hat $\sqrt{a}$ dann einen oder zwei Werthe? Antw. Bis jetzt nur einen, der selber eine absolute Zahl ist.

14) Ist allemal für jeden Werth von a und b

1) $(a+b)^2 = a^2+b^2$ oder $(a+b)^m = a^m+b^m$,
2) $(a-b)^2 = a^2-b^2$ oder $(a-b)^m = a^m-b^m$,

oder sind diese Formeln unrichtig, und wie würde man die richtigeren erhalten können? —

Bayerische Staatsbibliothek München

15) Ist allemal für jeden Werth von a und b,

1) $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ oder $\sqrt[m]{a+b}=\sqrt[m]{a}+\sqrt[m]{b}$,

2) $\sqrt{a-b}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ oder $\sqrt[m]{a-b}=\sqrt[m]{a}-\sqrt[m]{b}$?

und warum sind diese Formeln oder Gleichungen unrichtig? —

16) Hat die Quadrat-Wurzel $\sqrt{a}$ auch einen Wurzel-Exponenten? Und welcher ist dieser?

Arithmetik.

Viertes Kapitel.

Anwendungen der bisherigen allgemeinen Sätze auf besondre Zahlen. Zahlensystem. Die Species der gemeinen Rechenkunst. *) Besondre Eigenschaften der Zahlen. Primzahlen und zusammengesetzte. Vergleichung der verschiedenen Zahlensysteme.

§. 77. Erklärung.

Um die ganze unendliche Masse der Zahlen besser übersehen und jede einzelne bestimmte mit jeder andern einzelnen bestimmten Zahl bequemer vergleichen zu können, bilden wir gleichförmige Abtheilungen, zwischen denen nun jede Zahl liegen muß. — Die nach der Neun (9) folgende Zahl nennen

*) Wir müssen hier darauf hinweisen, daß wir zwar bisher uns öfter schon der gemeinen Rechenkunst bedient haben, aber nur in den (mit der kleinsten Schrift gedruckten) Noten, welche nur der Erläuterung wegen hergesetzt worden sind und aus dem Vortrage selbst weggelassen werden können und müssen. Im Vortrage d. h. im Texte selbst dagegen, wurde nirgends eine Kenntniß der gemeinen Rechenkunst vorausgesetzt, sondern wir wollen im Gegentheil jetzt erst versuchen, ob die bisher vorgetragenen allgemeinen Lehren uns wohl in den Stand setzen werden, die Regeln der gemeinen Rechenkunst abzuleiten, d. h. sie zu erfinden, in so ferne sie uns noch nicht bekannt wären.

wir zehn oder einen Zehner und bezeichnen sie vorläufig durch z oder 1.z (§. 24.). — Zehn solche Zehner geben eine neue Zahl, die wir als eine Abtheilung herausheben und Hundert oder einen Hunderter nennen. Ferner nehmen wir zehn solche Hunderter und nennen diese neue Zahl Tausend oder einen Tausender. Dann bilden wir die Abtheilungen Zehntausend, zehn mal zehntausend oder Hunderttausend; dann zehn mal Hunderttausend oder Million u. s. w. f.; so daß immer das Zehnfache der vorhergehenden Zahl die neue der Zahlen bildet, die wir aus der ganzen Masse der Zahlen herausheben, und als Grenzen hinstellen, zwischen denen nun jede Zahl liegen muß. So bilden sich also noch die Zahlen als Abtheilungen, welche wir Zehn Millionen, Hundert Millionen, Tausend Millionen, Zehntausend Millionen, Hunderttausend Millionen, Billion, Zehn Billionen, Hundert Billionen, Tausend Billionen, u. s. w. f. nennen; so daß Millionen solche Billionen eine Trillion, Millionen solche Trillionen eine Quatrillion, u. s. w. f. genannt werden.

Diese willkührlich gedachten Grenzzahlen nennen wir Einheiten der verschiedenen Ordnungen, so nehmlich, daß zehn eine Einheit der 1ten Ordnung, Hundert eine Einheit der 2ten Ordnung, Tausend eine Einheit der 3ten Ordnung, Million eine Einheit der 6ten Ordnung u. s. w. f. genannt werden. Die 1 selbst heißt dann auch zum Unterschiede die Einheit der Nullten Ordnung, oder die einfache Einheit, auch ein Einer.

In jeder möglichen bestimmt herausgehobenen Zahl, welche einstweilen durch a bezeichnet seyn mag, ist nun eine dieser Einheiten der verschiedenen Ordnungen 1 oder 2 oder 3, 4, 5, 6, 7, 8 oder 9 mal enthalten, doch nicht mehr als 9 mal, weil man sonst die nächstfolgende Einheit nehmen und also zuletzt doch zu einer Einheit einer gewissen Ordnung gelangen müßte, welche in a weniger als zehnmal enthalten ist. So

kann z. B. die Einheit der 4ten Ordnung (zehntausend) in der gegebenen Zahl a, 7 mal enthalten seyn, aber nicht 8 mal, so daß ein Rest bleibt, kleiner als diese Einheit der 4ten Ordnung. In diesem Rest ist dann die nächstniedrigere, also die Einheit der 3ten Ordnung (Tausend) abermals entweder gar nicht enthalten (wenn der Reste kleiner als sie) oder doch weniger als zehnmal, also z. B. 6 mal, aber nicht 7 mal, so daß noch ein Rest bleibt, kleiner als diese Einheit der 3ten Ordnung (kleiner als Tausend). Die Einheit der nächstniedrigern oder 2ten Ordnung (Hundert) ist nun in diesem Reste vielleicht noch 8 mal enthalten, so daß ein neuer Rest bleibt, kleiner als eine Einheit der 2ten Ordnung (kleiner als Hundert). In diesem neuen Reste ist dann die Einheit der ersten Ordnung (Zehn) vielleicht noch 3 mal enthalten, und es bleiben dann noch vielleicht 9 einfache Einheiten (Einheiten der Nullten Ordnung); und unsre Zahl a enthält also:

sieben Zehntausender und sechs Tausender und acht Hundert und drei Zehner und Neun; und indem wir dies festsetzen und angeben, ist sie eben dadurch aus der ganzen Masse der Zahlen bestimmt herausgehoben und von jeder andern eben so bestimmt herausgehobenen völlig abgesondert und geschieden.

Da wir zehn durch z bezeichnet haben, so wird

zehn mal zehn oder Hundert durch $z.z$ oder z^2,
zehn mal Hundert oder Tausend durch $z.z^2$ oder z^3,
zehntausend durch z^4,
hunderttausend durch z^5,
Million durch z^6

u. s. w. f. bezeichnet werden können, so daß dann unsre Zahl a auch so geschrieben werden kann:

$$a = 7.z^4 + 6.z^3 + 8.z^2 + 3.z + 9,$$

und diese Summe schreiben wir in der Folge von nun an noch kürzer, bloß so: 76839, nennen diesen

letztern Ausdruck eine numerische Zahl und vergessen nicht, daß er eine Summe vorstellt, aus so viel Summanden als er Ziffern hat, während jeder dieser Summanden ein Produkt ist, aus der angegebenen Ziffer als den einen Faktor, und der sovielten Potenz von z (Zehn) als der Abstand der Ziffer von der am weitesten zur rechten stehenden Ziffer anzeigt.

Eine andre Zahl b kann so gegeben seyn, daß die Einheit der 5ten Ordnung (Hunderttausend) 4 mal, in dem Reste die Einheit der 4ten Ordnung gar nicht, sondern die Einheit der 3ten Ordnung 7 mal, die Einheit der 2ten Ordnung noch 1 mal, und die der ersten Ordnung gar nicht enthalten ist, sondern der letzte Rest nur noch 5 ist. — Dann besteht die Zahl b aus: Vier Hunderttausendern und sieben Tausend und ein hundert und fünf, und kann daher auch so geschrieben werden:

$$b = 4.z^5 + 7.z^3 + 1.z^2 + 5$$

aber nicht so 4715, weil nach der eben gemachten Annahme, die numerische Zahl (das Zeichen) 4715 die Summe $4.z^3 + 7.z^2 + 1.z + 5$ vorstellen würde, d. h. eine ganz andre Zahl als die gegebene b. — Um daher auch in diesem und in jedem ähnlichen Falle den Vortheil der kürzern Bezeichnung zu haben, bedienen wir uns der (§. 14.) definirten 0 (Null) in Verbindung mit den erwiesenen Sätzen (§. 15. n. 1. und §. 24. n. 1.). Nach diesen letztern Sätzen ist nehmlich $0.z^4 = 0$ und $0.z = 0$; und 0 kann als Summand beliebig hinzugeschrieben oder weggelassen werden (§. 15. n. 1.). Folglich kann man die obige Summe auch so schreiben:

$$b = 4.z^5 + 0.z^4 + 7.z^3 + 1.z^2 + 0.z + 5,$$

und dann auch bloß so:

407105 *),

---

*) Wir machen hier noch besonders darauf aufmerksam, daß die hier vorkommende Null, eben die im (§. 14.) definirte ist, welche hier ihrer

weil nach unsrer Annahme die letztere numerische Zahl (der letztere Ausdruck, Zeichen) nichts anders als eben die obige Summe bedeuten soll.

Anmerkung. Da $z^0=1$ und $z^1=z$ ist, so kann man z. B. oben statt $a=7.z^4+6.z^3+8.z^2+3.z+9$,
auch schreiben $a=7.z^4+6.z^3+8.z^2+3.z^1+9.z^0$;
und so in jedem andern ähnlichen Falle.

§. 78. Zusatz.

Dieser Erklärung zufolge bedeutet also:

das Zeichen 10 die Summe $1.z+0$ oder z selbst,
" " 100 " " $1.z^2+0.z+0$ oder z^2,
" " 1000 " " $1.z^3+0.z^2+0.z+0$ oder z^3,
" " 10000 die Zahl z^4
u. s. w. f., so daß also ist:

$$10=z;$$
$$100=z^2=10^2;$$
$$1000=z^3=10^3;$$
$$10000=z^4=10^4;$$
$$100000=z^5=10^5;$$
$$1000000=z^6=10^6;$$

u. s. f. Eine 1, welcher zur rechten n Nullen folgen, ist daher gleichbedeutend mit z^n oder mit 10^n.

Anmerkung. Weil demnach 10 mit z gleichbedeutend ist, so können wir überall, wo bisher z stand, das Zeichen 10 dafür setzen, so wie von nun an die Zahl zehn immer durch 10 vorstellen.

§. 79. Zusatz.

Statt zwei mal zehn, drei mal zehn, u. s. f., neun mal zehn, sagt man lieber zwanzig, dreißig, u. s. f., neunzig und dann spricht man die zweiziffrige Zahl
z. B. 47 aus „vierzig und sieben" oder

(§. 15. und §. 24.) näher ausgesprochenen Eigenschaften wegen, gerade zu dem gegenwärtigen Behufe benutzt werden kann.

„sieben und vierzig". Eben so wird die 3ziffrige Zahl z. B. 495 ausgesprochen: vierhundert und fünf und neunzig; so wie 407 bloß „vierhundert und sieben."

Eine 4 bis 6ziffrige Zahl dagegen spricht man dadurch aus, daß man von der rechten zur linken erst 3 Ziffern absondert, dann beide Abtheilungen jede für sich ausspricht, der ersten (zur linken) aber das Wort Tausend hinzufügt. So wird 4795 ausgesprochen: „viertausend, siebenhun„dert und fünf und neunzig"; desgleichen 97425: „sieben und neunzig tausend, vierhundert und „fünf und zwanzig" endlich 697405: sechshundert und sieben und neunzig tausend, vierhundert und fünf.

Der Grund dieser letztern Art, eine gegebene numerische Zahl (ein aus neben einander geschriebenen Ziffern bestehendes Zeichen) auszusprechen, liegt darin, daß

$$z^4 = z.z^3 \quad \text{und} \quad z^5 = z^2.z^3$$

ist. Die Zahl 697405 d. h. die Summe

$$6.10^5 + 9.10^4 + 7.10^3 + 4.10^2 + 0.10 + 5$$

läßt sich daher auch so schreiben:

$$(6.10^2 + 9.10 + 7).10^3 + 4.10^2 + 0.10 + 5$$

und wird dann, so geschrieben, erst ausgesprochen.

§. 80. Zusatz.

Jede mehr als 6ziffrige Zahl wird nun dadurch ausgesprochen, daß man lauter Klassen bildet, von der rechten zur linken Hand, immer 6 Ziffern in eine Klasse nimmt, und nun jede Klasse für sich ausspricht, dagegen ihr die Worte Million, Billion, Trillion u. s. w. noch hinzufügt, je nachdem sie, nach der linken zu gehend, von der ersten Klasse um 1, 2, 3, u. s. f. Klassen absteht.

So spricht sich $c = 60543{,}647656{,}235687{,}479025$ aus wie folgt: sechzigtausend fünfhundert und drei und vierzig Trillionen, sechshundert und sieben und vierzig tausend,

sechshundert und sechs und fünfzig Billionen, zwei hundert fünf und dreißig tausend, sechshundert und sieben und achtzig Millionen, vierhundert und neun und siebenzig tausend und fünf und zwanzig.

Der Grund davon ist derselbe im vorhergehenden (§. 79.) schon angegebene, der nehmlich, daß

$z^7 = z \cdot z^6$, $10^8 = 10^2 \cdot 10^6$, $10^9 = 10^3 \cdot 10^6$, $10^{10} = 10^4 \cdot 10^6$, $10^{11} = 10^5 \cdot 10^6$, $10^{13} = 10 \cdot 10^{12}$, $10^{14} = 10^2 \cdot 10^{12}$, $10^5 = 10^3 \cdot 10^{12}$, u. s. w. $10^{19} = 10 \cdot 10^{18}$, $10^{20} = 10^2 \cdot 10^{18}$, u. s. w. ist. Deshalb kann (von der rechten zur linken zu gehend) von dem 7 bis 12ten Summanden der Zahl c der gemeinschaftliche Faktor 10^6 oder Million, von dem 13 — 18ten Summanden in c der gemeinschaftliche Faktor 10^{12} oder Billion, u. s. w. herausgesetzt werden, und die so geschriebene Summe dann ausgesprochen.

Anmerkung. Eine in Worten ausgesprochene Zahl zu schreiben, d. h. in Ziffern auszudrücken, versteht sich nun von selbst. — Wir bemerken nur noch, daß man das erstere Geschäft das Zahlenlesen, das letztere dagegen das Zahlenschreiben zu nennen pflegt. — Beides zusammen nennt man Nummeriren.

§. 81. Zusatz.

Eine numerische Zahl wird mit 10 (Zehn), 100 (Hundert), 1000 (Tausend), u. s. w. f. überhaupt mit 10^n multiplicirt, wenn man ihr zur rechten 1, 2, 3, etc. oder n Nullen anhängt. — So ist z. B.

$347 \cdot 10 = 3470$; $347 \cdot 100 = 34700$, $347 \cdot 1000 = 347000$; $347 \cdot 100000 = 34700000$; u. s. f.; $347 \cdot 10^7 = 3470000000$.

Denn es ist $347 = 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 7$; also

$347 \cdot 10^4 = (3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 7) \cdot 10^4 = 3 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4$
$= 3 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 0 = 3470000$.

Und soll eine numerische Zahl z. B. 1423798 durch 10^3 oder 1000 z. B. dividirt werden, so schneide man von der rechten zur linken 3 Stellen ab, was links übrig bleibt 1423 ist dann die dem Quotienten nächst kommende ganze Zahl, und

die abgeschnittenen 798 im Zähler so wie der Divisor 10^3 oder 1000 im Nenner gesetzt, geben allemal:

$$\frac{1423798}{1000} = 1423 + \frac{798}{1000}. \quad -$$

Denn es ist $1423798 = 1423 . 1000 + 798$; daher der Satz nach (§. 34. n. 1.) außer Zweifel.

Anmerkung. Und indem man von einer numerischen Zahl, wenn sie am weitesten zur rechten Nullen zu stehen hat, 1, 2, 3, u. s. f., überhaupt n Nullen weglässt, so hat man die Zahl selbst durch 10, 100, 1000, u. s. f., oder durch 10^n dividirt.

§. 82. Zusatz.

Weil aber jede numerische Zahl nichts weiter vorstellt als eine Summe aus so viel Summanden als sie Ziffern hat, und weil jede Summe zugleich auch eine algebraische Summe ist (§. 17. Anmerkung.), so wird man sich der Sätze (§. 20. und §. §. 44—47.), (welche lehren wie man algebraische Summen zu einander addirt, von einander subtrahirt, mit einander multiplicirt und durch einander dividirt) bedienen können, um numerische Zahlen zu addiren, zu subtrahiren, zu multipliciren und zu dividiren, wenn man jenen Sätzen nur noch die Mittel hinzufügt, durch welche die jedesmaligen Endresultate schnellmöglichst auf die numerische Form gebracht werden können.

§. 83. Zusatz.

Um also zwei oder mehrere numerische Zahlen zu addiren, müßte man für jede die Summe setzen, welche sie vorstellt, und könnte dann nach (§. 20. n. 1.) zu den Summanden der einen Zahl, die der übrigen Zahlen in beliebiger Ordnung hinzuschreiben. Weil aber das Endresultat die numerische Form erhalten soll, so addirt man lieber die Ziffern der gleichnamigen Ordnungen zu einander, indem man (§. 26. n. 1. oder §. 45. Anmerkung) in Anwendung bringt, nach welchen (§. §.) z. B. $4.10^3 + 2.10^3 = (4+2).10^3$ und

$8.10^2+7.10^2+5.10^2+9.10^2=(8+7+5+9).10^2$ ist,
und $29.10^3=(2.10+9).10^3=2.10^4+9.10^3$.

Das Addiren zweier einfachen Ziffern geschieht das erstemal durch Zusammenzählen, nachher aus dem Gedächtniß.

Auf diese Weise ist das praktisch bekannte Geschäft des Addirens der numerischen Zahlen wissenschaftlich nachgewiesen und aus den vorhergeschickten allgemeinen Lehren abgeleitet.

Anmerkung. Wenn hier nicht, wie dies seyn sollte, das eigentliche praktische Geschäft des Addirens, wie solches in der gemeinen Rechenkunst gelehrt wird, wörtlich angegeben wird, so geschieht dies, um den Raum für andere weniger allgemein bekannte Gegenstände zu sparen.

§. 84. Zusatz.

Da eine Summe von einer andern Summe subtrahirt wird, wenn man die Summanden der erstern einzeln subtrahirt, und da jede solche einzelne Subtraktion wiederum dadurch verrichtet wird, daß man von einem beliebigen Summanden der zweiten Summe subtrahirt, so wird man, dies auf, Summen vorstellende numerische Zahlen anwendend, zwei numerische Zahlen subtrahiren, wenn man die Ziffern der gleichnamigen Ordnungen von einander subtrahirt, und im Falle eine solche Ziffer im Subtrahenden größer seyn sollte, als die (im Praktischen über ihr stehende) gleichnamige des Minuenden, zu der Ziffer des Minuenden eine Einheit der zunächst zur linken stehenden Ziffer, welche 10 Einheiten der in Rede stehenden Ordnung beträgt, hinzunimmt, dabei aber den Satz (§. 26. n. 2.) anwendet, nach welchem z. B.

$$7.10^3-4.10^3=(7-4).10^3$$

und $15.10^4-9.10^4=(15-9).10^4$ ist. —

Die nähere Auseinandersetzung des praktischen Geschäfts selbst mag uns, wie bei der Addition, erlassen seyn.

§. 85. Zusatz.

Um das Multipliciren zweier numerischen Zahlen aus dem vorhergehenden recht anschaulich abzuleiten, multipliciren

wir zuerst eine beliebige numerische Zahl, z. B. 4798 mit einer einziffrigen Zahl, z. B. 7. — Da nun 4798 eine Summe vorstellt, nehmlich die Summe $4.10^3+7.10^2+9.10+8$, und eine Summe nach (§. 26. n. 1. oder §. 44.) multiplicirt wird, wenn man jeden der Summanden multiplicirt und die Resultate addirt; da ferner jeder dieser Summanden, z. B. 4.10^3 ein Produkt ist und ein Produkt nach (§. 26. n. 4.) multiplicirt wird, wenn man einen der Faktoren nur multiplicirt und den andern Faktor unverändert läßt, so erhält man erstlich 8.7 oder 56 oder $5.10+6$; dann $9.7.10$ oder 63.10 also zusammen $68.10+6$ oder $6.10^2+8.10+6$; ferner noch $7.7.10^2$ oder 49.10^2 und also zusammen $55.10^2+8.10+6$ oder $5.10^3+5.10^2+8.10+6$; zuletzt noch $4.7.10^3$ oder 28.10^3 also zusammen

$$33.10^3+5.10^2+8.10+6$$

d. h. $3.10^4+3.10^3+5.10^2+8.10+6$;

d. h. 33586 ist das Resultat der Multiplikation.

Um also eine numerische Zahl 4798 mit 7 zu multipliciren, muß man nach und nach jede einzelne Ziffer mit 7 multipliciren, von dem Resultat der einzelnen Multiplikation, wenn solches zweiziffrig ist, die Ziffer rechts in ihre Stelle hinschreiben, dagegen die Ziffer links, da sie von einer um 1 höhern Ordnung ist, zu dem nächsten Produkt, welches von derselben höhern Ordnung ist, sogleich nach (§. 26. n. 1.) hinzunehmen.

Soll nun eine beliebige numerische Zahl 4798 mit einer andern beliebigen numerischen Zahl, z. B. 926 multiplicirt werden, so wird, weil 926 eine Summe $9.10^2+2.10+6$ vorstellt, die erstere Zahl 4798 mit jedem dieser Summanden 9.10^2, 2.10 und 6 multiplicirt werden müssen, und zuletzt alles addirt (§. 44.). Weil aber jeder dieser Summanden, z. B. 9.10^2 ein Produkt ist, so wird nach (§. 26. n. 4.) mit ihm multiplicirt, wenn man zuerst mit dem einen Faktor 9 multiplicirt, dann was herauskommt noch mit dem andern

Faktor 10^2 (welches letztere nach (§. 81.) dadurch geschieht, daß man rechts zwei Nullen anhängt). — Drückt man die angehängten Nullen durch Punkte aus, so wird man hienach erhalten:

4798	oder auch	4798
926		926
43182..		28788
9596.		9596.
28788		43182..
4442948		4442948

Daher die praktische Regel für das Multipliciren zweier numerischen Zahlen, daß man solche unter einander setzen, dann den Multiplikanden mit jeder einzelnen Ziffer des Multiplikator durch multipliciren, und die Resultate (die einzelnen Linien) unter einander setzen und addiren solle, bei dem Untereinandersetzen jedoch darauf sehend, daß jede Reihe um eine Stelle entweder rechts hinaus, oder links herein gerückt werde, je nachdem man mit der Ziffer am weitesten zur linken oder am weitesten zur rechten angefangen hat zu multipliciren.

Anmerkung 1. Weil die eine Form dieses praktischen Verfahrens bei der sogenannten abgekürzten Multiplikation der Decimalbrüche in Anwendung kommt, so mag noch ein Beispiel hier stehen. Sey nehmlich:

834097605 mit 13076079 zu multipliciren.

Man erhält die Form

834097605	oder die Form	834097605
13076079		13076079
834097605		7506878445
2502292815		5838683235
5838683235		5004585630
5004585630		5838683235
7506878445		2502292815
		834097605
10906726176690795		10906726176690795

Anmerkung 2. Das Multipliciren der einzelnen Ziffern aber ergiebt sich aus der Definition (§. 23.), nach welcher z. B. 6.4 oder 4.6 $= 6+6+6+6$ oder $= 4+4+4+4+4+4$ ist, während die Addition nachgehends 24, also $6.4=24$ giebt. — Hat man dieses

Geschäft für je zwei Ziffern einmal verrichtet, so kann man die Resultate in eine Tabelle schreiben (Ein mal Eins genannt) und besser noch sie ein für allemal im Gedächtniß behalten.

§. 86. Zusatz.

Nach (§. 47.) ergeben sich auf den Grund des (§. 46.) die einzelnen Glieder des gesuchten Quotienten, indem man sie entweder beliebig annimmt, oder dadurch findet, daß man ein Glied des Dividenden durch ein Glied des Divisors dividirt, übrigens das daselbst weiter angezeigte Verfahren befolgt. — Dies läßt sich unmittelbar auf die Division numerischer Zahlen anwenden; nur wird man, um die einzelnen Glieder (Summanden) des gesuchten Quotienten sogleich in der gewünschten numerischen Form zu erhalten, bei jeder Wiederholung des (§. §. 46. 47.) begründeten und angegebenen Geschäfts, zum jedesmaligen neuen Gliede (Summanden) des Quotienten, (obgleich dessen Annahme nach (§. 46.) ganz willkührlich ist) die höchste Ziffer der höchsten Ordnung nehmen müssen, (welche nach der Multiplikation mit dem Divisor, und nach der Subtraktion dieses Produkts noch einen Rest läßt, der in Ausnahmsfällen auch Null seyn kann). Dies bringt nehmlich den Vortheil, daß jedes folgende Glied (Summand) des gesuchten Quotienten immer eine Ziffer einer niedrigern Ordnung werden muß, als die vorhergehende ist; und nimmt man zum jedesmaligen Rest, allemal nur eine Ziffer des Dividenden herab (und setzt dabei 0 als Glied des Quotienten hin, wenn der Dividend doch noch kleiner seyn sollte als der Divisor), so verschafft dies den zweiten Vortheil, daß jede folgende Ziffer des Quotienten nothwendig immer von der nächst niedrigern Ordnung wird, als die vorhergehende, so daß diese Ziffern nur in ihrer Ordnung nebeneinander geschrieben werden dürfen, um den Quotienten sogleich auch numerisch geordnet zu haben.

So ergiebt sich das praktische Verfahren für die Division zweier numerischen Zahlen ohne weiters.

§. 87. Zusatz.

Bleibt aber nach völlig beendigtem Geschäft doch noch ein letzter Rest, der nicht Null ist, so nimmt man ihn zum Zähler, den Divisor zum Nenner, und schreibt diesen Bruch noch als neues Glied des gesuchten Quotienten hin, genau so, wie solches der Lehrsatz des (§. 46.) und die Folgerung des (§. 47.) unbedingt fordern.

Anmerkung. So findet sich z. B. wenn 29 durch 3 dividirt werden soll, $9\frac{2}{3}$ d. h. $9+\frac{2}{3}$ als Quotient d. h. $\frac{29}{3}=9+\frac{2}{3}$. — Soll ferner 27065483 durch 9275 dividirt werden, so erhält man die praktische Form:

Divisor	Dividend	Quotient
9275	27065483	$2918+\frac{1033}{9275}$
	18550	
	85154	
	83475	
	16798	
	9275	
	75233	
	74200	
	1033	

und man findet also:

$$\frac{27065483}{9275}=2918+\frac{1033}{9275}=2918\,\frac{1033}{9275},$$

indem das (+) Zeichen in solchem Falle gewöhnlich bloß hinzugedacht wird.

§. 88. Erklärung.

Eine ganze Zahl ist entweder eine absolute Primzahl (oder Primzahl schlechthin), oder sie ist eine zusammengesetzte Zahl, je nachdem sie nicht mehr als ein Produkt zweier andern ganzen Zahlen (größer als 1) betrachtet werden kann, oder noch in ein solches Produkt zerlegbar ist.

Sind die Faktoren, in welche eine zusammengesetzte Zahl zerlegt worden ist, Primzahlen, so nennt man sie einfache Faktoren, im entgegengesetzten Falle dagegen zusammengesetzte Faktoren der gegebenen Zahl.

Eine ganze Zahl a heißt „durch eine andre ganze Zahl" „b theilbar" wenn der Quotient $\frac{a}{b}$ eine ganze Zahl wird, d. h. also, wenn es eine ganze Zahl giebt, welche mit b multiplicirt, gerade a hervorbringt, also auch, wenn b mehremal genommen gerade a liefert. — Die Zahl b heißt dann ein Theiler von a, und die Zahl a umgekehrt ein Vielfaches von b. *)

Eine gerade Zahl wird diejenige ganze Zahl genannt, welche durch 2 theilbar ist; im Gegentheil heißt sie eine ungerade Zahl.

Note. Die erstern Primzahlen sind der Reihe nach: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 91, 97, u. s. f. Die übrigen dazwischen liegenden Zahlen, sind dagegen zusammengesetzte, die sich noch in ein Produkt von 2 oder mehr Faktoren zerlegen lassen.

Ferner ist 48 durch 6 theilbar; 27 durch 3, 33 durch 11, 15 durch 5, 12 durch 4, u. s. w. f. Eine Primzahl ist dagegen durch keine andere Zahl (größer als 1) theilbar. — Ferner ist 16 durch 3 nicht theilbar, auch 48 nicht durch 5, u. s. w. Es ist also 6 ein aliquoter, 5 dagegen ein aliquanter Theil von 48; und 48 ist ein Vielfaches von 6, auch von 8, auch von 4, von 12, von 16 und von 24.

§. 89. Zusatz.

1) Jede Zahl, wenn sie nicht an sich schon eine Primzahl ist, läßt sich doch allemal so lange in Faktoren zerlegen, bis ihre Faktoren alle Primzahlen oder einfache Faktoren sind.

Z. B. 120 läßt sich zerlegen in 6.12; aber 6 wieder in 2.3 und 12 wieder in 3.4, während dieses 4 noch zerlegt werden kann in 2.2, so daß also 120 besteht aus den einfachen Faktoren 2.2.2.3.5, welche nach (§. 32.) in beliebiger Ordnung mit einander multiplicirt allemal diese Zahl 120 wiederum geben.

---

*) Ist b ein Theiler von a, so nennt man wohl auch b einen aliquoten Theil von a; dagegen heißt b ein aliquanter Theil von a, wenn $\frac{a}{b}$ nicht eine ganze, sondern eine (ächte oder unächte) gebrochene Zahl ist.

2) Jede Zahl läßt sich nur auf eine einzige Art in einfache Faktoren zerlegen, d. h. jede Zahl, wenn sie nicht selbst schon Primzahl ist, besteht aus völlig bestimmten Primzahlen (einfachen Faktoren), die mit einander multiplicirt sie wieder geben, und dieselbe Zahl läßt sich nicht aus andern Primzahlen durch Multiplikation zusammensetzen.

Zerlegt man z. B. die Zahl 120 in 12.10, so läßt sich 10 zerlegen in 5.2 und 12 in 2.6 und 6 in 2.3, also 120 in 2.2.3.5.2, und dies sind genau dieselben einfachen Faktoren, die auch oben schon gefunden worden sind.

3) Jede ganze Zahl a ist nur durch ihre einfachen Faktoren, und dann noch durch jedes mögliche Produkt aus je 2, je 3, je 4 u. s. w. (zuletzt aus allen) dieser einfachen Faktoren theilbar. Jede andere Zahl, die nicht unter diesen enthalten ist, kann auch kein Theiler von a seyn.

So ist z. B. die Zahl 120, zunächst theilbar durch 2, durch 3 und durch 5; dann noch durch 2.2 oder 4, 2.3 oder 6, 2.5 oder 10; ferner durch 2.2.2 oder 8, 2.2.3 oder 12, 2.2.5 oder 20, 2.3.5 oder 30; endlich durch 2.2.2.3 oder 24, durch 2.2.2.5 oder 40, durch 2.2.3.5 oder 60 und zuletzt durch 2.2.2.3.5 oder 120 selbst theilbar; und außer diesen Zahlen kann es keine andern mehr geben, durch welche 120 getheilt (d. h. ohne Rest dividirt) werden könnte.

4) Ist daher eine Zahl a durch eine andere b theilbar, so müssen die einfachen Faktoren von b nothwendig unter denen von a mit vorkommen, und der Quotient $\frac{a}{b}$ hat dann zu einfachen Faktoren, die übrigen von a, die in b nicht vorkommen.

So ist z. B. 13860 durch 132 theilbar, und der Quotient ist 105. Nun sind die einfachen Faktoren von 13860 folgende: 2.2.3.3.5.7.11; und die einfachen Faktoren von 132 auch 2.2.3.11; und

$$\frac{2.2.3.3.5.7.11}{2.2.3.11} = 3.5.7,$$

so daß 3.5.7 die einfachen Faktoren des Quotienten 105 seyn werden.

§. 90. Erklärung.

Zwei oder mehr Zahlen a, b, c, u. s. w. haben einen gemeinschaftlichen Theiler m, und dieser heißt der größte, wenn es keine Zahl giebt, größer als m, durch welche alle diese Zahlen a, b, c, u. s. w. zugleich getheilt (ohne Rest dividirt) werden könnten. — Von zwei oder mehr Zahlen m, n, p, etc. ist dagegen eine Zahl a ein gemeinschaftliches Vielfache und dieses heißt das kleinste, wenn es keine andere ganze Zahl kleiner als a mehr giebt, welche durch jede dieser Zahlen m, n, p, etc. einzeln, getheilt (ohne Rest dividirt) werden könnte.

Solche Zahlen a, b, c, etc., die keinen gemeinschaftlichen Theiler haben (größer als 1), nennt man wohl auch relative Primzahlen oder Primzahlen unter sich, wenn auch jede derselben einzeln eine zusammengesetzte Zahl noch seyn sollte.

So z. B. haben die beiden Zahlen 168 und 252 einen gemeinschaftlichen Theiler 2, einen andern 3, einen dritten 7, einen vierten 4, einen fünften 6, ferner noch die gemeinschaftlichen Theiler 14, 21, 12, 28, 42, 84; aber 84 ist der größte gemeinschaftliche Theiler derselben beiden Zahlen 168 und 252. — Dagegen sind 8 und 27, eben so 44 und 15, relative Primzahlen oder Primzahlen unter sich, d. h. sie haben gar keinen gemeinschaftlichen Theiler. — Endlich haben die Zahlen 2, 4, 6, 8, 9, das Produkt 2.4.6.8.9 d. h. die Zahl 3456 zum gemeinschaftlichen Vielfachen; auch jede Zahl, die entsteht, wenn man diese Zahl 3456 noch mit irgend einer andern beliebigen Zahl multiplicirt; d. h. so wohl 3456, als auch z. B. 7×3456 d. h. 24192, lassen sich durch 2, durch 4, durch 6, durch 8, und durch 9 theilen (ohne Rest dividiren). Dagegen sind auch 1728, 1152, 576, 432, 288, 216, 144 und 72, solche gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen 2, 4, 6, 8 und 9; d. h. jede dieser Zahlen läßt sich ebenfalls durch 2 und durch 4, durch 6, durch 8 und durch 9 ohne Rest dividiren; aber 72 ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache dieser 5 Zahlen 2, 4, 6, 8 und 9.

§. 91. Zusatz.

1) Haben zwei Zahlen a und b einen gemeinschaftlichen Theiler m, so müssen nach (§. 89. n. 1.) die einfachen Fak-

toren von m unter denen von a und auch unter denen von b mit vorkommen; ist aber m der größte gemeinschaftliche Theiler derselben beiden Zahlen, so können a und b außer den einfachen Faktoren von m keinen andern einfachen Faktor mehr gemeinschaftlich haben.

So z. B. haben 140 und 315 die gemeinschaftlichen Theiler 5, 7 und 35. Die einfachen Faktoren von 140 sind 2.2.5.7, von 315 dagegen 3.3.5.7, und man sieht, wie die beiden Zahlen 140 und 315 nur 5.7 zu gemeinschaftlichen einfachen Faktoren haben, eben weil 5.7 oder 35 der größte gemeinschaftliche Theiler ist.

2) Ist eine Zahl a das gemeinschaftliche Vielfache mehrer gegebenen Zahlen m, n, p, etc., so müssen unter den einfachen Faktoren von a vorkommen, die einfachen Faktoren von m, und (nicht außerdem noch, sondern bloß) die einfachen Faktoren von n, und eben so ohne auf das vorhergehende Rücksicht zu nehmen, die einfachen Faktoren von p, u. s. w. f. — Ist dagegen diese Zahl a das kleinste gemeinschaftliche Vielfache, so darf sie unter ihren einfachen Faktoren keinen enthalten, der nicht unumgänglich nöthig ist, um durch jede der Zahlen m, n, p, etc. getheilt werden zu können.

Soll z. B. eine Zahl a das kleinste gemeinschaftliche Vielfache seyn von 14, 21, 6, 9, 15 und 8 und bedenkt man, daß die einfachen Faktoren von

14, 21, 6, 9, 15 und 8

beziehlich 2.7, 3.7, 2.3, 3.3, 3.5 und 2.2.2 sind, so muß diese Zahl a zu einfachen Faktoren haben, erstlich 2.7 um durch 14, dann noch 3 um auch durch 21 theilbar zu seyn. Und weil die Zahl a dann schon die Faktoren 2.3 hat, so ist solche auch bereits durch 6 theilbar. Sie muß ferner noch den Faktor 3, also überhaupt die Faktoren 2.7.3.3 enthalten, um durch 9 theilbar zu seyn, so wie noch 5 hinzutreten muß, damit sie durch 15 theilbar werde. Da die Zahl a nun bereits die Faktoren 2.7.3.3.5 enthält, so muß sie noch 2.2 in sich aufnehmen, also die einfachen Faktoren 2.7.3.3.5.2.2 haben, wenn sie auch noch durch 8 d. h. durch 2.2.2 theilbar seyn soll. Und wenn irgend einer dieser Fak-

toren fehlte, so würde sie durch irgend eine dieser Zahlen 14, 21, 6, 9, 15 oder 8 nicht theilbar seyn. — Das gesuchte kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 14, 21, 6, 9, 15, 8 ist daher 2.7.3.3.5.2.2 oder 2520.

§. 92. Aufgabe.

Von einer gegebenen Zahl a die einfachen Faktoren zu finden.

Auflösung. 1) Man dividire die gegebene Zahl a zuerst durch die kleinste Primzahl 2, und wenn die Division nicht ohne Rest statt findet, so versuche man dieselbe Division nach und nach mit den nächst größern Primzahlen 3, 5, 7, u. s. w. fort, bis endlich bei einer die Division ohne Rest statt hat. Diese Primzahl z. B. 3 ist nun der eine Faktor, der Quotient b dagegen der zweite und beide mit einander multiplicirt geben die Zahl a wieder.

2) Diesen Quotienten b behandle man genau so wie die Zahl a selbst, so daß man auch ihn wiederum in ein Produkt zerlegt von 2 Faktoren, dessen erster Faktor eine Primzahl ist, der zweite dagegen c seyn mag.

3) Die Zahl c wird auf's neue so zerlegt, u. s. f. bis man endlich die letzte Zahl in ein Produkt zweier Primzahlen zerlegt erhält.

4) Alle diese Primzahlen zusammen bilden dann die gesuchten einfachen Faktoren der gegebenen Zahl a.

Sey z. B. 630 in seine einfachen Faktoren zu zerlegen, so hat man zuerst nach (n. 1.) verfahrend 630=2.315; dann 315=3.105; 105=3.35 endlich 35=5.7, also 630=2.3.3.5.7.

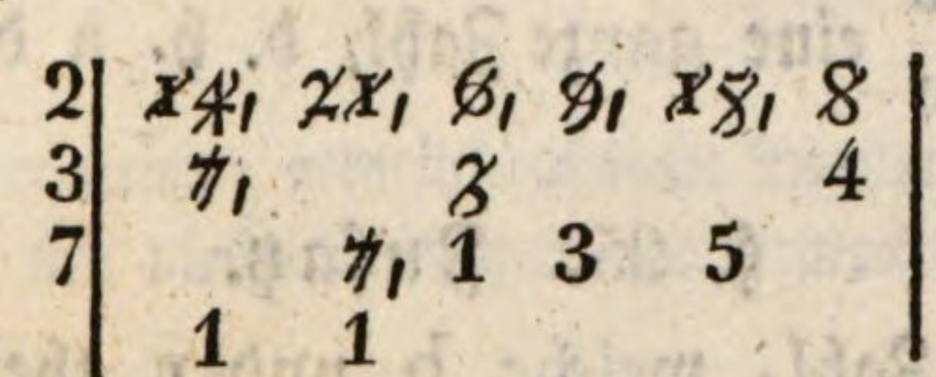
§. 93. Aufgabe.

Von mehren gegebenen Zahlen m, n, p, q, etc. das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zu finden.

Auflösung. Man nehme die einfachen Faktoren der Zahl m, dazu noch die einfachen Faktoren von n, welche nicht schon in m vorkommen, dazu noch die einfachen Faktoren von p, welche nicht schon unter den bisher genommenen Fak=

toren vorkommen, dazu diejenigen einfachen Faktoren von q, welche man bisher noch nicht hatte, u. s. w. f. Das Produkt aller auf diesem Wege genommenen einfachen Faktoren, ist nun das gesuchte kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

Als Beispiel nehme man das in der Note zu (§. 91. n. 2.) stehende. Diesem Geschäft kann man aber nachstehende praktische Form geben, in so ferne man beide Auflösungen der (§. §. 92. und 93.) mit einander in Verbindung bringt. Man schreibe die Zahlen m, n, p, q etc. neben einander hin, und suche nun Primzahlen auf, mit denen wenigstens zwei derselben getheilt (ohne Rest dividirt) werden können, dividire jede der Zahlen, welche durch sie getheilt werden kann, wirklich und schreibe die Primzahl als Divisor links vor einem Vertikalstrich, die Quotienten aber an die Stelle der Dividenden, letztere durchstreichend. Man fährt so fort, eine Primzahl links herauszusetzen, welche als gemeinschaftlicher Faktor zweier oder mehrer der gegebenen Zahlen m, n, p, q etc. oder der an ihre Stelle gesetzten Quotienten gefunden wird, bis endlich die rechts noch übrig gebliebenen Zahlen (Quotienten oder ursprünglich gegebene Zahlen) keinen solchen gemeinschaftlichen einfachen Faktor mehr haben. Zuletzt multiplicirt man alle links herausgesetzten Primzahlen, und alle rechts übrig gebliebenen Zahlen mit einander und hat so das verlangte kleinste gemeinschaftliche Vielfache. — Dieses praktische Verfahren nimmt sich für das obige Beispiel, wo für 14, 21, 6, 9, 15 und 8 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache gesucht wird, so aus:



und das gesuchte kleinste gemeinschaftliche Vielfache ist daher 2.3.7.3.5.4 oder 2.3.7.3.5.2.2, wie wir solches oben schon gefunden haben.

§. 94. Lehrsatz.

Dividirt man mit b in a, ergiebt sich dann ein nächstkleinster Quotient q (so daß $q.b < a$ aber $(q+1).b > a$ ist) und bleibt dann noch ein Rest r, so daß also $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$ ist, so muß allemal die Zahl m, welche Dividend a und Divisor b theilt, auch den Rest r theilen; und die Zahl n, welche

Divisor b und Rest r theilt, muß auch allemal den Dividenden a theilen.

Beweis. Denn nach der Voraussetzung ist:

1) $\frac{a}{b}=q+\frac{r}{b}$ oder 2) $a=bq+r$ oder 3) $a-bq=r$.

Dividirt man nun die Gleichung (3.) durch m links und rechts, so erhält man:

$$\frac{a-bq}{m}=\frac{r}{m} \quad \text{d. h.} \quad \frac{a}{m}-\frac{b}{m}\cdot q=\frac{r}{m}.$$

Da nun nach der Voraussetzung $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{m}$ ganze Zahlen sind, so ist auch $\frac{a}{m}-\frac{b}{m}\cdot q$ d. h. $\frac{r}{m}$ eine ganze Zahl, also r durch m theilbar.

Dividirt man dagegen die Gleichung (2.) durch n, so erhält man:

$$\frac{a}{n}=\frac{bq+r}{n} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{n}=\frac{b}{n}q+\frac{r}{n}.$$

Da nun $\frac{b}{n}$ und $\frac{r}{n}$ nach der Voraussetzung ganze Zahlen sind, so ist auch $\frac{a}{n}$ eine ganze Zahl, d. h. a durch n theilbar.

§. 95. Zusatz.

Die größte Zahl, welche b und r theilt, ist auch die größte, welche b und a zugleich theilt. — Denn die größere Zahl, welche b und a theilte, müßte ja auch r, also auch b und r zugleich theilen, was gegen die Voraussetzung ist.

§. 96. Aufgabe.

Zu zweien gegebenen Zahlen a und b den größten gemeinschaftlichen Theiler zu finden.

Auflösung. Man dividire mit der kleinen Zahl, welche b seyn mag, in die größere a, bestimme den nächstkleinsten Quotienten q und den Rest r, so ist der größte gemeinschaft-

liche Theiler von b und r, zugleich der größte von b und a (nach §. 95.). Dividirt man nun abermals mit r in b bestimmt den nächstkleinsten Quotienten q_1 und den Rest r_1, so ist der größte gemeinschaftliche Theiler von r und r_1 zugleich der größte von r und b, also auch der größte von a und b (nach §. 95.). Dividirt man nun abermal mit r_1 in r, bestimmt den nächstkleinsten Quotienten q_2 und den Rest r_2, so ist der größte gemeinschaftliche Theiler von r_1 und r_2, zugleich der größte von r und r_1 also auch der Größte von b und a. — So nun fortfahrend überzeugt man sich leicht, daß der größte gemeinschaftliche Theiler zwischen je zwei auf einander folgenden Resten r_2 und r_3, oder r_3 und r_4, oder r_4 und r_5, u. s. w. f. allemal auch der größte gemeinschaftliche Theiler seyn muß von b und a. — Setzt man also das Verfahren so lange fort, bis endlich der letzte Rest z. B. r_5, in dem vorletzten Rest r_4 dividirt, keinen neuen Rest läßt, so ist r_5 ein Theiler von r_4 und zugleich der größte Theiler von sich selber, also dieser letzte Rest (jetzt auch der letzte Divisor) r_5 nothwendig der größte gemeinschaftliche Theiler von r_4 und r_5, also auch der größte gemeinschaftliche Theiler von b und a.

Sey z. B. der größte gemeinschaftliche Theiler von 2436 und 924 zu suchen, so nimmt sich dieses Verfahren im Praktischen so aus:

924	2436	2	
	1848		
588	924	1	
	588		
336	588	1	
	336		
252	336	1	
	252		
84	252	3	
	252		
00			

also der letzte Rest oder der letzte Divisor 84 der gesuchte größte gemeinschaftliche Theiler.

§. 97. Zusatz.

Dieselbe Aufgabe wird auch dadurch gelößt, daß man beide gegebene Zahlen in ihre einfachen Faktoren zerlegt, und dann alle, den beiden Zahlen gemeinschaftlichen einfachen Faktoren in ein Produkt vereinigt, welches letztere dann der gesuchte größte gemeinschaftliche Theiler seyn wird.

So sind z. B. die einfachen Faktoren von 924 folgende 2.2.3.7.11, und die von 2436 die nachstehenden 2.2.3.7.29; und 2.2.3.7 d. h. 84 ist daher der gesuchte größte gemeinschaftliche Theiler von 924 und 2436.

§. 98. Zusatz.

Man kann sich aber dieses Verfahrens bedienen, um einen Bruch $\frac{b}{a}$ in seinen kleinsten Zahlen auszudrücken. Dividirt man nehmlich Zähler und Nenner durch den größten gemeinschaftlichen Theiler, so wird nach (§. 38. n. 10.) der neue Bruch dem gegebenen $\frac{b}{a}$ gleich seyn, dabei aber Zähler und Nenner nicht mehr durch eine und dieselbe Zahl getheilt, der Bruch selbst also nicht mehr in kleinern Zahlen ausgedrückt werden können.

So wird der Bruch $\frac{924}{2436}$, indem man Zähler und Nenner durch den oben gefundenen größten gemeinschaftlichen Theiler 84 dividirt, jetzt $= \frac{11}{29}$ und dieser dadurch in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt.

Im Praktischen kann man auch gewöhnlich sehr leicht die Brüche in ihren kleinsten Zahlen dadurch ausdrücken, daß man fortfährt Zähler und Nenner durch eine und dieselbe Zahl zu dividiren, die Division immer mit kleinen Zahlen versuchend. So würde sich das praktische Geschäft für den gegebenen Bruch $\frac{924}{2436}$ so ausnehmen:

$$\begin{array}{r|r|r|r} & \underline{4} & \underline{3} & \underline{7} \\ 924 & 231 & 77 & 11 \\ \hline 2436 & 609 & 203 & 29 \end{array};$$

indem man zuerst Zähler und Nenner durch 4, dann den Zähler und Nen-

ner des erhaltenen Bruches noch durch 3, und zuletzt noch Zähler und Nenner durch 7 dividirt.

§. 99. Lehrsätze.

Eine gegebene numerische Zahl ist durch 2, 4 oder 8 theilbar, je nachdem ihre letzte Ziffer zur rechten, oder ihre zwei letzten Ziffern zur rechten, oder ihre drei letzten Ziffern zur rechten, als numerische Zahl betrachtet, beziehlich durch 2, 4 oder 8 theilbar sind; sie ist dagegen durch 5 theilbar, wenn ihre letzte Ziffer 5 oder 0 ist.

Beweis. Es ist z. B. $2476 = 247.10 + 6$, und

$$\frac{2476}{2} = \frac{247.10}{2} + \frac{6}{2} = 247.\frac{10}{2} + \frac{6}{2};$$

da nun 10 immer durch 2 theilbar ist, so ist der Quotient eine ganze Zahl, wenn $\frac{6}{2}$ eine ganze Zahl ist, d. h. wenn die letzte Ziffer durch 2 theilbar, oder eine gerade Zahl ist.

Eben so ist $\frac{2475}{5} = \frac{247.10+5}{5} = 247.\frac{10}{5} + \frac{5}{5}$.

Ferner ist $\frac{2576}{4} = \frac{25.100+76}{4} = 25.\frac{100}{4} + \frac{76}{4}$; da nun 100 immer durch 4 theilbar ist, so fragt sich nur noch, ob 76 durch 4 theilbar ist. *)

Ferner ist $26536 = 26.1000 + 536$, weil nun 1000 allemal durch 8 theilbar ist, so darf nur noch 536 durch 8 theilbar seyn. **)

Note. So ist 6013572 nothwendig durch 2 theilbar, weil ihre letzte Ziffer eine gerade Zahl ist; sie ist auch nothwendig durch 4 theilbar, weil 72 oder auch weil $7.2+2$ d. h. 16 durch 4 theilbar ist; dagegen

---

*) Man mag nebenbei bemerken, daß $76 = 7.10+6 = 7.8+7.2+6$; und da 7.8 durch 4 theilbar ist, so ist auch 76 durch 4 theilbar, wenn $7.2+6$ eine durch 4 theilbare Zahl wird.

**) Auch hier kann man noch bemerken, daß $536 = 5.100+3.10+6 = 5.96+3.8+5.4+3.2+6$ ist, daß also, weil 96 und 8 allemal durch 8 theilbar sind, die Zahl 536 allemal durch 8 theilbar seyn muß, wenn $5.4+7.2+6$ d. h. 40 durch 8 theilbar ist. Dies gilt für jede andere 3ziffrige Zahl.

ist sie durch 8 nicht theilbar, weil 572 oder auch weil 5.4+7.2+2 d. h. 36 nicht durch 8 theilbar ist. Dagegen ist 6013576 durch 8 theilbar, weil 576 oder auch weil 5.4+7.2+6 durch 8 theilbar ist.

§. 100. Lehrsatz.

Eine numerische Zahl ist durch 3 oder durch 9 theilbar, wenn die Summe ihrer einzelnen Ziffern durch 3 oder durch 9 theilbar ist.

Beweis. Denn weil $10=9+1$, $100=99+1$, $1000=999+1$, u. s. w. ist, so läßt sich jede Zahl z. B. 4796235 d. h.

$4.1000000+7.100000+9.10000+6.1000+2.100+3.10+5$

auch so schreiben:

$(4.999999+4)+(7.99999+7)+(9.9999+9)+(6.999+6)+(2.99+2)+(3.9+3)+5$. — Da nun 9, 99, 999, etc. etc. allemal durch 3 und durch 9 theilbar ist, so ist diese ganze Zahl offenbar auch durch 3 oder durch 9 theilbar, wenn $4+7+9+6+2+3+5$ d. h. 36 durch 3 oder durch 9 theilbar ist.

Note. So ist z. B. die Zahl 4107913521 durch 3 theilbar, weil die Summe ihrer einzelnen Ziffern, $4+1+7+9+1+3+5+2+1$ d. h. 33 durch 3 theilbar ist; sie ist aber durch 9 nicht theilbar, weil dieselbe Summe der Ziffern, nehmlich 33, durch 9 nicht theilbar ist. — Dagegen ist die Zahl 700001000800002 gewiß durch 9 theilbar, weil die Summe der Ziffern 18 eine durch 9 theilbare Zahl ist.

§. 101. Zusatz.

Eine Zahl ist durch 6 theilbar, wenn sie durch 3 theilbar ist, und ihre letzte Ziffer zur rechten noch eine gerade Zahl ist. — So ist z. B. 300127512 durch 6 theilbar, dagegen 300127521 nicht durch 6 theilbar, auch nicht 300127502. *)

---

*) Denjenigen Leser, welcher die Lehren dieses 4ten Kapitels gründlicher, ausführlicher und strenger behandelt zu sehen wünscht, müssen wir auf das 5te und 6te Kapitel des „Lehrbuchs d. Arithm. Algebr. u. Analys." Berlin 1822 verweisen.

Bemerkung über Zahlensysteme.

Das im Eingange zu diesem Kapitel aufgestellte Zahlensystem heißt das Dekadische, weil man immer zehn Einheiten einer niedrigern Ordnung zu einer nächsthöhern Einheit verband. Uebersieht man aber den Gang mit Aufmerksamkeit, so fällt in die Augen, daß man eben so gut die ganze Masse der Zahlen dergestalt in Klassen theilen konnte, daß immer sechs Einheiten einer niedrigern Ordnung, die nächsthöhere Einheit bilden. Man hätte dann die Ziffern eingeführt 1, 2, 3, 4 und 5, die nächstfolgende Zahl sechs nur einstweilen z. B. durch das Zeichen 6 bezeichnet, so daß die Einheiten der verschiedenen Ordnungen durch:

$$6^0,\ 6^1,\ 6^2,\ 6^3,\ 6^4,\ 6^5 \text{ u. s. w.}$$

ausgedrückt gewesen wären; und dann würde jede mögliche gegebene Zahl auf die Form gebracht worden seyn, z. B.

$$5.6^4+2.6^3+1.6^2+4.6^1+3$$

oder $$2.6^5+0.6^4+0.6^3+4.6^2+2.6^1+1,$$

welche Summen dann wiederum kürzer bloß durch 52143 und 200421 bezeichnet werden konnten, so daß jedes solches Zeichen eine Summe vorstellt, in welcher die einzelnen Summanden Produkte sind, aus den Ziffern in die sovielte Potenz von 6, als die Stelle der Ziffer anzeigt. — Nach dieser Annahme bedeutet dann 10 soviel als $1.6+0$ d. h. 6, so daß man statt des Zeichens 6 das gleichbedeutende 10 setzen kann. Eben so hat man dann:

$$10=6$$
$$100=6^2=10^2$$
$$1000=6^3=10^3$$
$$10000=6^4=10^4 \quad \text{u. s. w. f.}$$

Das Eins und Eins sieht dann so aus:

$1+1=2$, $1+2=3$, $1+3=4$, $1+4=5$,
$1+5=10$, $2+2=4$, $2+3=5$, $2+4=10$,
$2+5=11$, $3+3=10$, $3+4=11$, $3+5=12$,
$4+4=12$, $4+5=13$, $5+5=14$.

Das Ein mal Eins dagegen so:

$1.1=1$, $2.2=4$, $2.3=10$, $2.4=12$, $2.5=14$,
$3.3=13$, $3.4=20$, $3.5=23$, $4.4=24$, $4.5=32$,
$5.5=41$, $10.10=100=6^2$, $10.100=1000=6^3$, u. s. f.

Und sollen die beiden Zahlen 42035 und 5234, zu einander addirt oder von einander subtrahirt werden, so giebt dies, das obige Eins und Eins zu Hülfe nehmend:

	42035		42035
addirt	5234	subtrah.	5234
Summe	51313	Differenz	32401

Dieselben beiden Zahlen mit einander multiplicirt geben aber, wenn man das obige Ein mal Eins zu Hülfe nimmt:

Multiplikand 42035
Multiplikator 5234

252232
210153
124114
334311

Produkt 353521002.

Die Division geht, wie man leicht sieht, auf dieselbe Weise von statten. — Und mit diesem Zahlensystem zu arbeiten, hat also keine andere Schwierigkeit, als 1) daß unsre Sprache dem dekadischen System angepaßt ist, daher für dieses neue System erst die neuen Worte gebildet werden müssen, nehmlich für 6 oder 10 das Wort sechs, für 6^2 oder 10^2 oder 100 ein neues Wort (so wie im dekadischen System das Quadrat von zehn, Hundert genannt wurde) ein neues Wort für 6^3 oder 10^3 oder 1000, u. s. w. f.; so daß dann eine jede solche Zahl, z. B.

431245

d. h. $4.10^5+3.10^4+1.10^3+2.10^2+4.10+5$

oder, wenn wir statt 10 das gleichbedeutende 6 setzen

$4.6^5+3.6^4+1.6^3+2.6^2+4.6+5$

eben so bequem ausgesprochen werden können, wie dies bei einer nach dem dekadischen System geordneten Zahl der Fall ist; 2) daß wir das Eins und Eins, und das Ein mal Eins, in den obigen Zeichen, oder nach den, diesen letztern entsprechenden Worten im Gedächtniß haben müssen, so wie solche in diesem neuen System sich ergeben.

Es versteht sich von selbst, daß man eben so gut immer neue und neue Zahlensysteme denken kann, bald mit zehn, bald mit sechs, bald aber mit einer beliebigen andern Menge erster Ziffern. — Diese Zahlensysteme heißen das Dodekadische, wenn die Potenzen von zwölf als die Einheiten der verschiedenen Ordnungen genommen werden, das dyadische, triadische, tetradische u. s. f., wenn die Potenzen von zwei, drei oder vier, u. s. f. die Einheiten der höhern Ordnung bilden.

Schlußfragen.

1) Giebt es absolute Primzahlen, welche zu gleicher Zeit auch gerade Zahlen sind?

2) Ist jede gerade Zahl auch eine zusammengesetzte?

3) Ist jede ungerade Zahl auch allemal eine (absolute) Primzahl?

4) Können zwei Zahlen Primzahlen unter sich (relative Primzahlen) seyn, wenn jede derselben eine zusammengesetzte Zahl ist?

5) Kann von zwei Zahlen, welche einen gemeinschaftlichen Theiler haben, die eine davon eine (absolute) Primzahl seyn?

6) Wie kann man untersuchen, ob zwei gegebene Zahlen Primzahlen unter sich sind? — Welches Verfahren führt allemal und bestimmt zur Beantwortung dieser Frage?

7) Wie kann der größte gemeinschaftliche Theiler von 3 und mehr Zahlen gefunden werden? —

z. B. von 112, 192, 480 und 384
oder von 299, 491 und 667
oder von 851, 1517, 407, 999 und 925? —

Dadurch, daß man zuerst den größten gemeinschaftlichen Theiler sucht für zwei dieser Zahlen; dann für diesen größten gemeinschaftlichen Theiler und die dritte Zahl, abermals den größten gemeinschaftlichen Theiler; — für diesen und die 4te der Zahlen wiederum den größten gemeinschaftlichen Theiler sucht, u. s. w. f. — Auch noch dadurch daß man jede der Zahlen in ihre einfachen Faktoren zerlegt.

8) Wie kann die nach dem dekadischen Zahlensystem genommene Zahl 40796, nach dem dodekadischen System geschrieben werden, wenn zehn durch Λ und eilf durch V bezeichnet wird (wo dann 10 die Zahl zwölf, 1V dagegen die Zahl zwölf plus eilf vorstellt, wo überhaupt die Potenzen von zwölf die Einheiten der höhern Ordnung bilden.)?

9) Wie kann umgekehrt die nach dem dodekadischen System geschriebene Zahl 1097V8Λ3 nach dem dekadischen System geschrieben werden?

10) Wie kann man die nach dem dekadischen System genommene Zahl 479 nach dem tetradischen System schreiben (in welchem die Potenzen von vier die Einheiten der höhern Ordnungen bilden.)?

11) Wie kann umgekehrt die nach dem tetradischen System geschriebene Zahl 30120132 nach dem dekadischen, und wie nach dem dodekadischen System geschrieben werden? —

12) Wie wird das Eins und Eins und das Ein mal Eins aussehen, im dodekadischen System; wie in demjenigen System, wo die Potenzen von 8 die Einheiten der höhern Ordnung bilden??

Arithmetik.

Fünftes Kapitel.

Von den Decimalbrüchen.

§. 102. Erklärung.

Jeden ächten oder unächten Bruch, dessen Nenner 10 oder irgend eine Potenz von 10 ist, z. B.

$$\frac{47}{1000},\ \frac{2396}{10000},\ \frac{327}{100},\ \frac{59623}{1000} \qquad \text{u. s. f.}$$

schreiben wir kürzer dadurch, daß wir den Zähler allein hinschreiben und in diesem Zähler ein Komma (Decimalstrich genannt) so setzen, daß rechts desselben gerade so viel Ziffern stehen, als der Nenner Nullen haben soll; weshalb vorher an den Zähler zur linken noch Nullen angehängt werden (welche bekanntlich den Zähler selbst nicht verändern), wenn er selber nicht aus soviel oder nur aus soviel Ziffern bestehen sollte, als der Nenner Nullen hat. — Man schreibt also die obigen Brüche der Reihe nach lieber so:

0,047; 0,2396; 3,27; 59,623; u. s. f.

Einen so geschriebenen Bruch nennt man aber einen Decimalbruch, und zwar die Stellen links vom Komma, die ganzen Stellen, die rechts vom Komma dagegen die Decimalstellen oder Decimalen.

Jeder andere Bruch heißt im Gegensatze mit dem Decimalbruch ein gemeiner Bruch.

§. 103. Zusatz.

Es bedeutet also jeder Decimalbruch denjenigen gewöhnlichen Bruch, dessen Zähler entsteht, wenn man das Komma ganz wegdenkt, und die so entstehende ganze Zahl ließt, dessen Nenner dagegen die sovielte Potenz von 10 ist, als der Decimalbruch Decimalstellen hat (d. h. Stellen hat rechts vom Komma), dessen Nenner also eine 1 mit soviel Nullen ist, als Decimalstellen vorhanden. — Es bedeutet z. B.

der Decimalbruch	so viel als
0,00057	$\frac{57}{100000}$
0,002476	$\frac{2476}{1000000}$
0,90006	$\frac{90006}{100000}$
0,07	$\frac{7}{100}$
0,70	$\frac{70}{100}$ oder $\frac{7}{10}$
0,070	$\frac{70}{1000}$ oder $\frac{7}{100}$
1,207	$\frac{1207}{1000}$
7,3	$\frac{73}{10}$ oder $7\frac{3}{10}$
256,03	$\frac{25603}{100}$ oder $256\frac{3}{100}$
100,017	$\frac{100017}{1000}$ oder $100\frac{17}{1000}$
47,6234	$\frac{476234}{10000}$ oder $47\frac{6234}{10000}$

u. s. w. f.

Und nimmt man (§. 81.) zu Hilfe, so überzeugt man sich augenblicklich, daß es bei einem Decimalbruch z. B. 417,0623 ganz einerlei ist, ob man ihn, der Definition gemäß, so ließt $\frac{4170623}{10000}$, oder ob man ihn als eine Summe betrachtet aus 417 (ganzen) Einheiten und noch dem ächten Decimalbruch 0,0623 d. h. $\frac{623}{10000}$; eben weil $417{,}0623 = \frac{4170623}{10000}$, aber auch nach (§. 81.) $= 417\frac{623}{10000}$ ist.

Anmerkung. Auch jede ganze Zahl z. B. 37 kann man in Form eines Decimalbruches schreiben, wenn man ihr zur rechten ein Komma setzt, und dann noch Nullen zur rechten anhängt; nehmlich

$37 = 37{,}0 = 37{,}00 = 37{,}000 =$ etc. etc. etc.

§. 104. Lehrsatz.

Jeder Decimalbruch z. B. 14,69854 kann als eine Summe betrachtet werden, erstlich aus den 14 ganzen, die links des Komma stehen, und dann noch aus den einzelnen Ziffern rechts vom Komma, wenn man die erste als eben so viele Zehntheile, die zweite als eben so viele Hunderttheile, die dritte als eben so viele Tausendtheile betrachtet, desgleichen die 4te, 5te, etc. auf Zehntausendtheilchen, Hunderttausendtheilchen u. s. w. f. bezieht.

Beweis. Denn es ist nach (§. 102.):

$$14{,}69854 = \frac{1469854}{100000} = \frac{1469854}{10^5}$$

$$= \frac{14.10^5 + 6.10^4 + 9.10^3 + 8.10^2 + 5.10 + 4}{10^5}$$

oder nach (§. 42. n. 2.):

$$= 14 + \frac{6.10^4}{10^5} + \frac{9.10^3}{10^5} + \frac{8.10^2}{10^5} + \frac{5.10}{10^5} + \frac{4}{10^5}$$

wenn man in jedem dieser Brüche Zähler und Nenner

durch die Potenz von 10, die im Zähler steht, dividirt, nach (§. 38. und §. 56. n. 2.):

$$= 14 + \frac{6}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{4}{10^5}$$

$$= 14 + \frac{6}{10} + \frac{9}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{4}{100000}.$$

§. 105. Zusatz.

Aus diesem Lehrsatze folgt am einleuchtendsten, daß Nullen, die zur rechten einem Decimalbruche angehängt werden oder Nullen, die am weitesten zur rechten eines Decimalbruchs stehen und weggelassen werden, den Werth des Decimalbruchs nicht verändern.

Note. So ist z. B. 0,7 = 0,70 = 0,7000 = 0,700000 = etc. etc.; eben so ist 42,00600 = 42,0060 = 42,006 = etc. etc. Ferner 4,35 = 4,350 = 4,3500 = 4,35000 = etc. etc.

Anmerkung. Es ist daher nichts leichter als gegebene Decimalbrüche unter einerlei Benennung zu bringen, d. h. in andere zu verwandeln, die alle einerlei Nenner haben. Man hängt nehmlich zu dem Ende einem jeden derselben rechts noch so viele Nullen an, daß alle gegebenen Decimalbrüche gleich viele Decimalstellen bekommen, wo sie dann nach (§. 102) auch einerlei Nenner haben. — Z. B. 4,7; 0,0047 und 13,36 geben beziehlich 4,7000; 0,0047 und 13,3600.

§. 106. Zusatz.

Soll ein Decimalbruch mit 10, oder 100, oder 1000, u. s. f. multiplicirt werden, so rückt man das Komma nur um 1, oder um 2, oder um 3, u. s. w. Stellen zur rechten; während das Komma um eben so viele Stellen zur Linken gerückt werden muß, wenn man durch 10, 100, 1000, etc. den Decimalbruch dividiren soll. — Um dieses Verrücken des Komma möglich zu machen, müssen zuweilen Nullen angehängt werden.

Note. So ist z. B. $643{,}729 \times 100 = 64372{,}9$; $643{,}72 \times 1000 = 643720{,}0 = 643720$; $\frac{643{,}72}{100} = 6{,}4372$; $\frac{643{,}72}{1000} = 0{,}64372$; $\frac{643{,}72}{100000} = 0{,}0064372$; $\frac{0{,}7}{100} = 0{,}007$; u. s. w.

Denn indem man z. B. das Komma um 2 Stellen zur rechten rückt, bekommt jede Ziffer den 100fachen Werth; also auch der ganze Decimalbruch. — Umgekehrt wird durch das Rücken des Komma um 2 Stellen zur linken, der Werth einer jeden Ziffer nur der 100te Theil, also auch der neue Decimalbruch selbst nur der 100te Theil des gegebenen.

Anmerkung. Dies gilt auch noch bei der Division einer ganzen Zahl durch 10, 100, 1000, u. s. w. Man denkt sich bei der ganzen Zahl das Komma am weitesten zur rechten, und rückt solches um 1, 2, 3, u. s. w. Stellen links. — So z. B. ist:

$$\frac{43}{10}=4{,}3;\quad \frac{43}{100}=0{,}43;\quad \frac{43}{1000}=0{,}043;\quad \frac{27965}{1000}=27{,}965;$$

$$\frac{27965}{1000000}=0{,}027965 \text{ u. s. w. f.}$$

§. 107. Lehrsatz.

Eine 1 irgend einer Decimalstelle eines Decimalbruchs ist immer größer, als alle rechts folgenden Decimalstellen zusammengenommen, so viel deren auch seyn mögen.

Beweis. Denn es ist $1 > 0{,}99999999\ldots$; folglich wenn man auf beiden Seiten z. B. durch 10^3 oder 1000 dividirt, nach (§. 50. n. 5.) und (§. 106.):

$$0{,}001 > 0{,}0009999999\ldots\ldots .$$

Welche andre Ziffern aber statt der 9 gesetzt werden mögen, so ist der Decimalbruch noch kleiner, also auch kleiner als 0,001.

§. 108. Zusatz.

Wenn man daher in einem Decimalbruch z. B. in 7,6438543276, irgend eine Decimal-Stelle um 1 vermehrt, die rechts folgenden Stellen dagegen alle wegläßt, so ist der neue Decimalbruch z. B. 7,65 oder 7,644 oder 7,6439 oder 7,64386 oder 7,643855 u. s. w. f. doch immer größer als der gegebene 7,6438543276.

Und wenn man von einem Decimalbruch am weitesten zur rechten beliebig viel Decimalstellen wegläßt, so ist der

neu entstehende Bruch von dem gegebenen doch um weniger verschieden, als eine Einheit der letzten Decimalstelle des neuen Bruches. — So ist z. B. 7,6438 um weniger als $\frac{1}{10000}$ von dem obigen Bruche 7,6438543276 verschieden.

§. 109. Aufgabe.

Gegebene Decimalbrüche zu einander zu addiren und von einander zu subtrahiren.

Auflösung. Man schreibe die gegebenen Decimalbrüche dergestalt unter einander, daß die Kommata (Decimalstriche) alle unter einander zu stehen kommen und links und rechts derselben die Ziffern in ihrer Folge; denke sich dann rechts die leeren Stellen (wenn welche vorhanden) durch Nullen ausgefüllt, so daß alle unter einander stehenden Decimalbrüche gleich viele Decimalstellen erhalten; stelle sich dann vor, daß die Decimalstriche gar nicht vorhanden wären und addire die dadurch entstehenden ganzen Zahlen zu einander, oder subtrahire sie von einander. Dem Resultat setzt man dann wiederum einen Decimalstrich dergestalt, daß er eben so viele Decimalstellen abschneidet, als irgend einer der untereinander stehenden Decimalbrüche haben (sie haben nehmlich alle gleich viele Decimalstellen, weil man zu denen, die deren weniger hatten, deshalb Nullen noch hinzugedacht hat.).

Beispiele.

Addition	
	4,7
	0,736
	37,02
	429,6
	87,64205
	0,9423
	1,076
Summe	561,71635

Subtraktion	
	47,027943
	9,6293
Rest.	37,398643

	47,0274
	0,358764
Rest.	46,668636

Beweis. Denn nach (§. 34.) werden Brüche addirt oder subtrahirt, sobald sie einerlei Nenner haben, wenn man ihre Zähler allein addirt oder subtrahirt, ihren gemeinschaft-

lichen Nenner aber als solchen beibehält. Dadurch aber, daß man sich an jedem Decimalbruch rechts Nullen angehängt denkt, so daß alle gleich viel Decimalstellen erhalten, haben die Brüche selbst (§. 105. Anmerkung) alle einerlei Nenner; und, indem man sich die Komma wegdenkt, hat man nach (§. 102.) die Zähler derselben. Diese sind nun addirt oder subtrahirt worden; und indem man dem Resultat dieselbe Menge von Decimalstellen gab, welche bei der Addition jeder Summand, bei der Subtraktion aber der Minuend und der Subtrahend hatten, hat man den gemeinschaftlichen Nenner beibehalten; ganz so wie es (§. 34.) für die Addition und Subtraktion der Brüche verlangt wird.

Anmerkung. Dies gilt allemal auch, wenn noch bloß ganze Zahlen mit darunter vorkommen sollten; man darf nur immer bemerken, daß man sich bei jeder ganzen Zahl, am weitesten zur rechten einen Decimalstrich und statt der Decimalstellen (rechts vom Striche) Nullen denken könne. Sollen z. B. 3,729 und 0,7 und 439 und 4,076 addirt werden, so hat man:

3,729
0,7
439,
4,076
Summe = 447,505.

Soll aber 27 von 391,0568 oder 4,076 von 31 subtrahirt werden, so hat man:

391,0568 — 27, = Differenz = 364,0568

31, — 4,076 = Differenz = 26,924.

§. 110. Aufgabe.

Zwei gegebene Decimalbrüche mit einander zu multipliciren.

Auflösung. Man denke sich die Komma weg, multiplicire die dadurch entstehenden ganzen Zahlen mit einander und gebe dem Resultat durch den Decimalstrich so viele Decimalstellen, als die beiden Faktoren zusammen genommen Decimalstellen haben.

Note. Ist also z. B. 0,796 mit 14,07 zu multipliciren, oder 0,0785 mit 1,097, so hat man:

1 4,07		und	1,097	
0,7 96			0,0 785	
8 4 42			5 485	
126 6 3			87 76	
984 9			767 9	
11,19972	=Produkt		0,0861145	=Produkt.

Beweis. Denn Brüche werden nach (§. 41. n. 16.) mit einander multiplicirt, wenn man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt. Durch das Weglassen (oder Wegdenken) des Komma erhält man aber nach (§. 102.) die Zähler. Also sind auch hier die Zähler mit einander multiplicirt und geben eine ganze Zahl als neuen Zähler. Ist nun der eine Nenner z. B. 100, so hat der Decimalbruch 2 Decimalstellen, und ist der andre Nenner z. B. 1000, so hat der Decimalbruch 3 Decimalstellen. Und die beiden Nenner mit einander multiplicirt, geben dann 100000 als neuen Nenner: daher der neue Bruch 5 d. h. 2+3 Decimalstellen haben muß.

Anmerkung. Dieses gilt auch noch, im Falle der eine Faktor eine bloße ganze Zahl seyn sollte, wenn man sich nur solche als einen Decimalbruch denken will, welcher gar keine Decimalstelle hat. — Soll z. B. 3,14159 mit 43 multiplicirt werden, oder 419 mit 0,0176, so hat man:

3,14159		und	419	
43			0,0176	
9 42477			2514	
125 6636			2 933	
			4 19	
Produkt	=135,08837		Produkt	=7,3744.

Der Grund davon fällt leicht in die Augen nach (§. 35. n. 3.).

§. 111. Zusatz.

Hat der eine Faktor z. B. 7 Decimalstellen, der andre deren z. B. 6, so wird das Produkt 6+7 d. h. 13 Decimalstellen haben. Die Multiplikation der nach Weglassung des Komma entstehenden Zähler (ganzen Zahlen) kann aber, wie (§. 85.) bemerkt ist, in zwei Formen geschehen. Soll

z. B. 4,769857 mit 0,9123796 multiplicirt werden, so wird man haben:

4,769857	oder	4,769857
0,9 123796		0,9 123796
4 2 928713		2 8 619142
4769857		42 9 28713
9539714		333 8 8999
14309571		1430 9 571
33388999		9539 7 14
42928713		47698 5 7
28619142		4 292871 3
4,3 51920 2217172		4,351920 2 217172.

§. 112. Zusatz.

Nun giebt es eine unendliche Menge von Fällen, in denen man von diesem gesuchten Produkte nicht alle, sondern nur die erstern 6 oder 7 Decimalstellen zu haben wünscht, ohne sich mehr um die übrigen zu bekümmern. In allen solchen Fällen kann man die letztern Decimalen gleich während der Multiplikation weglassen; und dazu ist namentlich die erstere der obigen Formen vorzüglich brauchbar. Weil nehmlich jede folgende Linie um eine Stelle zur rechten hinausgerückt, diese Stelle unten aber doch nicht gewünscht, sondern weggelassen wird, so kann man sogleich oben in der 2ten Linie statt die Stelle hinauszurücken, solche geradezu weglassen; in der dritten Linie werden die zwei hinausgerückten Stellen; in der 4ten Linie die 3 hinausgerückten Stellen, u. s. w. f. in der nten Linie die n—1 hinauszurückenden Stellen sogleich hinweggelassen; und das Ganze bekommt dann folgende Gestalt:

4,769857	oder auch	4,769857
0,9 123796		0,9 123796
4 2 928713		4 2 928713
476985		476986
95397		95397
14309		14309
3338		3339
429		429
28		29
4,3 619199		4,3 519202.

Von diesen beiden letztern Schemen unterscheidet sich das zur rechten nur dadurch von dem zur linken, daß in dem erstern (zur rechten) die letzte Ziffer der einzelnen Linien um eine Einheit vermehrt ist, so oft die zunächst zur rechten weggelassene Ziffer größer als 5 war. Indem man nehmlich theils wegläßt, theils zuviel nimmt, hebt sich beides dergestalt auf, daß selbst die letzte Ziffer des Endresultats noch richtig werden kann, die vorletzte dagegen in der Regel noch richtig seyn wird. — Man hat also in dem Schema rechts die ersten 7 Decimalstellen des gesuchten Produkts richtig.

§. 113. Zusatz.

Zugleicher Zeit mag man aber noch bemerken, daß bei dem Multipliciren des (§. 111. erste Form) die Einrichtung getroffen werden kann, daß man den Multiplikanden mit der ersten Ziffer 9 ganz durch multiplicirt; dagegen von dem Multiplikanden die Ziffer 7 zur rechten sich wegdenkt und nur das übrige des Multiplikanden mit der zweiten Ziffer 1 des Multiplikators durch multiplicirt, während sogleich rechts 2 Ziffern im Multiplikanden weggelassen werden, wenn mit der 3ten Ziffer 2 des Multiplikators durch multiplicirt wird, u. s. f.; so daß bei jeder neuen Ziffer des Multiplikators, mit welcher der Multiplikand durch multiplicirt werden soll, sogleich immer auch rechts vom Multiplikanden eine neue Ziffer weggelassen wird. Dann erhält man ohne weiteres die Form des (§. 112.), jedoch die letzten Ziffern rechts in jeder Linie um das zu klein, was von der Multiplikation der weggelassenen Ziffern des Multiplikanden mit hinüberzuzählen war. Man muß daher, um dieses nicht zu verlieren, die nächste der im Multiplikanden weggelassenen Ziffern im Gedanken noch multipliciren, um das zu erhalten, was bei der nun wirklich statt findenden Multiplikation noch mit hinüber zu zählen ist.

§. 114. Zusatz.

Wo das Komma (der Decimalstrich) hinkommen müsse, ist nun leicht zu entscheiden. Man weiß nehmlich, wie viel Decimalstellen das vollständige Produkt haben würde (so viele nehmlich als Multiplikand und Multiplikator zusammengenommen haben) und hat so viele Decimalen weggelassen, als der Multiplikator Stellen (nicht Decimalstellen, sondern ganze Stellen und Decimalstellen zusammengenommen) hat, mit denen multiplicirt wurde, weniger eine, folglich weiß man genau wie viel das nach (§. §. 112 und 113.) erhaltene abgekürzte Produkt noch Decimalstellen enthalten wird. —

Anmerkung. Man nennt dieses Verfahren (§. §. 112 — 114.) die abgekürzte Multiplikation der Decimalbrüche, und diese ist für die Anwendung von großer Wichtigkeit. — Da nehmlich eine 1 z. B. in der 6ten Decimal-Stelle (also $\frac{1}{1000000}$) mehr beträgt als alle nach der 6ten folgenden Decimalstellen zusammengenommen (§. 107.); da ferner in den Anwendungen $\frac{1}{1000000}$ den millionten Theil der Größe vorstellt, welche zur Einheit genommen ist und der millonte Theil, ja oft der hundertste oder tausendste Theil der Einheit in den Anwendungen so häufig ganz außer Acht gelassen werden kann, so wird man um so mehr in einem Decimalbruche alle nach der 6ten (ja oft schon alle nach der 2ten, 3ten) Decimalstelle folgenden Decimalen geradezu weglassen können, weil sie zusammen noch nicht eine Eins der rechts noch stehenden letzten Decimalstelle ausmachen.

Für die Praxis selbst mag man aber noch bemerken, daß man von den beiden zu multiplicirenden Decimalbrüchen, wenn die abgekürzte Multiplikation eintreten soll, allemal denjenigen zum Multiplikator nimmt, welcher die wenigsten Stellen hat, (ganze und Decimal-Stellen zusammgenommen).

Beispiele. Sey zu multipliciren 433,417 mit 0,008396, hernach auch noch 0,000893576 mit 200,97 so erhält man:

433,417	0,0008935 76
0,008 396	200,97
3 467 336	1787 152
130 025	80 42
39 007	6 25
2 600	0,17958 19 = Produkt.
3,638 968 = Produkt.	

§. 115. Aufgabe.

Zwei gegebene Decimalbrüche durch einander zu dividiren.

Auflösung. Man denke sich die Kommata weg und dividire die dadurch entstehenden ganzen Zahlen (die Zähler der Brüche) durch einander. Dem so gefundenen Resultat giebt man so viele Decimalstellen, als der Dividend deren hat, weniger der Anzahl derer im Divisor.

Beweis. Denn nach (§. 41. n. 17.) werden zwei Brüche durch einander dividirt, wenn man die Zähler durch einander und auch die Nenner durch einander dividirt. — Nun hat man auch hier zuerst die Zähler durch einander dividirt. Hat nun der Dividend m Decimalstellen, so ist sein Nenner 10^m, und hat der Divisor n Decimalen, so ist sein Nenner 10^n; beide Nenner durch einander dividirt geben daher $10^m : 10^n$ oder nach (§. 56. n. 2.) 10^{m-n}. Also ist 10^{m-n} der neue Nenner, und diesen hat man, sobald man m—n Decimalen durch den Strich abgeschnitten hat, wie die Auflösung verlangte.

Beispiel. Sey 4,7628 durch 0,98 zu diviren. Man hat:

Divisor	Dividend	Quotient
0,98	4,7628	4,86
	392	
	842	
	784	
	588	
	588	
	000	

Ist dagegen 4,762856 durch 1,45 zu dividiren, so hat man:

Divisor	Dividend	Quotient
1,45	4,762856	3,2847
	435	
	412	
	290	
	1228	
	1160	
	685	
	580	
	1056	
	1015	
Rest	41	

§. 116. Zusatz.

In dem letztern Beispiel blieb ein Rest 41 bei der Division der Zähler zuletzt noch übrig. Das, was aus der Division der Zähler hervorgeht, ist daher nach (§. 46. oder §. 87.) $=32847+\frac{41}{145}$; und der Quotient der Nenner ist $10^6:10^2$ oder 10^4 oder 10000. Daher der wahre Quotient nach (§. 41. n. 17.):

$$=\frac{32847+\frac{41}{145}}{10000}=\frac{32847}{10000}+\frac{41:145}{10000}=3{,}2847+\frac{41:145}{10000}.$$

Setzt man also für diesen wahren Quotienten bloß den Decimalbruch 3,2847, so hat man $\frac{41}{145}$ eines Zehntausendtheilchen (also ohngefähr den dritten Theil eines Zehntausendtheilchen) zu wenig.

So oft also bei der nach (§. 115.) zu verrichtenden Division der Decimalbrüche zuletzt noch ein Rest bleibt, so dividire man diesen Rest noch durch den Divisor (nehmlich durch die ganze Zahl, die nach Weglassen des Komma entsteht) d. h. man schreibe den Bruch hin (oben $\frac{41}{145}$, nach §. 27. Note) und dividire nun diesen Bruch (der schon <1 ist) noch durch den Nenner des Decimalbruches (oben 10000), den die Regel (§. 115.) an die Hand giebt, und man erhält dann das Theilchen, um welches der Quotient zu klein ist, sobald man den Rest ganz außer Acht lassen will.

Note. Soll also z. B. 0,0765438 durch 9,7 dividirt werden, so hat man:

Divisor	Dividend	Quotient
9,7	0,0765438	7891
	679	
	864	
	776	
	883	
	873	
	108	
	97	
	11	

Der wahre Quotient ist daher:

$$0{,}007891 + \frac{11:97}{1000000};$$

und wenn man den Rest 11 ganz außer Acht läßt, so erhält man nach (§. 115.) bloß 0,007891, so daß man dann $\frac{1}{9}\frac{1}{7}$ eines Millontheilchen zu wenig hat.

Anmerkung. Würde man in einem solchen Näherungs-Quotienten z. B. oben in 0,007891, die letzte Decimalstelle um 1 vermehren, also 0,007892 schreiben, so hätte man zuviel, weil das was dem Näherungs-Quotienten fehlt, um den wahren Quotienten zu geben, noch nicht ein ganzes Millontheilchen ausmacht.

§. 117. Zusatz.

Weil bei der Division der Zähler nach (§. 115.) in den meisten Fällen ein Rest bleiben wird, so ist es sehr wichtig, wenn man diesen Rest außer Acht lassen will, einmal, daß man den Unterschied zwischen dem genommenen Näherungs-Quotienten und dem wahren schätzen könne, wie dies nach (§. 116.) geschieht; dann auch, daß man diesen Fehler beliebig klein machen könne, um in den Anwendungen ihn genau so zu beschränken, daß er in der That unschädlich bleibe. — Dies letztere geschieht aber dadurch, daß man an den Dividenden (an den Decimalbruch, welcher dividirt werden soll) vor oder während der Division, rechts beliebig viel Nullen anhängt, welches nach (§. 105.) den Bruch nicht ändert. Indem nehmlich der Dividend durch die angehängten Nullen immer mehr und mehr Decimalstellen erhält, erhält auch der gesuchte Quotient deren immer mehr und mehr; und da der durch Nicht-Beachtung des Restes entstehende Fehler immer weniger als eine 1 der letzten Decimalstelle des Näherungs-Quotienten beträgt, so wird dieser Fehler offenbar desto kleiner, je kleiner das Theilchen dieser letzten Decimalstelle ist, d. h. je mehr der Näherungs-Quotient selbst Decimalstellen hat.

Dieses Anhängen von Nullen rechts an den Dividenden, wird aber unentbehrlich, wenn der Dividend weniger Decimalstellen haben sollte als der Divisor. — Es leistet ferner

auch dann die gehörigen Dienste, wenn der Dividend eine bloße ganze Zahl ist, weil jede ganze Zahl allemal als ein Decimalbruch betrachtet werden kann, wenn man rechts der Stelle der Einer ein Komma setzt und dann noch Nullen rechts anhängt in beliebiger Menge.

Beispiele. 1) Sey 7,59 durch 2,6 zu dividiren. Man hat:

Divisor	Dividend	
2,6	7,59	291923
	52	
	239	
	234	
	50	
	26	
	240	
	234	
	60	
	52	
	80	
	78	
	2	

Hätte man nun die Division abgebrochen, ohne eine Null anzuhängen, so hätte man erhalten als Näherungs-Quotient 2,9 und gefehlt um $\frac{5:26}{10}$ d. h. um $\frac{5}{260}$ oder um $\frac{1}{52}$ der ganzen Einheit. So wie man aber 1, 2, 3, 4 Nullen anhängt, so erhält man beziehlich

als Näherungs-Quotienten	und fehlt um
2,91	$\frac{24:26}{100}$ oder $\frac{12}{1300}$
2,919	$\frac{6:26}{1000}$ oder $\frac{3}{13000}$
2,9192	$\frac{8:26}{10000}$ oder $\frac{4}{130000}$
2,91923	$\frac{2:26}{100000}$ oder $\frac{1}{1300000}$.

Nimmt man also diesen letztern Näherungs-Quotienten, so fehlt man noch nicht um 1 Millontheilchen; und hängt man noch mehr Nullen an den Dividenden, d. h. setzt man die Division noch weiter fort, so erhält man die Näherungs-Quotienten in immer mehr und mehr Decimalstellen ausgedrückt, und ihr Unterschied von dem wahren Quotienten wird immer kleiner und kleiner und kann jede mögliche denkbare Kleinheit erreichen.

2) Sey die ganze Zahl 507 durch 3,14 zu dividiren. Man hat:

Divisor	Dividend	Quotient
3,14	507, ...	161,4649

314
1930
1884
460
314
1460
1256
2040
1884
1560
1256
3040
2826
214

Hier sind
die Näherungs-Quotienten und die Fehler

161 Ganze — $\frac{146}{314}$

161,4 — $\frac{204:314}{10}$, also $< \frac{1}{10}$,

161,46 — $\frac{156:314}{100}$, also $< \frac{1}{100}$,

161,464 — $\frac{304:314}{1000}$, also $< \frac{1}{1000}$,

161,4649 — $\frac{214:314}{10000}$, also $< \frac{1}{10000}$,

u. s. w. f.

Und vermehrte man die letzte Ziffer in 161,4649 um eine Eins, den Bruch selbst also um $\frac{1}{10000}$, so erhielte man 161,4650 oder 161,465; und dieser Näherungsquotient wäre dann um $\frac{100:314}{10000}$, also noch nicht um den dritten Theil eines Zehntausendtheilchen, zu groß.

3) Sey noch 1 zu dividiren durch 3,14159. Man erhält:

Divisor	Dividend	
3,14159	1, ...	31831

942477
575230
314159
2610710
2513272
974380
942477
319030
314159
4871

und der gesuchte Quotient ist also $= 0{,}31831 \ldots$.

Anmerkung. Wäre der Divisor eine bloße ganze Zahl, so würde die Regel (§. 115.) ebenfalls noch immer statt finden, nur müßte der Divisor als ein Decimalbruch betrachtet werden, welcher gar keine Decimalstelle hat, so daß dann der Quotient genau so viele Decimalen bekommen müßte, als deren der Dividend hat (die angehängten Nullen, wie sich von selbst versteht, mitgerechnet).

Sey z. B. 17,06385 durch 9718 zu dividiren. Man hat:

Divisor	Dividend	Quotient
9718	17,06385..	0,0017559

9718..
7 3458.
6 8026.
54325
48590
57350
48590
87600
87462
138

und dieser Näherungs-Quotient 0,0017559 ist noch nicht um den siebenzigsten Theil eines zehn Milliontheilchen kleiner als der wahre. — Der Grund davon fällt in die Augen nach (§. 36. n. 6.).

§. 118. Zusatz.

Wären Dividend und Divisor zugleich bloße ganze Zahlen, so könnte dem vorhergehenden zu Folge, die Division noch immer nach der Regel des (§. 115.) von Statten gehen. Man würde nehmlich an den Dividenden rechts Nullen anhängen, und da diese allein die Decimalen des Dividenden ausmachen würden und der Divisor gar keine Decimalstelle hat, so würde der Quotient allemal genau so viele Decimalstellen erhalten müssen, als man an den Dividenden Nullen angehängt hat.

Soll also ein gemeiner Bruch z. B. $\frac{5}{7}$ $\frac{7}{8}$ oder $\frac{3}{508}$ in einen Decimalbruch verwandelt werden, so hänge man rechts an den Zähler so viele Nullen, als der Decimalbruch Decimalstellen haben soll, dividire dann die so entstehende ganze Zahl durch den Nenner und gebe dem Quotienten den

Decimalstrich so, daß er genau so viele Decimalen erhält, als man dem Zähler Nullen beigefügt hat.

Beispiele. So findet sich für $\frac{5}{7}$:

7 | 50000000 | 7142857
49
10
7
30
28
20
14
60
56
40
35
50
49
1

so daß also $\frac{5}{7} = 0{,}7142857 + \frac{1:7}{10000000}$ oder $= 0{,}7142857$ ist, wenn man den Rest außer Acht lassen will.

Für den andern Bruch $\frac{7}{8}$ findet man:

8 | 7000 | 875
64
60
56
40
40
00

d. h. $\frac{7}{8} = 0{,}875$.

Für den dritten Bruch $\frac{3}{508}$ findet man endlich:

508 | 30000000 | 59055
2540
4600
4572
2800
2540
2600
2540
60

so daß man hat

$$\frac{3}{508} = 0{,}0059055 + \frac{60:508}{10000000},$$

oder es ist, wenn man den Rest, welcher weniger als den 8ten Theil eines zehn Millontheilchen beträgt, außer Acht lassen will, der Decimalbruch 0,0059055 statt des gemeinen Brnches $\frac{3}{508}$ zu nehmen.

Anmerkung. Es versteht sich von selbst, daß man auch hier mehr oder weniger Nullen anhängen, also, im Falle immer zuletzt noch Reste bleiben, nach und nach Näherungsbrüche in immer mehr und mehr Decimalstellen finden kann, welche von dem gegebenen gemeinen Bruche immer weniger und weniger verschieden sind, so daß der Fehler selbst (den man begeht, wenn statt des gegebenen Bruches einer dieser Näherungs-Decimalbrüche genommen wird) immer kleiner und kleiner wird, und kleiner werden kann als jede gegebene noch so klein gedachte bestimmte Zahl (Größe).

§. 119. Aufgabe.

Zu untersuchen, in welchen Fällen bei der Division zweier ganzen Zahlen dadurch, daß man an den Dividenden beliebig viel Nullen anhängen darf, die Division zuletzt keinen Rest mehr lassen wird, sondern aufhört; und in welchen Fällen, auch wenn man immerfort Nullen anhängt, die Division doch nie aufgehen kann, sondern immer noch ein letzter Rest übrig bleiben muß.

Auflösung. Nach (§. 89. n. 4.) ist eine Zahl durch eine andere nur dann theilbar, wenn die erstere alle einfachen Faktoren der andern unter ihren eigenen einfachen Faktoren mit enthält. — Hat man also die eine der gegebenen Zahlen a durch die andern b dividirt, und ist zuletzt noch ein Rest geblieben, so enthält a nicht alle einfachen Faktoren von b. Sind nun die einfachen Faktoren des Divisors b, die in den Dividenden a nicht mit enthalten sind, lauter 2 und 5, so wird durch Anhängen von gehörig viel Nullen an den Dividenden a die Division endlich aufgehen müssen und zuletzt kein Rest mehr bleiben, weil $10 = 2.5$, und jedes Anhängen von Nullen nichts weiter ist, als eine Multiplikation mit 10 und mit 10 u. s. w. f. Kommt aber unter den, dem Dividenden a fremden einfachen Faktoren des Divisors b nur ein einziger vor, der nicht 2 und auch nicht 5 ist, so wird die Division nie aufgehen, auch wenn man noch so viele Nullen anhängt. —

§. 120. Zusatz.

Wenn man daher einen gemeinen Bruch, der in einen Decimalbruch verwandelt werden soll, vorher erst in seinen kleinsten Zahlen ausdrückt (ihn so viel wie möglich aufhebt, d. h. Zähler und Nenner durch ihren größten gemeinschaftlichen Theiler dividirt) so daß Zähler und Nenner des gegebenen gemeinen Bruches keinen gemeinschaftlichen einfachen Faktor mehr haben können, so darf der Nenner nur noch lauter 2 und 5 zu einfachen Faktoren haben, wenn ein Decimalbruch soll gefunden werden können, der dem gegebenen genau gleich ist. — Sobald aber der Nenner des in den kleinsten Zahlen ausgedrückten Bruches, nur einen einzigen einfachen Faktor hat, der nicht 2 oder 5 ist, so ist es nie möglich, einen Decimalbruch zu finden, welcher dem gegebenen gemeinen Bruche genau gleich wäre, weil, so viele Nullen man auch an den Dividenden (Zähler) hängen mag, die Division doch nie aufgehen kann, sondern jedesmal noch einen letzten Rest lassen muß; wenn auch (nach §. 118. Anmerkung.) der Fehler, der durch Nichtachtung dieses letzten Restes entsteht, immer kleiner und kleiner wird, je weiter man die Division fortsetzt, und kleiner werden kann als jede mögliche gegebene noch so kleine Zahl (Größe).

Anmerkung. Aehnliches gilt für den Fall, wo nicht gerade zwei ganze Zahlen, sondern überhaupt, wie im (§. 115.), zwei beliebige Decimalbrüche durch einander dividirt werden sollen, weil diese Division auf die Division der ganzen Zahlen zurückgeführt ist.

§. 121. Zusatz.

Wenn bei der Division zweier ganzen Zahlen oder vielmehr bei der Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Decimalbruch, die Division nie aufgehen kann, auch wenn man noch so viele Nullen an den Dividenden hängt, so werden doch alle Reste kleiner seyn müssen als der Divisor. — Aber eben deshalb wird bei der fortgesetzten Division der-

selbe Rest endlich einmal wiederkehren müssen, der schon vorher einmal da war, weil, wenn (die ganze Zahl) b der Divisor ist, nur b—1 verschiedene Reste existiren können. Dann, weil immer bloß 0 angehängt wird, werden auch die neuen Partial-Dividenden dieselben, wie sie schon einmal da waren, daher auch die folgenden Reste und die folgenden Ziffern als Quotienten dieselben, wie sie schon einmal in derselben Ordnung müssen da gewesen seyn, und dies so lange fort bis derselbe erste Rest noch einmal wiederkehrt und daher die Ziffern im Quotienten ebenfalls noch einmal in derselben Ordnung wiederkehren, u. s. w. f. — Jede Division zweier ganzen Zahlen, die nie aufgeht, man mag auch an den Dividenden noch so viele Nullen anhängen, wird daher von einer gewissen Ziffer des Quotienten ab, periodisch dieselben Ziffern liefern, und so in's unendliche fort.

Beispiele. So findet sich, wenn man 4 durch 7 dividirt:

```
7 |  4,0  | 571428
   35
  ---
   50
   49
  ---
   10
    7
  ---
   30
   28
  ---
   20
   14
  ---
   60
   56
  ---
    4
```

Setzt man nun die Division noch fort, so hat man das obige 40 wiederum, und daher kehren dieselben Ziffern in derselben Ordnung wie vom Anfang an wieder, so daß man hat:

$\frac{4}{7}$ = 0,571428 571428 571428 57142857 .....

Sey ferner $\frac{5}{6}$ gegeben, so hat man:

```
6 |  5,0  | 83
   48
  ---
   20
   18
  ---
    2
```

und da nun derselbe Rest bleibt, wie vorher auch, so kehrt dasselbe 3 immer wieder, und man hat:

$\frac{5}{6}$ = 0,83333333.....

Ist endlich 5 durch 28 zu dividiren, so erhält man:

28 | 5,0 | 17857142
28
220
196
240
224
160
140
200
196
40
28
120
112
80
56
24

Da nun dieser Rest 24 oben schon einmal da war, so würde man, wenn die Division jetzt noch weiter fortgesetzt werden sollte, von der 3ten Ziffer 8 des Quotienten ab, genau dieselben Ziffern in derselben Ordnung erhalten, so daß man hat:

$\frac{5}{28} = 0{,}17857142\ 857142\ 857142\ 8571.....$

Noch andere Beispiele geben die Brüche:

$\frac{1}{44}, \frac{3}{44}, \frac{5}{44}, \frac{7}{44}, \frac{9}{44}, \frac{13}{44}, \frac{15}{44}, \frac{17}{44}, \frac{19}{44}$, etc. etc.

oder $\frac{1}{13}, \frac{2}{13}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{5}{13}, \frac{6}{13}, \frac{7}{13}, \frac{8}{13}$, u. s. w. f.

oder beliebige andere Brüche, welche in Decimalbrüche verwandelt werden sollen.

§. 122. Erklärung.

Jede gebrochene Zahl, deren Zähler und Nenner aus unendlich vielen Ziffern besteht (so daß sowohl der Zähler als auch der Nenner zu keiner Zeit vollständig ausgeschrieben werden kann), welche aber nichts desto weniger mit andern endlich ausgedrückten gebrochenen Zahlen verglichen werden kann (welche einen bestimmten Werth hat, entweder in so ferne sie einer andern endlich ausgedrückten gebrochenen Zahl gleich ist, oder in so ferne sie zwischen zwei bestimmten endlich ausgedrückten gebrochenen Zahlen liegt), heißt eine irrationale Zahl (eine Irrational-Zahl). — Jede andere ganze oder gebrochene Zahl, welche in einer bestimmten endlichen Menge von Ziffern ausgedrückt ist, wird dagegen eine rationale Zahl genannt.

§. 123. Zusatz.

So oft daher bei der Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Decimalbruch die Division nie aufgehen kann, auch wenn man noch so viele Nullen anhängt, so oft ist der gesuchte Decimalbruch ein irrationaler (eine irrationale Zahl); im entgegengesetzten Falle ein rationaler.

Uebrigens ist der irrationale Decimalbruch dem gegebenen gemeinen Bruch, welcher verwandelt werden sollte, genau und vollkommen gleich; wohl aber kann man in den Anwendungen nur Näherungswerthe dafür setzen, eben weil der irrationale Bruch nie vollständig ausgeschrieben werden kann.

§. 124. Erklärung.

Jeder irrationale Decimalbruch, in welchem die Decimalstellen parthienweise beständig in derselben Ordnung wiederkehren, heißt ein periodischer Decimalbruch, und zwar vollständig periodisch, wenn die Perioden auch seine erste Decimalstelle schon in sich begreifen, unvollständig periodisch dagegen, wenn die Perioden erst von einer gewissen Stelle ab eintreten.

Note. So ist z. B. der oben für $\frac{5}{28}$ erhaltene Decimalbruch
0,178571428571428571 ....
ein unvollständig periodischer, eben so der für $\frac{5}{6}$ erhaltene
0,83333 .... — Dagegen sind
0,571428571428571 .... und 0,5384615384615384 ....
vollständig periodische Decimalbrüche.

§. 125. Aufgabe.

Es ist irgend ein vollständig periodischer Decimalbruch gegeben, z. B. 0,20720720720720....

Man soll den gemeinen Bruch finden, aus dessen Verwandlung er entstanden.

Auflösung. Man nehme die Periode 207, dividire sie durch so viel neben einander geschriebene 9 als die Periode Stellen enthält, also hier durch 999 und der Bruch

$\frac{207}{999}$ ist der gesuchte, der noch in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt werden kann und $\frac{23}{111}$ liefert.

Beweis. Denn wenn x der gesuchte gemeine Bruch ist, welcher bei seiner Verwandlung den gegebenen periodischen Decimalbruch giebt, so giebt offenbar das 1000fache von x, genau denselben Decimalbruch, nur daß die erste Periode zu ganzen Stellen erhoben wird (nach §. 106.) — Man hat also nothwendig:

$$1000.x = 207,\ 207\ 207\ 207\ 20\ \ldots\ \text{in inf.}$$

und

$$x = 0,\ 207\ 207\ 207\ 20\ \ldots\ \text{in inf.}$$

Zieht man nun links und rechts das untere von dem obern ab, so erhält man:

$999.x = 207$, also, wenn man auf beiden Seiten durch 999 dividirt: $x = \frac{207}{999} = \frac{23}{111}$.

Beispiele. So findet sich:

$0{,}353535353\ldots = \frac{35}{99}$;
$0{,}3636363\ldots = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$;
$0{,}636363636\ldots = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$;
$0{,}7777\ldots = \frac{7}{9}$, u. s. w. f.

§. 126. Zusatz.

Hat man aber einen unvollständig periodischen Decimalbruch z. B. $0{,}347027027027\ldots$, so setze man:

$$x = 0{,}347027027027\ldots$$

und multiplicire mit 100 und mit 100000 so erhält man (nach §. 106.):

$$100.x = 34{,}702702702\ldots$$
$$100000.x = 34702{,}702702702\ldots;$$

folglich, wenn man die obere Gleichung von der untern subtrahirt:

$$99900.x = 34668$$

und, wenn man auf beiden Seiten durch 99900 dividirt:

$$x = \frac{34668}{99900} \text{ oder } = \frac{321}{925}.$$

Auf demselben Wege findet man:

$$0{,}53636363\ldots = \frac{536-5}{1000-10} = \frac{531}{990} = \frac{59}{110};$$

$$0{,}30505050\ldots = \frac{305-3}{1000-10} = \frac{302}{990} = \frac{151}{495};$$

$$0{,}3175555\ldots = \frac{3175-317}{10000-1000} = \frac{2858}{9000} = \frac{1429}{4500};$$

$$0{,}208333\ldots = \frac{2083-208}{10000-1000} = \frac{1875}{9000} = \frac{5}{24};$$ u. s. w.

§. 127. Aufgabe.

Einen Decimalbruch durch einen andern auf eine verkürzte Art zu dividiren.

Auflösung. Man verrichte anfänglich und so lange man will die Division auf die gewöhnliche (§. 115.) beschriebene Weise. Nachgehends aber lasse man statt jedesmal eine neue Ziffer im Dividenden herunter zu setzen (oder statt eine Null dem Dividenden anzuhängen) lieber allemal die letzte Stelle zur rechten des Divisors weg, und setze auf diese Art die Division so lange fort bis der Divisor nur noch eine einzige Stelle hat, und auch mit dieser noch dividirt ist.

Sey z. B. 4,0765439 durch 1,297582 zu dividiren, so wird die Division so aussehen:

Divisor	Dividend	Quotient
1,297582	4,0765439	3,1416478
	3892746	
	1837979	
	1297582	
Divisor = 129758	540397	
	519032	
Divisor = 12975	21365	
	12975	
Divisor = 1297	8390	
	7782	
Divisor = 129	608	
	516	
Divisor = 12	92	
	84	
Divisor = 1	8	
	8	
	0	

Anmerkung 1. Es ist übrigens leicht einzusehen, daß, weil bei dieser Art zu dividiren der Divisor beständig kleiner genommen wird, der Quotient allemal zu groß werden muß, und daß man sich namentlich nicht auf die beiden letzten Decimalstellen des Quotienten verlassen darf.

In manchen Fällen wird man die Fehler mehr ausgleichen, wenn man, wie dies bei Decimalbrüchen gewöhnlich geschieht, da wo eine Ziffer (des Divisors) weggelassen wird, welche größer als 5 ist, lieber die letzte stehen bleibende Stelle um 1 vermehrt. Der Divisor wird dadurch größer als er seyn soll; aber man fehlt doch weniger, als wenn man ihn um so viel zu klein nehmen wollte. Statt des obigen Divisors 12975 käme hiernach zu stehen 12976; statt des später folgenden 129 käme 130; dann statt 12 lieber 13 zu stehen. — Noch besser wird man aber thun, da wo der Divisor jedesmal mit der Ziffer des Quotienten multiplicirt wird, auch die letzte weggelassene Ziffer in Gedanken mit zu multipliciren, um zu wissen, was mit hinüber gezählt werden muß. Das obige Beispiel wird bei dieser letztern wichtigen Vorsicht, so aussehen:

```
1,297582 | 4,0765439 | 3,1416467
         3 892746
         ---------
          1837979
          1297582
          -------
129758 |   540397
           519032
           ------
12975 |     21365
            12976
            -----
1297 |       8389
              7785
              ----
129 |          604
               519
               ---
12 |            85
                78
                --
1 |              7
```

und dieser Quotient ist in der letzten Decimalstelle noch immer etwas zu groß.

Anmerkung 2. Wenn man bei dem praktischen Arbeiten sich mit Näherungs-Decimalbrüchen statt der wahren Ausdrücke begnügen will, so muß man möglichst sorgfältig sich bemühen, die Grenzen der Fehler kennen zu lernen, welche man begehen kann, um nicht zu bedeutend unrichtige Resultate zu erhalten. — Man hat z. B. den Decimalbruch 4,327579236... und will sich mit 4,327 begnügen, so ist dieser Bruch noch nicht um $\frac{6}{10000}$ zu klein, und in so ferne in dem vorliegenden praktischen Geschäft $\frac{1}{1000}$ der Einheit schon außer Acht gelassen werden dürfte, könnte man 4,327 recht füglich statt des wahren Bruches nehmen. — Gesetzt aber derselbe Bruch

soll nachher noch mit diesem andern 59658,76 multiplicirt werden, so würden $\frac{5 \text{ oder } 6}{10000}$, die man zu wenig hat, doch auch mit demselben letztern Bruch multiplicirt werden müssen, wenn man sie nicht weggelassen hätte, und da $\frac{5}{10000} \times 59658{,}76 = 29{,}82938$ geben, so würde das Resultat bloß wegen der $\frac{5}{10000}$, die man zu wenig hat, nahe um 30 Ganze zu klein werden, ein Fehler, welcher in der Anwendung die bedeutendsten Irrthümer hervorbringen müßte.

Man wird also in den Anwendungen den Fehler, der durch Multiplikation u. s. w. zu klein oder zu groß genommener Näherungs-Brüche entstehen kann, in jedem besondern Falle besonders überschlagen müssen, und es läßt sich hierüber im Allgemeinen keine Regel geradezu festsetzen.

Beispiele zur Ein-Uebung der vorgetragenen Lehren der Decimalbrüche.

I. Addition. (§. 109.).

1) $0{,}75+0{,}69=1{,}44$;
2) $7{,}09+2{,}643=9{,}733$;
3) $1{,}00054+237{,}69=238{,}69054$;
4) $65{,}706+0{,}9985+7{,}7=74{,}4045$;
5) $0{,}70009+37{,}86+27{,}918=66{,}47809$;
6) $6{,}297+12{,}29+407{,}9+18{,}7293+6{,}009+3227{,}85+987{,}65432+$
$+0{,}00089+16{,}230096+5{,}85=4688{,}810606$;
7) $0{,}729+69+43{,}73+1+147{,}62079+0{,}00649+3{,}89=265{,}97628$;
8) $8{,}65+17+7{,}94+9{,}437+113{,}67849+76{,}859+9{,}7+152{,}6043+$
$+7{,}85976=403{,}72855$.

II. Subtraktion. (§. 109.).

1) $1{,}536-0{,}678=0{,}858$;
2) $3{,}353-2{,}346=1{,}007$;
3) $17{,}69-0{,}279=17{,}411$;
4) $37{,}003-8{,}6=28{,}403$;
5) $37{,}003-30{,}1764=6{,}8266$;
6) $7-3{,}14159=3{,}85841$;
7) $217{,}69437-118=99{,}69437$;
8) $217-0{,}0037=216{,}9963$;
9) $12{,}64-7{,}69405=4{,}94595$;
10) $12{,}649834-4{,}79=7{,}859834$;
11) $96{,}5-0{,}000783=96{,}499217$;
12) $3{,}14159-1=2{,}14159$;
13) $4{,}69-1{,}3400037=3{,}3499963$.

III. Multiplikation. (§. 110. und Anmerkung zu §. 110.).

1) 3,14×7=21,98;
2) 2,693×8=21,544;
3) 3,14159×100=314,159;
4) 4,7×137=643,9;
5) 0,00037×347=0,12839;
6) 0,00006×4987=0,29922;
7) 0,00006×17=0,00102;
8) 0,23×1,17=0,2691;
9) 0,417×0,6=0,2502;
10) 5,007×0,39=1,95273;
11) 5,3×9,1=48,23;
12) 203,2432×2,365=480,670168;
13) 3,572×0,251=0,896572;
14) 12,1958×65,432=797,9955856;
15) 0,06691×0,5632=0,037683712;
16) 3,4965×279,85=978,495525;
17) 0,3546×0,00184=0,000652464;
18) 1179,28034×73,296845=86437,5282925273;
19) 3754,26×0,11682=438,5726532.

IV. Abgekürzte Multiplikation. (§. §. 111—114.).

1) 11,7928034×73,296845=864,375282;
2) 3,572×0,251=0,8965;
3) 20,32432×0,2365=4,806701;
4) 1,21958×0,65432=0,797995;
5) 3,546×0,184=0,6524;
6) 0,34965×0,27985=0,097849;
7) 0,6691×0,5632=0,37683;
8) 1,227003×623,74859=765,34139;
9) 1,1682×3,75426=4,38572;
10) 253323,266884×0,27534=69750,0283038;
11) 0,026876×0,002434=0,000065416;
12) 579,3246×0,1491=86,37729;
13) 27,65432×334=9236,543;
14) 85,736024×43,257698=3708,74303;
15) 0,620432×0,435786=0,2703756.

V. Division. (§. §. 115—118.).

1) 21,42 : 6=3,57;
2) 104,364 : 18=5,798;

3) 0,09571 : 17=0,00563;
4) 0,020439 : 3785=0,0000054;
5) 9,62 : 2,6=3,7;
6) 0,000085 : 0,017=0,005;
7) 8,172 : 0,072=113,5;
8) 1065,855558 : 7,695708=138,5;
9) 94,0328 : 0,437=215,1;
10) 7,864253 : 29,86=0,2633;
11) 0,845793 : 0,0428=19,76;
12) 3,95748 : 2,24=1,766;
13) 0,0764302 : 0,423=0,1806;
14) 96,85023 : 352=0,27514;
15) 852,0374 : 2460=0,34635;
16) 69750,028304 : 0,27534=253323,266884;
17) 796,358412 : 68,753492=11,5828067;
18) 6,93025 : 279,4=0,0248;
19) 5,821043 : 1180,7=0,00493;
20) 4,710385 : 0,0235=200,44;
21) 0,890256 : 2,786=0,319;
22) 968 : 362,84=2,667;
23) 752 : 29,7653=25,26;
24) 52,72257 : 211=0,24987;
25) 9,384 : 573,826=0,01635;
26) 720,85 : 94,823=7,602;
27) 87,6 : 36,572=2,395;
28) 930,26496 : 23,456=39,66;
29) 802,9 : 4265=0,1882;
30) 56,78 : 23540=0,0002412;
31) 9,576 : 0,6798=14,0864;
32) 52 : 425,3=0,122;
33) 6270 : 598=10,4849498;
34) 9800 : 487=20,123203;
35) 85,4 : 6,532=13,074;
36) 98 : 234=0,4188;
37) 657,3 : 268,57=2,4474;
38) 98,67 : 356,724=0,276;
39) 739 : 498,623=1,482;
40) 897 : 27653=0,0324.

VI. Abgekürzte Division. (§. 127.).

1) 963,42587 : 962,48735=1,00097509;

2) 836,0204005 : 537,84269=1,55439576;
3) 729 : 6352,49781=0,114758;
4) 6397,5248 : 49,375628=129,568474;
5) 39,906164 : 7,96587=5,009643;
6) 1,522797 : 1,907894=0,798156;
7) 29,073977 : 7,006509=3,796054:
8) 0,85736 : 2,78542=0,307;
9) 0,075432 : 0,23456=0,321;
10) 0,000063275 : 0,00003254=1,94.

VII. Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche (§. §. 118 — 121.).

1) $\frac{1}{2}$=0,5;
2) $\frac{1}{3}$=0,333333...
3) $\frac{1}{4}$=0,25;
4) $\frac{2}{3}$=0,66666...
5) $\frac{3}{4}$=0,75;
6) $\frac{1}{5}$=0,2;
7) $\frac{2}{5}$=0,4;
8) $\frac{3}{5}$=0,6;
9) $\frac{4}{5}$=0,8;
10) $\frac{1}{6}$=0,166666...
11) $\frac{5}{6}$=0,83333...
12) $\frac{1}{7}$=0,14285714...
13) $\frac{2}{7}$=0,285714285...
14) $\frac{3}{7}$=0,428571428...
15) $\frac{4}{7}$=0,571428571...
16) $\frac{5}{7}$=0,714285714...
17) $\frac{6}{7}$=0,857142857...
18) $\frac{1}{8}$=0,125;
19) $\frac{3}{8}$=0,375;
20) $\frac{5}{8}$=0,625;
21) $\frac{7}{8}$=0,875;
22) $\frac{1}{9}$=0,11111....
23) $\frac{2}{9}$=0,2222...
24) $\frac{4}{9}$=0,4444...
25) $\frac{5}{9}$=0,5555...
26) $\frac{7}{9}$=0,777...
27) $\frac{8}{9}$=0,888...
28) $\frac{1}{11}$=0,090909...
29) $\frac{2}{11}$=0,1818181...
30) $\frac{3}{11}$=0,272727...
31) $\frac{4}{11}$=0,3636363...;
32) $\frac{5}{11}$=0,454545...;
33) $\frac{6}{11}$=0,545454...;
34) $\frac{7}{11}$=0,636363...;
35) $\frac{8}{11}$=0,727272...;
36) $\frac{9}{11}$=0,818181...;
37) $\frac{10}{11}$=0,90909...;
38) $\frac{1}{12}$=0,083333...;
39) $\frac{5}{12}$=0,4166...;
40) $\frac{7}{12}$=0,58333...;
41) $\frac{11}{12}$=0,916666...;
42) $\frac{1}{407}$=0,002457002457...;
43) $\frac{37}{5700}$=0,00649122...;
44) $\frac{13}{4000}$=0,00325;
45) $\frac{23}{17200}$=0,0013372...;
46) $\frac{17}{1600000}$=0,00010625;
47) $\frac{1,4357}{17}$=0,0845;
48) $\frac{0,14918199}{19,848972}$=0,00751;
49) $(1,05)^4+2\cdot(1,05)^3=11,8125$;
50) $3\cdot(1,5)^2+1,5+5=13,25$;
51) $(1,58)^4+2\cdot(1,58)^3=14,12063696$;
52) $3.(1,58)^2+1,58+5=14,0692$;

53) $(1{,}6)^4+2\cdot(1{,}6)^3=14{,}7456$;
54) $3\cdot(1{,}6)^2+1{,}6+5=14{,}28$;
55) $(1{,}5)^4=5{,}0625$;
56) $(1{,}583)^4+2\cdot(1{,}583)^3=14{,}213124254321$;
57) $3\cdot(1{,}583)^2+1{,}583+7=16{,}100667$;
58) $(1{,}57)^4+2(1{,}57)^3-3\cdot(1{,}57)^2-(1{,}57)-5=0{,}14918199$;
59) $4\cdot(1{,}5)^3+6\cdot(1{,}5)^2-6\cdot(1{,}5)-1=17$;
60) $4\cdot(1{,}57)^3+6\cdot(1{,}57)^2-6\cdot(1{,}57)-1=19{,}848972$;
61) $(1{,}5775)^4+2\cdot(1{,}5775)^3=14{,}043900575039062 5$;
62) $3\cdot(1{,}5775)^2+1{,}5775-3=6{,}04197228$.

Schlußfragen.

1) Wodurch unterscheidet sich der Decimalbruch von einem gewöhnlichen Bruch?

2) Um wieviel wird ein Decimalbruch geändert, wenn man am weitesten zur rechten 3 Nullen anhängt? um wieviel, wenn man das Komma (den Decimalstrich) um 3 Stellen zur rechten rückt, oder um 3 Stellen zur linken? —

3) Wie wird ein Decimalbruch mit 100 multiplicirt, oder durch 100 dividirt? — —

4) Welcher Unterschied findet Statt zwischen dem Operiren mit Decimalbrüchen und zwischen dem Operiren mit ganzen (numerischen) Zahlen? —

5) Kann man auch ganze Zahlen dergestalt durch einander dividiren, daß der Quotient einem Decimalbruche gleich gefunden wird? —

6) Kann auch ein Decimalbruch durch irgend eine ganze Zahl, oder irgend eine ganze Zahl durch einen Decimalbruch dividirt werden? — und wie geschieht jedes? —

7) Wie kann der Fehler geschätzt werden, der begangen wird, wenn man bei dem Dividiren den letzten Rest ganz außer Acht läßt?

8) Wenn der Thaler 24 Groschen, der Groschen aber 12 Pfennige hat, wie wird der Groschen und der Pfennig als Decimalbruch eines Thalers ausgedrückt werden können?

Antw. 1 Groschen $=0{,}0416666\ldots$ Thaler,
1 Pfennig $=0{,}0034722\ldots$ Thaler.

9) Wie wird sich aber 3 Rthlr. 8 gGr. 9 Pf. als Decimalbruch eines Thalers ausdrücken lassen? — 3,364583 ... Rthlr.

10) Wie wird aber 2 Rthlr. 17 Sgr. 6 Pf. als Decimalbruch des Thalers ausgedrückt werden können, wenn 1 Rthlr. = 30 Sgr. und 1 Sgr. = 12 Pf. ist? — 2,5833 ... Rthlr.

11) Wenn die Ruthe 12 Fuße, der Fuß 12 Zoll, der Zoll 12 Linien

hat, wie werden sich 19° 7′ 8″ 9‴ als Decimalbruch einer Ruthe, eines Fußes und eines Zolles ausdrücken lassen? Antwort 19,64409 Ruthe =235,72916 Fuß = 2828,75 Zoll.

12) Aber 0,796432 Ruthen, wieviel machen sie in Fußen, Zollen und Linien? Antw. 9 Fuß 6 Zoll 8,234496 Linien.

13) Wenn der Meter 3,078444 Pariser Fuß hat, und der Preußische Fuß 139,13 Linien des Pariser Fußes enthält, den Fuß zu 144 Linien gerechnet; wie läßt sich der Preußische Fuß in Decimaltheilen eines Meters ausdrücken? 1 Preußischer Fuß =0,313853 Meter.

14) Und wenn eine Länge 5,70964 Meter hat, wieviel beträgt dies in Fußen, Zollen und Linien des Preußischen Gemäßes? — Und wieviel solche Fuße Zolle und Linien hat 1 Meter? — 1 Meter =3,18619949 Fuß =3 Fuß 2 Zoll 2,812726 Linien und 5,70964 Meter =18,192052 Fuß =18 Fuß 2 Zoll 3,655488 Linien.

15) Unter den obigen Angaben, wie läßt sich der Preußische Fuß, in Decimaltheilen des Pariser, und der Pariser Fuß in Decimaltheilen des Preußischen ausdrücken? 1 Preußischer Fuß =0,96618 Pariser Fuß, und 1 Pariser Fuß = 1,035 Preußische Fuß.

Arithmetik.

Sechstes Kapitel.

Erste Abtheilung
der praktische Regeln und Uebungen in der Ziffern- und Buchstaben-Rechnung.

Wir wollen nun die vorhergegangenen Lehren auf praktische Verwandlung gegebener Ziffern- und Buchstaben-Ausdrücke in Anwendung bringen. *)

I.

Sollen Produkte z. B. 8.12.15.20 und 10.18.24 durch einander dividirt, d. h. soll der Quotient $\frac{8.12.15.20}{10.18.24}$ numerisch ausgedrückt werden, so wird das Geschäft durch nachstehende Regeln oft bedeutend abgekürzt:

α) Kommen in beiden Produkten gemeinschaftliche Faktoren vor, so lasse man diese gegenseitig weg; z. B. statt $\frac{12.2.5.8.7.5}{20.5.7.15}$ setze man bloß $\frac{12.2.8.5}{20.15}$, die ge-

*) Wir versehen diese praktischen Regeln bloß mit fortlaufenden Nummern und lassen die Bezeichnung der (§. §.) nur da wieder eintreten, wo neue Lehrsätze oder neue Erklärungen beginnen.

meinschaftlichen Faktoren 5 und 7 beiderseits durchstreichend, nach (§. 42. n. 5. oder §. 38. n. 9.).

β) Kommen keine gemeinschaftlichen Faktoren mehr vor, so versuche man es, einen Faktor des Zählers und einen des Nenners, d. h. in jedem der beiden zu dividirenden Produkte einen der Faktoren, durch eine und dieselbe Zahl zu theilen (ohne Rest zu dividiren), wo möglich durch den größten gemeinschaftlichen Theiler dieser beiden Faktoren, und setze dieses Geschäft mit denselben oder mit zwei andern so genommenen Faktoren so lange wie möglich fort, die bei'm Theilen entstehenden Quotienten allemal statt der Faktoren selbst setzend. — Statt der vorstehenden $\frac{12.2.8.5}{20.15}$ erhält man z. B. zuerst $\frac{12.2.8.1}{20.3}$, oder weil man jedes 1 als Faktor weglassen kann $\frac{12.2.8}{20.3}$; hernach $\frac{4.2.8}{20.1}$ oder $\frac{4.2.8}{20}$, hernach $\frac{2.8}{5}$ oder $\frac{16}{5}$ oder $3+\frac{1}{5}$; so daß

$$\frac{12.2.5.8.7.5}{20.5.7.15} = 3\tfrac{1}{5}$$

sich ergiebt. (§. 38. n. 10. und §. 35. n. 3.).

Hätte man dagegen die numerische Multiplikation im Dividenden 12.2.5.8.7.5 wirklich verrichtet, so hätte man erhalten 33600, und im Divisor 20.5.7.15 = 10500; und beide durch einander dividirt, wenn man die beiden Nullen wegläßt (d. h. Dividend und Divisor durch 100 dividirt), geben $\frac{336}{105} = 3\,\frac{21}{105} = 3\tfrac{1}{5}$.

II.

Es sind gegeben die Ausdrücke:

1) $\frac{m(m-1)}{1.\ 2}$,

2) $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}$,

3) $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$,

4) $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}$,

5) $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1.2.3.4.5.6}$,

6) $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3.4.5.6.7}$,

und dergl. m. *)

Man setze statt m die Zahlen 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, u. s. f. und berechne in jedem einzelnen Fall die numerischen Werthe dieser Ausdrücke 1—6 oder auch die folgenden m_8, m_9, m_{10}, m_{11}, m_{12}, u. s. w. f.

Um eines dieser Beispiele durchzuführen, sey der Werth von m_{11}, für $m=20$ numerisch zu berechnen. Wenn $m=20$, so bedeutet m_{11} nichts weiter als den Quotienten

$$\frac{20.19.18.17.16.15.14.13.12.11.10}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11} \quad (\sigma)$$

welcher oben und unten ein Produkt von 11 Faktoren enthält. Erstlich kann man nun die gemeinschaftlichen Faktoren 11 und 10 oben und unten gegenseitig weglassen, dann unten 2.8 gegen das obere 16 (oder 2.9 gegen das obere 18), dann 3.6 unten gegen das obere 18, so wie 4.5 unten gegen das obere 20 durchstreichen; und man erhält dann statt m_{11} oder 20_{11} jetzt $\frac{19.17.15.14.13.12}{7.9}$. Nun dividire man oben das 14 durch 7 und lasse dagegen 7 unten weg; zuletzt die obern 15 und 12 jede durch 3 und

---

*) Weil wir solche Ausdrücke in der Folge noch oft betrachten, so wollen wir sie, um Raum zu ersparen, allemal in ihrer Folge kürzer durch m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7 u. s. f. bezeichnen, so also daß z. B. m_{10} den Quotienten

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)(m-7)(m-8)(m-9)}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}$$

vorstellen wird, während m_3 den Quotienten $\frac{m}{1}\frac{(m-1)}{2}\frac{(m-2)}{3}$ bedeutet.

lasse dagegen unten das 9 weg, und man wird erhalten m_{11} oder 20_{11} $=19.17.5.2.13.4$; oder wenn man wirklich multiplicirt, m_{11} oder $20_{11}=167960$.

Hätte man dagegen bloß 10 und 11 oben und unten gegenseitig weggelassen, die übrigen Faktoren im Dividenden und Divisor aber wirklich mit einander multiplicirt (im Ausdruck ♂), so hätte man erhalten, im Dividenden die Zahl 60949324800, im Divisor dagegen die Zahl 362880; und wenn man zuletzt beide durch einander dividirt, so ergiebt sich abermals dasselbe Resultat 167960.

Auf diesem Wege erhalten wir nun

für	die Werthe der Ausdrücke						
m_1,	m_2,	m_3,	m_4,	m_5,	m_6,	m_7,	m_8
2,	1,	0,	0,	0,	0,	0,	0
3,	3,	1,	0,	0,	0,	0,	0
4,	6,	4,	1,	0,	0,	0,	0
5,	10,	10,	5,	1,	0,	0,	0
6,	15,	20,	15,	6,	1,	0,	0
7,	21,	35,	35,	21,	7,	1,	0
8,	28,	56,	70,	56,	28,	8,	1
9,	36,	84,	126,	126,	84,	36,	9
10,	45,	120,	210,	252,	210,	120,	45
11,	55,	165,	330,	462,	462,	330,	165
12,	66,	220,	495,	792,	924,	792,	495
13,	78,	286,	715,	1287,	1716,	1716,	1287
14,	91,	364,	1001,	2002,	3003,	3432,	3003
15,	105,	455,	1365,	3003,	5005,	6435,	6435
16,	120,	560,	1820,	4368,	8008,	11440,	12870

u. s. f.

Und übersieht man noch diese Reihe der Zahlen, so entdeckt man leicht, daß eine jede derselben die Summe ist, aus zwei über ihr stehenden, nehmlich der gerade über ihr stehenden und der dieser zunächst vorhergehenden.

III.

Werden Brüche mit einander multiplicirt, so muß man nach (§. 42. n. 4. oder §. 41. n. 16.) die Zähler mit einander und auch die Nenner mit einander multipliciren; und man erhält also dann immer im Zähler und Nenner solche Produkte, auf welche die Regel (I.) angewandt werden

kann. — Und kommen nicht bloß Brüche zu multipliciren vor, sondern auch ganze Zahlen darunter, so darf man nur solche als Zähler betrachten, weil man jeder ganzen Zahl a die Form $\frac{a}{1}$ geben kann.

Es versteht sich von selbst, daß bei dem praktischen Arbeiten die Produkte selbst nicht noch besonders geschrieben, sondern bloß gedacht werden.

Hat man z. B. die Brüche und ganzen Zahlen

$$\tfrac{8}{9}.12.\tfrac{5}{6}.\tfrac{7}{12}.15.\tfrac{3}{10}.\tfrac{3}{4}.6.\tfrac{4}{5}$$

mit einander zu multipliciren (so giebt dies, wenn man oben und unten 12 und 12, 5 und 5, 4 und 4, 6 und 6, gegenseitig durchstreicht, dann das 9 unten gegen die beiden 3 oben wegfallen läßt, nachgehends das 15 oben und 10 unten durch 5 dividirt, und das 8 oben und diese eben erhaltene 2 unten durch 2) zuletzt bloß 4.7.3 oder 84.

Eben so findet man statt $\frac{2}{3}.\frac{3}{4}$ augenblicklich $\frac{1}{2}$, wenn man die 3 oben und unten wegläßt und noch das 2 oben und das 4 unten, durch 2 wegdividirt. Ferner findet man $\frac{2}{3}.\frac{7}{8}.\frac{6}{7}=\frac{1}{2}$; u. s. w. f.

IV.

Gemischte Zahlen (d. h. Summen aus einer ganzen Zahl und einem ächten Bruch z. B. $7\frac{2}{3}$, $5\frac{3}{4}$ u. s. w.) werden unter dem Bruch gebracht, d. h. werden in gleichgeltende unächte Brüche verwandelt, nach (§. 39. n. 11.). Danach erhält man z. B. $7\frac{3}{4}=\frac{31}{4}$; $5\frac{2}{3}=\frac{17}{3}$; $129\frac{5}{6}=\frac{779}{6}$; u. s. w. f.

Umgekehrt dagegen sollen aus einem unächten Bruche die Ganzen herausgeschafft werden (d. h. soll man den unächten Bruch in eine gemischte Zahl verwandeln), so geschieht dies nach (§. 46.), indem man die größtmöglichste ganze Zahl als ersten Theil (Summanden) nimmt, so daß ein Rest bleibt bei der Division, kleiner als der Divisor. So findet man $\frac{29}{3}=9\frac{2}{3}$; $\frac{35}{6}=5\frac{5}{6}$; $\frac{49}{8}=6\frac{1}{8}$; u. s. w. f.

V.

Sollen gemischte Zahlen (d. h. Summen aus einer ganzen Zahl und einem ächten Bruche z. B. $5\frac{3}{4}$, $7\frac{2}{3}$ u. s. f., welche statt $5+\frac{3}{4}$, $7+\frac{2}{3}$, etc. etc. stehen) mit einander und mit ganzen und mit gebrochenen Zahlen durch eine der Operationen verbunden werden, so stehen jedesmal zwei Wege offen; entweder 1) man verwandelt die gemischten Zahlen nach (§. 39. n. 11.) in unächte Brüche (z. B. $5\frac{3}{4}$ in $\frac{23}{4}$, $7\frac{2}{3}$ in $\frac{23}{3}$, u. s. f.), und operirt dann mit diesen gebrochenen Zahlen, statt mit den gemischten selbst; oder 2) man behandelt die gemischten Zahlen direkt und wie sich von selbst versteht, wie Summen, d. h. nach denjenigen Sätzen, welche mit Summen zu operiren lehren.

1) Hat man also z. B. $7\frac{3}{4}$ und $5\frac{2}{3}$ zu addiren, so erhält man zuerst $7\frac{3}{4}=\frac{31}{4}$ und $5\frac{2}{3}=\frac{17}{3}$, und dann addirt man $\frac{31}{4}$ und $\frac{17}{3}$ zu einander. Dies giebt nach (§. 40. n. 14.) $\frac{31.3+4.17}{12}$ d. h. $\frac{161}{12}$ oder $13\frac{5}{12}$. — Behandelt man dagegen die zu addirenden gemischten Zahlen $7\frac{3}{4}$ und $5\frac{2}{3}$ wie Summen, ohne sie vorher in gebrochene Zahlen zu verwandeln, so ist es einerlei in welcher Ordnung die einzelnen Theile (Summanden) addirt werden, und man kann daher zuerst die beiden Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{3}$ addiren, giebt $\frac{17}{12}$ oder $1\frac{5}{12}$, und dann die ganzen 7 und 5 zusammen und sogleich dieses 1 dazu nehmen, und man erhält dann ebenfalls $13\frac{5}{12}$ als Resultat der Addition.

2) Sollen dagegen dieselben gemischten Zahlen mit einander multiplicirt werden, also $7\frac{3}{4}$ mit $5\frac{2}{3}$, so erhält man auf dem erstern Wege $\frac{31}{4}$ mit $\frac{17}{3}$ d. h. $\frac{31.17}{12}$ oder $\frac{527}{12}$ d. h. $43\frac{11}{12}$. — Auf dem andern Wege dagegen, wo die Summen $7\frac{3}{4}$ oder $7+\frac{3}{4}$ und $5\frac{2}{3}$ oder $5+\frac{2}{3}$ unmittelbar beibehalten werden, muß die Multiplikation nach (§. 44.) geschehen, welcher lehrt, daß man jedes Glied (Summanden) der einen Summe mit jedem Gliede (Summanden) der andern Summe multipliciren und zuletzt alles addiren müsse. Man muß also sowohl $\frac{3}{4}$ als auch 7 mit $\frac{2}{3}$, dann wiederum sowohl $\frac{3}{4}$ als auch 7 mit 5 multipliciren und zuletzt alles addiren. Nun ist aber $\frac{3}{4}.\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$ und $7\times\frac{2}{3}=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}$ und $5\times\frac{3}{4}=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$ und $5.7=35$, also zusammen $35+4\frac{2}{3}+3\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$; oder (weil

$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$ und $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{11}{12}$ ist) zusammen $43\frac{11}{12}$, wie vorher auch schon.

Im Praktischen bekommt dieses letztere die Form:

$$\begin{array}{r} 7\frac{3}{4} \\ 5\frac{2}{3} \\ \hline \frac{1}{2} \\ 4\frac{2}{3} \\ 3\frac{3}{4} \\ 35 \\ \hline 43\frac{11}{12}. \end{array}$$

3) Will man $5\frac{3}{4}$ von $7\frac{2}{3}$ subtrahiren, so erhält man auf dem erstern Wege nach (§. 40. n. 15.) $\frac{23}{3}-\frac{23}{4}=\frac{23}{12}$ *) oder $1\frac{11}{12}$. — Auf dem andern Wege kann man dagegen erst $\frac{3}{4}$ von 7 oder von $\frac{2}{3}$ abziehen, und dann noch 5 subtrahiren. Weil aber hier $\frac{2}{3}-\frac{3}{4}=\frac{8-9}{12}$ negativ werden würde, so könnte man 1 von den 7 Einern zu $\frac{2}{3}$ erst hinzunehmen und so $\frac{5}{3}$ erhalten, davon $\frac{3}{4}$ subtrahirt, läßt $\frac{11}{12}$ und dann noch 5 von 6 bleibt 1; also zusammen $1\frac{11}{12}$, wie oben auch.

4) Die Division zweier gemischten Zahlen geschieht praktisch bequem nur dadurch, daß man die gemischten Zahlen erst unter den Bruch bringt, d. h. sie in die gleichen unächten Brüche verwandelt. — Z. B.

$$\frac{7\frac{2}{3}}{5\frac{3}{4}}=\frac{23}{3}:\frac{23}{4}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}.$$

VI.

Zwei oder mehr Brüche werden bequemer addirt oder subtrahirt, zu oder von einander, wenn man sie vorher unter einerlei Benennung bringt (d. h. jeden in einen andern gleichgeltenden verwandelt, so daß alle neuen Brüche einerlei Nenner haben), weil man dann nach (§. 42. n. 2.

---

*) Der noch ganz ungeübte Rechner wird hier (nach der angeführten Formel) 4.23 oder 92 nehmen, dann 3.23 oder 69, letzteres 69 von 92 subtrahiren und so $\frac{23}{12}$ erhalten. Der nur etwas Geübte dagegen wird entweder $\frac{23}{3}-\frac{23}{4}$ in $23\,(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})$ d. h. in $23.\frac{1}{12}$ verwandeln, oder doch bemerken, daß in dem Ausdruck $\frac{4.23-3.23}{12}$ der Zähler $4.23-3.23$ sogleich $(4-3).23$ d. h. 1.23 oder 23 selbst werden wird.

oder §. 34. n. 2.) nur ihre Zähler zu addiren oder zu subtrahiren hat, indem man den gemeinschaftlichen Nenner als neuen Nenner beibehält.

Es wird aber ein Bruch z. B. $\frac{3}{4}$ in einen andern Bruch, welcher einen gegebenen Nenner z. B. 72 haben soll, dadurch verwandelt, daß man mit dem Nenner 4 in den gegebenen Nenner 72 dividirt, und das (18) was sich ergiebt, mit dem Zähler (3) multiplicirt. Es ist nehmlich dann nach (§. 38. n. 9.) $\frac{3}{4} = \frac{3.18}{4.18} = \frac{54}{72}$. — Hat man also mehr Brüche z. B. $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{5}{9}, \frac{7}{12}, \frac{8}{15}$, so sucht man von den Nennern 3, 4, 6, 8, 9, 12, 15, das kleinste gemeinschaftliche Vielfache (nach §. 93.) und findet solches $=360$. Dieses nimmt man nun als gemeinschaftlichen Nenner (General-Nenner) für alle Brüche, und sucht, wie eben gezeigt, für jeden den Zähler dazu. So findet man denn statt

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{5}{9}, \frac{7}{12}, \frac{8}{15},$$

die beziehlich gleichen Brüche:

$$\frac{240}{360}, \frac{270}{360}, \frac{300}{360}, \frac{315}{360}, \frac{200}{360}, \frac{210}{360}, \frac{192}{360}.$$

Sollen nun alle diese Brüche addirt werden, so addirt man die Zähler und erhält für ihre Summe $\frac{1727}{360} = 4\frac{287}{360}$.

Dies Geschäft bekommt gewöhnlich im Praktischen diese bequemere Form:

General-Nenner = 360		Zähler der neuen Brüche
gegebene Brüche $\frac{2}{3}$	120	240
$\frac{3}{4}$	90	270
$\frac{5}{6}$	60	300
$\frac{7}{8}$	45	315
$\frac{5}{9}$	40	200
$\frac{7}{12}$	30	210
$\frac{8}{15}$	24	192
	360	1727 | 4
		1440
		287

Die mittlere Spalte enthält das, was herauskommt, wenn man den General-Nenner durch jeden der einzelnen Nenner dividirt. Jede dieser

Zahlen (Quotienten, Resultate der Division) mit dem Zähler des links jedesmal nebenbei stehenden Bruches multiplicirt, giebt den rechts stehenden neuen Zähler. Unten sind die neuen Zähler sogleich addirt und dann ist mit 360 sogleich dividirt worden, um die Ganzen herauszubringen.

Auf demselben Wege erhält man:

$$\tfrac{7}{8}-\tfrac{3}{4}=\tfrac{7}{8}-\tfrac{6}{8}=\tfrac{1}{8},$$
$$\tfrac{7}{9}-\tfrac{1}{6}=\tfrac{14}{18}-\tfrac{3}{18}=\tfrac{11}{18},$$
$$\tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{2}=\tfrac{3}{4}-\tfrac{2}{4}=\tfrac{1}{4};$$ u. s. w. f.

VII.

Hat man ein Produkt von theils gebrochenen, theils ganzen, oder von lauter gebrochenen Zahlen, durch ein zweites Produkt von ganzen Zahlen zu dividiren, so darf man nach (§. 42.) und (§. 36. n. 7.) nur die Faktoren des letztern Produkts als Faktoren zu den Nennern der Brüche setzen, übrigens das praktische Verfahren von (III.) statt finden lassen.

Soll z. B. das Produkt $\frac{8}{9}.15.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.35.\frac{10}{9}$ durch 2.3.4.5.6.7.8 dividirt werden, so kann man das Resultat so schreiben, oder sich so geschrieben denken:

$$\frac{8.15.3.5.35.10}{9.4.6.9.2.3.4.5.6.7.8}$$

und erhält dann, nach (I. oder III.) so viel wie möglich weghebend, sehr schnell $\frac{125}{15552}$ als Endresultat.

Hiehergehörige Beispiele liefert die numerische Berechnung der in der (Note zu II.) durch $m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8$ etc. etc. vorgestellten Ausdrücke, im Falle für m nach und nach beliebige gebrochene Zahlen gesetzt werden.

Soll z. B. m_6 berechnet werden d. h.

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5.\ \ 6},$$

für den Fall, daß $m=\frac{19}{3}$ ist, so hat man

$m-1=\frac{16}{3}$, $m-2=\frac{13}{3}$, $m-3=\frac{10}{3}$, $m-4=\frac{7}{3}$ und $m-5=\frac{4}{3}$; und

es ist m_6 oder $\left(\frac{19}{3}\right)_6=\frac{\frac{19}{3}.\frac{16}{3}.\frac{13}{3}.\frac{10}{3}.\frac{7}{3}.\frac{4}{3}}{1.2.3.4.5.6}$

oder $=\frac{19.16.13.10.7.4}{3.3.3.3.3.3.2.3.4.5.6}=\frac{13832}{6561}=2\frac{710}{6561}$.

Für $m=\frac{20}{3}$ dagegen wird

$$m_7=\frac{20.17.14.11.8.5.2}{3.3.3.3.3.3.3.2.3.4.5.6.7}=\frac{7480}{19683}.$$

Für $m=\frac{17}{2}$ wird ferner berechnet:

$m_2=\frac{255}{8}=31\frac{7}{8}$; $m_3=\frac{1105}{16}=69\frac{1}{16}$; $m_4=\frac{12155}{128}=94\frac{123}{128}$;

$m_5=\frac{21879}{256}=85\frac{119}{256}$; $m_6=\frac{51051}{1024}=49\frac{875}{1024}$; $m_7=\frac{36465}{2048}=17\frac{1649}{2048}$;

$m_8=\frac{109395}{32768}=3\frac{11091}{32768}$; $m_9=\frac{12155}{65536}$; u. s. f.

Der Uebung wegen berechne man noch die Werthe von m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9, u. s. f., für $m=\frac{29}{4}$, $\frac{31}{4}$, $\frac{41}{5}$, $\frac{42}{5}$, $\frac{43}{5}$, $\frac{44}{5}$, $\frac{43}{6}$, $\frac{22}{3}$, $\frac{15}{2}$, $\frac{23}{3}$, $\frac{47}{6}$, und dergl. mehr.

VIII.

Soll ein Produkt von gebrochenen, ganzen und gemischten Zahlen, durch ein zweites ähnliches Produkt dividirt werden, so wird man vor Allem die gemischten Zahlen in (unächte) gebrochene verwandeln, unter die ganzen Zahlen immer 1 setzen, oder sich doch 1 darunter gesetzt denken (weil immer $a=\frac{a}{1}$), und dann nach (§. 42. n. 4. und §. 37. n. 8.) verfahren, d. h. die Nenner des Divisors alle zu den Zählern des Dividenden setzen, die Zähler des Divisors dagegen zu den Nennern des Dividenden, und so einen gleichen Quotienten erhalten, dessen Zähler und Nenner nur noch Produkte ganzer Zahlen sind, der dann nach (I.) weiter praktisch behandelt werden kann.

Sey z. B. das Produkt $(3\frac{3}{4}).\frac{5}{6}.14.(2\frac{2}{5})$ durch das Produkt $(2\frac{5}{8}).10.\frac{2}{3}$ zu dividiren, so erhält man erstlich:

$\frac{\frac{15}{4}.\frac{5}{6}.\frac{14}{1}.\frac{12}{5}}{\frac{21}{8}.\frac{10}{1}.\frac{2}{3}}$ dann $\frac{15.5.14.12.8.3}{4.6.5.21.10.2}$; und dann nach (I.) sehr schnell

als Endresultat die Zahl 6.

IX.

Wenn man schreibt 7a, so bedeutet dies ein Produkt aus 7 und a, so daß, wenn nachher $\frac{5}{2}$ statt a gesetzt wird, $7a = 7.\frac{5}{2} = \frac{35}{2} = 17\frac{1}{2}$ seyn wird. — In einem solchen Produkte z. B. 5b, wo der eine Faktor ein (bestimmter) Ziffern-Ausdruck, der andere ein (allgemeiner) Buchstaben-Ausdruck ist, nennt man den Ziffern-Ausdruck gewöhnlich den Coefficienten und schreibt diesen immer dem andern Faktor voran. Man schreibt also nicht gern a.7, sondern lieber 7.a oder 7a, obgleich beides in der Bedeutung einerlei wäre. — Jede Folge von (allgemeinen) Buchstaben-Ausdrücken dagegen pflegt man (wo die Ordnung einerlei ist) so viel wie möglich in der alphabetischen Ordnung hinzusetzen, so daß man z. B. nicht bac, sondern lieber dafür abc; nicht gerne 2b—3a+5c, sondern lieber dafür —3a+2b+5c, u. s. w. schreibt, wenn auch beide Ausdrücke immer einander gleich sind, daher der eine eben so gut als der andere gesetzt werden dürfte. Ein solches Ordnen erleichtert aber die Uebersicht.

X.

Hat man Produkte wie 7a und 5a, welche einen gemeinschaftlichen Faktor a haben, zu einander zu addiren oder von einander zu subtrahiren, so geschieht dies nach (§. 26. n. 1. 2. in Verbindung mit n. 3.); so daß man erhält:

$$7a+5a=(7+5).a=12.a=12a;$$
$$7a-5a=(7-5).a=2a;$$
$$5a-7a=(5-7).a.$$

Nun ist aber nach (§. 15. n. 6.) $5-7=-(7-5)=-2$ und nach (§. 43. n. 3.) $(-2)a=-2a$, also auch $(5-7)a=(-2)a=-2a$, mithin $5a-7a=-2a$. *)

*) Oder auch sogleich nach (§. 15. n. 6.):
$5a-7a=-(7a-5a)=-2a.$

Hat man dies einmal nach den treffenden, hier citirten Paragraphen gehörig durchgeführt, so daß man sich des ganzen Ganges genau bewußt worden ist, so ist es dann leicht, auch ohne diesen Gang jedesmal genau zu wiederholen im Praktischen sogleich zu schreiben: *)

1)	statt	$5b+4b$	lieber	$9b$,
2)	=	$16c+29c$	=	$45c$,
3)	=	$7a+2a+9a$	=	$18a$,
4)	=	$7a+2b+9a+19b$	=	$16a+21b$,
5)	=	$13a-9a$	=	$4a$,
6)	=	$9a-13a$	=	$-4a$,
7)	=	$7b-3a-9b+5a$	=	$2a-2b$,
8)	=	$ma \pm a$	=	$(m \pm 1)a$,
9)	=	$-5a-a-7a$	=	$-13a$,
10)	=	$-7a+2b+7a-b$	=	b,
11)	=	$-7a+2b+6a-2b$	=	$-a$,
12)	=	$-8a+2a+7a-a$	=	0 (Null).

13) Und wenn $3a$ und $-5c$ und $2a$ und $-7a$ und $4c$ und $-2b$ und c und b und $4a$, zu einander addirt werden sollen, so erhält man augenblicklich nach (§. 18.) (nach welchem die Ausdrücke, jeder mit seinem vorstehenden Zeichen (denen, die kein Zeichen vorstehen haben, wird + vorgedacht) nur neben einander hingeschrieben werden dürfen):

$$3a-5c+2a-7a+4c-2b+c+b+4a$$

und kann dafür sogleich $2a-b$ schreiben.

Für das praktische Subtrahiren **) solcher einfachen Ausdrücke bemerke man noch folgende Uebungs-Beispiele:

1) b von b subtrahirt giebt $b-b$ oder 0 (Null); 2) $3b$ von $8b$ subtrahirt giebt $8b-3b$ oder $5b$; 3) $7a$ von $7a$ subtrahirt giebt $7a-7a$ oder 0 (Null); 4) $9f$ von $5f$ subtr. giebt $5f-9f$ oder $(-4)f$ oder $-4f$;

---

*) Bei dem Zusammenfassen der Glieder in einer algebraischen Summe behalte man die praktische Regel (§. 16. Anmerk. I.) wohl im Gedächtniß:

Haben nehmlich die Glieder einerlei Zeichen, so addire man sie und setze der Summe dasselbe Zeichen vor; haben aber die Glieder verschiedene Zeichen, so subtrahire man sie und setze der Differenz (dem Reste) das Zeichen des Minuenden vor.

**) Alle diese Subtraktionen können nach der Regel beendigt werden, daß, man mag mehrgliedrige algebraische Summen oder nur einzelne Glieder subtrahiren, die Glieder allemal mit dem entgegengesetzten Zeichen addirt, d. h. mit dem entgegengesetzten Zeichen geradezu hingeschrieben werden. (§. 20. II.).

5) 4bc von 3b subtr. giebt 3b—4bc oder (3—4c).b; 6) 4b von 4bc subtr. giebt 4bc—4b oder 4b(c—1); 7) b von bc subtr. giebt bc—b oder (c—1)b oder b(c—1); 8) —c von a subtr. giebt a—(—c) oder a+c; 9) —3b von 5a subtr. giebt 5a—(—3b) oder 5a+3b; 10) —2a von 5a subtr. giebt 5a—(—2a)=5a+2a=7a; 11) —2a von —5a subtr. giebt —3a, nehmlich —5a—(—2a)=—5a+2a=—(5a—2a)=—3a; 12) 4b von —7b subtr. giebt —7b—4b oder —11b; 13) —5c von —5c subtr. giebt 0 (Null); 14) —11 von 5 subtr. giebt 16; 15) —11 von —5 subtr. giebt 6; 16) —11 von —17 subtr. giebt —6; u. s. w. f.

XI.

Für das Addiren und Subtrahiren der algebraischen Summen (§. 20.) bemerke man noch folgende Uebungs-Beispiele:

1) 7a—4b—c add. zu 6a—7b+9c giebt 13a—11b+8c;

2) 5a—7b—8c+d add. zu —5a+5b+7c+8d giebt —2b—c+9d;

3) —3a—b—2c—8f add. zu —ab—2b+2cd+8f giebt —ab—3a —3b—2c+2cd.

4) Und sollen addirt werden:

9x—5y— z— 7+5u
und —x +2z+ 3— u
und 4x+ y+5z+ 6+3u
und —8y —11 —7u,

so giebt dies 12x—12y+6z—9.

5) Sollen ferner addirt werden:

—3a— b+5c— d+6f—7g+h
und a—7b—3c+5d +8g —k+l
und 5a+5b— c— d— f+9g—5h
und —2a —5c +7f +2h+7k
und —3a+3b+4c—3d—20f—g —9k

so erhält man —2a—8f+9g—2h— 3k+l

u. s. w. f. — Ferner: *)

6) 7a—4b—c subtr. von 6a—7b+9c giebt —a—3b+10c;

7) 5a—7b—8c+d subtrahirt von —5a+5b—7c+8d giebt —10a +12b+c+7d;

8) —3a—b—2c—8f subtr. von —ab—2b+2cd+8f giebt 3a—ab—b +2c+2cd+16f.

*) Diese Subtraktionen geschehen natürlich alle nach der Regel (§. 20. II.), in Verbindung mit den praktischen Regeln (X. und XI.).

Und man findet ferner:

9) $(6a+7-4b-c+8d-g-h)-(7a+b-5+g-h+3d-k)$
$=-a+12-5b-c+5d-2g+k;$

10) $(5c+3)-(2c-9-7c)=10c+12;$

11) $4x-3y-(7a-8y)=-7a+4x+5y;$

12) $-5a-(-7a+3b-8c+d)=2a-3b+8c-d;$

13) $-2x+2y-3z-(7a-2b)-(x+y+z)=-3x+y-4z-7a+2b;$

14) $a-2b-(3a-5b)-(-2a+7b-c)=-4b+c=c-4b;$

15) $\frac{3}{4}a-\frac{2}{3}a=\frac{1}{12}a;\quad \frac{5}{6}x+\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}x=\frac{7}{12}x;$

16) $\frac{1}{2}a-\frac{5}{2}b+\frac{3}{4}c-(\frac{7}{3}a-\frac{5}{3}b)-(a-b+\frac{5}{8}c)=-\frac{17}{6}a+\frac{1}{6}b+\frac{1}{8}c$

$$=-\frac{17a-b}{6}+\frac{c}{8}=-\frac{17a}{6}+\frac{b}{6}+\frac{c}{8}=\frac{b-17a}{6}+\frac{c}{8};$$

u. s. w. f.

XII.

Sollen zwei solche Produkte wie 7a und 5a mit einander multiplicirt werden, so geschieht dies nach (§. 26. n. 4.) dadurch, daß man die Faktoren alle in beliebiger Ordnung neben einander schreibt. Man erhält also z. B.

$$7a\times 5a=7.a.5.a=7.5.a.a=7.5.a^2=35.a^2.$$

In der Praxis pflegt man aber immer die (Ziffern-) Coefficienten nach den Regeln der Ziffernrechnung mit einander zu multipliciren, wie eben geschehen ist, so daß man nicht $7.5.a^2$ stehen läßt, sondern dafür lieber $35a^2$ schreibt.

Verbindet man nun damit die Sätze (§. 43.) so wie überhaupt die Sätze des (2ten Kap.), so findet man noch leicht, als Uebungs-Beispiele:

1) $5a\times 3b=15ab;$

2) $6a\times\frac{3}{4}b=\frac{18}{4}ab=\frac{9}{2}ab=\frac{9ab}{2};$

3) $\frac{3b}{8}\cdot\frac{5c}{6}=\frac{5bc}{16}=\frac{5}{16}bc=\frac{1}{8}b\cdot\frac{5}{6}c;$

4) $-2a\times 3b=-6ab;$

5) $-2a\times-3b=+6ab=6ab;$

6) $5a\times-\frac{2}{3}b=-\frac{10}{3}ab=-\frac{10ab}{3}=\frac{-10ab}{3};$

7) $-\frac{5}{8}x\times-\frac{3}{2}y=+\frac{5}{4}xy=\frac{5}{4}xy=\frac{5xy}{4};$

8) $-\frac{5x}{6}\times-\frac{3y}{2}=+\frac{15xy}{12}=\frac{5xy}{4}=\frac{5}{4}xy;$

9) $-ab \times cgh = -abcgh$; $-ab \times -cd = abcd$;

10) $-3abc \times -7cd = 21abccd = 21abc^2d$;

11) $-\frac{2}{3}cd \times \frac{4}{5}a = -\frac{8}{15}acd = -\frac{8acd}{15}$;

12) $-\frac{2}{3}cd \times -\frac{4}{5} = \frac{8}{15}cd = \frac{8cd}{15}$;

13) $-\frac{5ab}{2cd} \times ad = -\frac{5a^2b}{2c}$;

14) $-\frac{5ab}{2cd} \times -4acd = 10a^2b$;

15) $-\frac{1}{a} \times \frac{1}{b} = -\frac{1}{ab}$;

16) $-\frac{1}{a} \times -3cd = \frac{3cd}{a}$;

17) $-\frac{1}{ab} \times \frac{2pq}{xy} = -\frac{2pq}{abxy}$;

18) $(-\frac{3}{5}) \times (-\frac{2}{3}) = \frac{2}{5}$;

19) $-a^m \times -\frac{b^m}{2c^m} = \frac{a^m b^m}{2c^m}$;

20) $-\frac{1}{mpq} \times \frac{3ghp}{2ab} = -\frac{3gh}{2abmq}$;

21) $\frac{1}{a} \times \frac{4ab}{q} \times \frac{2c}{3d} = \frac{8bc}{3dq}$;

22) $\frac{2a}{-5} \times -\frac{2}{5}a = \frac{4a^2}{25} = \frac{4}{25}a^2$; u. s. w. s.

XIII.

Sollen mehre theils positive theils negative (oder auch nur theils additive, theils subtraktive) Ausdrücke mit einander multiplicirt werden, so multiplicirt man nur ihre Glieder (die vorstehenden + oder — Zeichen geradezu weglassend) und giebt dem ganzen ein (+) Zeichen, wenn unter den Faktoren 2, oder 4, oder 6, oder 8, oder 10, oder 12, etc. überhaupt eine gerade Anzahl negativer (oder bloß subtraktiver) Ausdrücke befindlich sind, dagegen giebt man dem Produkte der Glieder ein (—) Zeichen, wenn die Anzahl der negativen (oder nur subtraktiven) Faktoren 3, 5, 7, 9, 11, etc. überhaupt ungerade ist.

So findet man leicht:

1) $-a \times -a = +aa = a^2$;

2) $(-a).(-a).(-a) = -a^3$, oder $(-a)^3 = -a^3$;

3) $(-a).(-a).(-a).(-a) = +a^4 = a^4$, oder $(-a)^4 = a^4$;

4) $(-a).(-a).(-a).(-a).(-a) = -a^5$, oder $(-a)^5 = -a^5$;

5) $(-a)^6 = a^6$; $(-a)^7 = -a^7$; $(-a)^8 = a^8$; $(-a)^9 = -a^9$;

u. s. w. f. — Und ist n eine beliebige ganze Zahl, also 2n eine beliebige gerade Zahl, dagegen 2n+1 eine beliebige ungerade Zahl, so hat man

6) $(-a)^{2n} = a^{2n}$ und 7) $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$;

Ferner noch als Uebungs-Beispiele:

8) $-\frac{2a}{3b} \times -\frac{5c}{g} \times 9b \times -\frac{6g}{7h} = -\frac{180ac}{7h}$;

9) $-\frac{3}{4}a \times 8b \times \frac{2p}{9ab} \times -\frac{3}{4cdp} = \frac{1}{cd}$;

10) $-3ab \times -\frac{7gh}{5a} \times -\frac{2a}{9b} \times -\frac{1}{c} \times -2pq = -\frac{28aghpq}{15c}$;

u. s. w. f.

Zur ferneren Uebung nehme man die Ausdrücke m_2, m_3, m_4, m_5, etc. etc. der (Note zu II.) und setze erstlich $\frac{p}{q}$ statt m; und man wird z. B. erhalten:

$$m_5 \text{ oder } \left(\frac{p}{q}\right)_5 \text{ d. h. } \frac{\frac{p}{q}.\left(\frac{p}{q}-1\right).\left(\frac{p}{q}-2\right).\left(\frac{p}{q}-3\right).\left(\frac{p}{q}-4\right)}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5}$$

$$= \frac{p.(p-q)(p-2q)(p-3q)(p-4q)}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5.q^5}.$$

Dann ergiebt sich für $m = -p$, z. B.

$$m_5 \text{ oder } (-p)_5 \text{ d. h. } \frac{(-p)(-p-1)(-p-2)(-p-3)(-p-4)}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5}$$

$$= -\frac{p.(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5}, \text{ auch } = -(p+4)_5;$$

und für $m = -n$, wird noch

$$m_2 = (-n)_2 = \frac{n(n+1)}{2} = (n+1)_2;$$

$$m_3 = (-n)_3 = -\frac{n(n+1)(n+2)}{1. \quad 2. \quad 3.} = -(n+2)_3;$$

$$m_4 = (-n)_4 = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4} = (n+3)_4;$$

$$m_5 = (-n)_5 = -(n+4)_5; \quad (-n)_6 = (n+5)_6;$$

$$(-n)_7 = -(n+6)_7; \quad (-n)_8 = (n+7)_8; \quad \text{u. s. w. f.}$$

Man bestimme ferner die Werthe von m_2, m_3, m_4, m_5, etc., indem

man für m erst −2, dann −3, dann −4, dann −5, dann −6, u. s. f. schreibt, und findet:

$(-2)_2=3$; $(-2)_3=-4$; $(-2)_4=5$; $(-2)_5=-6$; $(-2)_6=7$; u. s. f.
$(-3)_2=6$; $(-3)_3=-10$; $(-3)_4=15$; $(-3)_5=-21$; $(-3)_6=28$; u. s. f.
$(-4)_2=10$; $(-4)_3=-20$; $(-4)_4=35$; $(-4)_5=-56$; $(-4)_6=84$; u. s. f.
$(-5)_2=15$; $(-5)_3=-35$; $(-5)_4=70$; $(-5)_5=-126$; $(-5)_6=210$; u. s. f. u. s. w. f.

Auch berechne man noch die Werthe von m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, etc. etc. (aus II.), wenn statt m gesetzt wird nach und nach $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{11}{5}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{13}{5}$, und so fort; auch wenn man statt m schreibt $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{5}{3}$, $-\frac{7}{3}$, $-\frac{8}{3}$, $-\frac{3}{5}$, $-\frac{11}{5}$, $-\frac{17}{6}$, u. s. w. f.

Man findet z. B.:

$(\frac{1}{2})_2=-\frac{1}{8}$; $(\frac{1}{2})_3=\frac{1}{16}$; $(\frac{1}{2})_4=-\frac{5}{128}$; $(\frac{1}{2})_5=\frac{7}{256}$; $(\frac{1}{2})_6=-\frac{21}{1024}$; u. s. f.
$(\frac{1}{3})_2=-\frac{1}{9}$; $(\frac{1}{3})_3=\frac{5}{81}$; $(\frac{1}{3})_4=-\frac{10}{243}$; $(\frac{1}{3})_5=\frac{22}{729}$; $(\frac{1}{3})_6=-\frac{154}{6561}$; u. s. f.
$(\frac{2}{5})_2=-\frac{1}{9}$; $(\frac{2}{3})_3=\frac{4}{81}$; $(\frac{2}{3})_4=-\frac{7}{243}$; $(\frac{2}{3})_5=\frac{14}{729}$; $(\frac{2}{3})_6=-\frac{91}{6561}$; u. s. f.
$(\frac{5}{3})_2=\frac{5}{9}$; $(\frac{5}{3})_3=-\frac{5}{81}$; $(\frac{5}{3})_4=\frac{5}{243}$; $(\frac{5}{3})_5=-\frac{7}{729}$; $(\frac{5}{3})_6=\frac{35}{6561}$; u. s. f.
$(\frac{1}{4})_2=-\frac{3}{32}$; $(\frac{1}{4})_3=\frac{7}{128}$; $(\frac{1}{4})_4=-\frac{77}{2048}$; $(\frac{1}{4})_5=\frac{231}{8192}$; $(\frac{1}{4})_6=-\frac{1463}{65536}$;
$(\frac{3}{4})_2=-\frac{3}{32}$; $(\frac{3}{4})_3=\frac{5}{128}$; $(\frac{3}{4})_5=-\frac{45}{2048}$; $(\frac{3}{4})_5=\frac{117}{8192}$; $(\frac{3}{4})_6=-\frac{663}{65536}$;
$(-\frac{1}{3})_2=\frac{2}{9}$; $(-\frac{1}{3})_3=-\frac{14}{81}$; $(-\frac{1}{3})_4=\frac{35}{243}$; $(-\frac{1}{3})_5=-\frac{91}{729}$; $(-\frac{1}{3})_6=\frac{728}{6561}$;
$(-\frac{2}{3})_2=\frac{5}{9}$; $(-\frac{2}{3})_3=-\frac{40}{81}$; $(-\frac{2}{3})_4=\frac{110}{243}$; $(-\frac{2}{3})_5=-\frac{308}{729}$;
$(-\frac{2}{3})_6=\frac{2618}{6561}$; u. s. f.
$(-\frac{1}{4})_2=\frac{5}{32}$; $(-\frac{1}{4})_3=-\frac{15}{128}$; $(-\frac{1}{4})_4=\frac{195}{2048}$; $(-\frac{1}{4})_5=-\frac{663}{8192}$;
$(-\frac{1}{4})_6=\frac{4641}{65536}$; u. s. f.
$(-\frac{3}{4})_2=\frac{21}{32}$; $(-\frac{3}{4})_3=-\frac{77}{128}$; $(-\frac{3}{4})_4=\frac{1155}{2048}$; $(-\frac{3}{4})_5=-\frac{4389}{8192}$;
$(-\frac{3}{4})_6=\frac{33649}{65536}$; u. s. f.
$(\frac{1}{5})_2=-\frac{2}{25}$; $(\frac{1}{5})_3=\frac{6}{125}$; $(\frac{1}{5})_4=-\frac{21}{625}$; $(\frac{1}{5})_5=\frac{399}{3125}$; $(\frac{1}{5})_6=-\frac{1596}{15625}$;
$(\frac{2}{5})_2=-\frac{3}{25}$; $(\frac{2}{5})_3=\frac{8}{125}$; $(\frac{2}{5})_4=-\frac{26}{625}$; $(\frac{2}{5})_5=\frac{468}{3125}$; $(\frac{2}{5})_6=-\frac{1794}{15625}$;
$(\frac{3}{5})_2=-\frac{3}{25}$; $(\frac{3}{5})_3=\frac{7}{125}$; $(\frac{3}{5})_4=-\frac{21}{625}$; $(\frac{3}{5})_5=\frac{357}{3125}$; $(\frac{3}{5})_6=-\frac{1309}{15625}$;
$(\frac{4}{5})_2=-\frac{2}{25}$; $(\frac{4}{5})_3=\frac{4}{125}$; $(\frac{4}{5})_4=-\frac{11}{625}$; $(\frac{4}{5})_5=\frac{176}{3125}$; $(\frac{4}{5})_6=-\frac{616}{15625}$;
$(-\frac{1}{5})_2=\frac{3}{25}$; $(-\frac{1}{5})_3=-\frac{11}{125}$; $(-\frac{1}{5})_4=\frac{44}{625}$; $(-\frac{1}{5})_5=-\frac{924}{3125}$;
$(-\frac{1}{5})_6=\frac{4004}{15625}$; u. s. f.
$(-\frac{2}{5})_2=\frac{7}{25}$; $(-\frac{2}{5})_3=-\frac{28}{125}$; $(-\frac{2}{5})_4=\frac{119}{625}$; $(-\frac{2}{5})_5=-\frac{2618}{3125}$;
$(-\frac{2}{5})_6=\frac{11781}{15625}$; u. s. f.
$(-\frac{3}{5})_2=\frac{12}{25}$; $(-\frac{3}{5})_3=-\frac{52}{125}$; $(-\frac{3}{5})_4=\frac{234}{625}$; $(-\frac{3}{5})_5=-\frac{5382}{3125}$;
$(-\frac{3}{5})_6=\frac{25116}{15625}$; u. s. f.
$(-\frac{4}{5})_2=\frac{18}{25}$; $(-\frac{4}{5})_3=-\frac{84}{125}$; $(-\frac{4}{5})_4=\frac{399}{625}$; $(-\frac{4}{5})_5=-\frac{9576}{3125}$;
$(-\frac{4}{5})_6=\frac{46284}{15625}$; u. s. f. w. f.

XIV.

Für die Multiplikation algebraischer Summen, welche jedesmal nach (§. 45.) statt finden muß, mögen noch folgende Uebungs-Beispiele stehen:

1) $(2a-5b+3c).7d=14ad-35bd+21cd$;
2) $(2a-5b-3c)\times(-3d)=-6ad+15bd+9cd$;
3) $(5ac-4a-2c+4bd).(-9c)=-45ac^2+36ac+18c^2-36bcd$;
4) $\left(-\frac{2a}{b}+\frac{4c}{d}-5d-\frac{g}{h}\right).\frac{3ab}{5cd}=-\frac{6a^2}{5cd}+\frac{12ab}{5d^2}-\frac{3ab}{c}-\frac{3abg}{5cdh}$;
5) $\left(-\frac{2a}{b}+\frac{4c}{d}-5d+\frac{4g}{h}\right)\times-\frac{3ab}{5cd}=\frac{6a^2}{5cd}-\frac{12ab}{5d^2}+\frac{3ab}{c}-\frac{12abg}{5cdh}$.

Besonders bemerke man:

6) $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$;
7) $(a+b)(c-d)=ac-ad+bc-bd$;
8) $(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd$;
9) $(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$;
10) $(a+b)(a+b)(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$;
11) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$;
12) $(a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$;
13) $(a-b)(a-b)(a-b)=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$;
14) $(a^2+ab+b^2)(a-b)=a^3-b^3$;
15) $(a^2-ab+b^2)(a+b)=a^3+b^3$; u. s. w. f. *)

Und noch:

16) $(a-b+c)(a-b-c)=a^2-2ab+b^2-c^2$;
17) $(2a-3b)(-4a+b)=-8a^2+14ab-3b^2$;
18) $(2a-3b)(-4c+5d)=-8ac+12bc+10ad-15bd$;
19) $(2a-3b-5c)(4a-b+3c)=8a^2-14ab-14ac+3b^2-4bc-15c^2$;
20) $(3a+5b-8c-d)(-a+2b-7h)=-3a^2+ab+10b^2+8ac+ad-16bc-2bd-21ah-35bh+56ch+7dh$;
21) $(2a-\frac{3}{4}b+\frac{3}{2}c).(\frac{5}{2}a-\frac{2}{3}b)=5a^2-\frac{77}{24}ab+\frac{1}{2}b^2-bc+\frac{15}{4}ac$;
22) $(-2a+3b-\frac{5}{3}c+\frac{1}{2}d)(4a-3b+c)=-8a^2+18ab-9b^2-\frac{26}{3}ac+8bc+2ad-\frac{3}{2}bd-\frac{5}{3}c^2+\frac{1}{2}cd$;
23) $(5x-3y-2z+v)(3y-2x-5z)=-10x^2+21xy-9y^2-21xz-2xv+9yz+10z^2+3yv-5zv$;

---

*) In allen diesen Beispielen kann man auch die rechts der (=) Zeichen stehenden Ausdrücke als die gegebenen ansehen und sich darin üben, solche in die links stehenden, oder auch in andere Produkte zu verwandeln (d. h. wie man sich gewöhnlich ausdrückt, sie in ihre Faktoren zu zerlegen).

24) $(4a-\frac{3}{2}b+\frac{2}{3}c-3d)(\frac{1}{3}a-\frac{1}{4}b+2c-\frac{5}{2}d)=\frac{4}{3}a^2-\frac{3}{2}ab+\frac{3}{8}b^2+\frac{74}{9}ac-11ad-\frac{19}{6}bc+\frac{4}{3}c^2+\frac{9}{2}bd-\frac{23}{3}cd+\frac{15}{2}d^2$;

25) $(\frac{1}{2}-x)(2x-5)(\frac{3}{2}-2x)=4x^3-15x^2+14x-\frac{15}{4}$;

26) $(5-2x)(7a-2x)(1-x)=35a-(49a+10)x+14(a+1)x^2-4x^3$;

27) $(4a-x)(2a-x-y)(\frac{3}{4}-y)=6a^2-\frac{9}{2}ax+\frac{3}{4}x^2-3ay+\frac{3}{4}xy-8a^2y+6axy-x^2y+4ay^2-xy^2$;

28) $(5a^2-7ab+b^2)(2a-3b)(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b)=5a^4-\frac{127}{6}a^3b+\frac{185}{6}a^2b^2-\frac{101}{6}ab^3+2b^4$;

29) $(3a^3-2a^2b+ab^2-3b^3)(2a^2-3ab-b^2)=6a^5-13a^4b+5a^3b^2-7a^2b^3+8ab^4+3b^5$;

30) $\left(\frac{2a}{3}-\frac{7b}{5}-c+2\frac{d}{q}\right).\left(-\frac{a}{2}+\frac{b}{3}-\frac{2c}{5}-\frac{7d}{q}\right)=-\frac{1}{3}a^2+\frac{83}{90}ab-\frac{7}{15}b^2+\frac{7}{30}ac+\frac{17}{75}bc-\frac{17}{3}\frac{ad}{q}+\frac{2}{5}c^2+\frac{1557}{15}\frac{bd}{q}+\frac{31}{5}\frac{cd}{q}-14\frac{d^2}{q^2}$;

31) $(m-n-p+q)(m+n+p-q)=m^2-n^2-2np-p^2+2nq+2pq-q^2$;

32) $(2m-3n-4p+6q)(-3m+4n-\frac{3}{4}p+3q)=-6m^2+17mn-12n^2+\frac{21}{2}mp-12mq-\frac{55}{4}np+3p^2+15nq-\frac{33}{2}pq+18q^2$;

33) $\left(\frac{2a^2}{b^2}-\frac{2ab}{c^2}+p\right)\left(\frac{3p^2}{q}-\frac{3b}{c}-\frac{2}{3p}-1\right)=\frac{6a^2p^2}{b^2q}-\frac{6abp^2}{c^2q}+\frac{3p^3}{q}-\frac{6a^2}{bc}+\frac{6ab^2}{c^3}-\frac{3bp}{c}-\frac{4a^2}{3b^2p}+\frac{4ab}{3c^2p}-\frac{2}{3}-\frac{2a^2}{b^2}+\frac{2ab}{c}-p$;

34) $(\frac{2}{3}a-3b+\frac{1}{2}c)(1-2a+\frac{3}{4}b)(-2a+\frac{1}{3b}-2c)=-\frac{4}{3}a^2+6ab-\frac{7}{3}ac+\frac{8}{3}a^3-13a^2b+2a^2c+\frac{9}{2}ab^2-\frac{55}{4}abc+\frac{2a}{9b}-1+\frac{c}{6b}-\frac{4a^2}{9b}+\frac{13}{6}a-\frac{ac}{3b}-\frac{3}{4}b+\frac{1}{8}c+6bc-c^2+\frac{8}{3}a^2c+2ac^2+\frac{9}{2}b^2c-\frac{3}{4}bc^2$. *)

XV.

Sollen Produkte wie 7a und 3b durch einander dividirt werden, so erhält man zunächst $\frac{7a}{3b}$. Man pflegt aber

---

*) Auch in allen diesen Beispielen kann man die Ausdrücke rechts als die gegebenen ansehen, und versuchen, solche in ihre Faktoren zu zerlegen, was jedoch schon bedeutendere Uebung erfordert, wenn die Zerlegung gelingen soll. — Giebt man aber die Ausdrücke rechts, als Dividenden und einen der Faktoren links als Divisor, so muß der andere Faktor (oder das Produkt der übrigen Faktoren) als Quotient sich ergeben, so daß dieselben Gleichungen auch als Uebungs-Beispiele für die Division angesehen werden können.

gewöhnlich, den Satz (§. 41. n. 16.) zu Hülfe nehmend, die Coefficienten durch einander, und dann die zweiten Faktoren ebenfalls durch einander zu dividiren, also statt $\frac{7a}{3b}$ lieber $\frac{7}{3} \cdot \frac{a}{b}$ zu schreiben. — Eben so erhält man dann, wenn 5ab durch 3b dividirt werden soll, $\frac{5}{3} \cdot \frac{ab}{b}$ oder $\frac{5}{3}a$. Und 5abc durch 2b dividirt, giebt danach $\frac{5}{2} \cdot \frac{abc}{b}$ oder $\frac{5}{2}ac$; so wie $\frac{5}{3}ab$ durch $\frac{3}{2}b$ dividirt, $\frac{10}{9}a$ geben wird. —

Nimmt man nun noch die Sätze (§. 43. n. n. 5 — 7.) zu Hülfe, und überhaupt die Sätze des 2ten Kapitels, so wird man leicht noch folgende Uebungs-Beispiele lösen:

1) $\frac{-16a}{8b} = -2\frac{a}{b}$;

2) $\frac{-14a}{-4b} = \frac{7}{2} \cdot \frac{a}{b} = \frac{7a}{2b}$;

3) $\frac{abcdf}{bdf} = ac$;

4) $\frac{(-a)(-b)(-c)d.(-f)}{bc(-p)} = -\frac{adf}{p}$;

5) $12abp : -3bq = -4 \cdot \frac{ap}{q} = -\frac{4ap}{q}$;

6) $-15xyz : -2xy^2 = \frac{15}{2} \cdot \frac{z}{y} = \frac{15z}{2y}$;

7) $28abcdp : 7bcqx = 4 \cdot \frac{adp}{qx} = \frac{4adp}{qx}$;

8) $5abc : -5abcdf = -\frac{1}{df}$;

9) $-3pqz : 24pxyz = -\frac{q}{8xy}$;

10) $\frac{3abc}{2pq} : \frac{5b}{7q} = \frac{21}{10} \cdot \frac{ac}{p} = \frac{21ac}{10p}$;

11) $-\frac{5b}{3a} : \frac{7c}{2d} = -\frac{10}{21} \cdot \frac{bd}{ac} = -\frac{10bd}{21ac}$;

12) $-\frac{3a^2bx}{cd^2} : -\frac{9ab^2x^2}{5c^2d} = \frac{5}{3} \cdot \frac{ac}{bdx} = \frac{5ac}{3bdx}$;

13) $-3 \cdot \frac{a^2}{b} : -\frac{1}{4} \cdot \frac{c}{d^2} = 12\frac{a^2d^2}{bc}$;

14) $\frac{3}{4}ab : -\frac{2}{3}pq = -\frac{9}{8}\frac{ab}{pq}$;

24) $(4a-\frac{3}{2}b+\frac{2}{3}c-3d)(\frac{1}{3}a-\frac{1}{4}b+2c-$
$-11ad-\frac{19}{6}$

25) $(\frac{1}{2}-x)(2x-5)(\frac{3}{2}-2x)=4x^3-15x^2$

26) $(5-2x)(7a-2x)(1-x)=35a-(49$

27) $(4a-x)(2a-x-y)(\frac{3}{4}-y)=6a^2-\frac{9}{2}$

28) $(5a^2-7ab+b^2)(2a-3b)(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b$

29) $(3a^3-2a^2b+ab^2-3b^3)(2a^2-3ab$

30) $\left(\frac{2a}{3}-\frac{7b}{5}-c+2\frac{d}{q}\right).\left(-\frac{a}{2}+\right.$
$+\frac{83}{90}ab-\frac{7}{15}b^2+\frac{7}{30}ac+\frac{17}{75}bc-\frac{17}{3}\frac{ad}{q}+$

31) $(m-n-p+q)(m+n+p-q)=m$

32) $(2m-3n-4p+6q)(-3m+4n-$
$-12n^2+\frac{21}{2}mp-12mq-\frac{55}{4}n$

33) $\left(\frac{2a^2}{b^2}-\frac{2ab}{c^2}+p\right)\left(\frac{3p^2}{q}-\frac{3b}{c}-\frac{2}{3p}\right.$
$-\frac{6a^2}{bc}+\frac{6ab^2}{c^3}-\frac{3bp}{c}-\frac{4a^2}{3b^2p}$

34) $(\frac{2}{3}a-3b+\frac{1}{2}c)(1-2a+\frac{3}{4}b)(-2a+$
$+\frac{8}{3}a^3-13a^2b+2a^2c+\frac{9}{2}ab^2-\frac{55}{4}abc+$
$-\frac{3}{4}b+\frac{1}{8}c+6bc-c^2$

XV.

Sollen Produkte wie 7a und

dirt werden, so erhält man zunäch

---

*) Auch in allen diesen Beispielen ka
die gegebenen ansehen, und versuchen, solch
was jedoch schon bedeutendere Uebung erfo
gen soll. — Giebt man aber die Ausdrück
nen der Faktoren links als Divisor, so n
Produkt der übrigen Faktoren) als Quoti
Gleichungen auch als Uebungs-Beispiele fi
können.

$-\frac{7a}{3b}\Big) = -\frac{2a}{7b} + \frac{b^2}{3cd} - \frac{3b}{7a} + \frac{15bd}{56a}$;

XVII.

selbst nicht mehr eingliedrig, son-
nme von 2 oder mehr Gliedern, so
Regel des (§. 47.) eintreten; und
ist es vorzüglich hier in den mei-
den Divisor sowohl als den Divi-
geordnet zu haben, damit man so
emäßigste neue Glied des Quotien-
ie ersten Glieder im Divisor und
n durch einander dividirt werden. —

egel, so wird man folgende Uebungs-Bei-

$) : (a+b-c) = d-e$;

$-63ef+4ag-6bg-16cg-2dg+18eg-2ah$
$-9eh) : (7f+2g-h) = 2a-3b-8c-d+9e$;
$+99b) : (3a-11b) = 7a-2b-9$;
$+50b^2+30bc-50be+30af+75bf$
$75ef) : (3a+10b+15f) = 2a+5b+3c-5e$;
$2bc-\frac{63}{2}c^2) : (a-2b+9c) = 3a+5b-\frac{7}{2}c$;
$+5d^2-\frac{143}{4}dg-\frac{5}{6}dh+\frac{21}{4}g^2-\frac{271}{24}gh$
$h^2) : (\frac{2}{3}c-d+7g+\frac{1}{2}h) = 3c-5d+\frac{3}{4}g-\frac{5}{3}h$;
$+5abd-54a^2c^2+78abc^2+3acd-8b^2c^2$
$) : (7ab-18ac+2bc+d) = 5ab+3ac-4bc$;
$b^2cde+39b^2cd^2-30b^2d^2e-156bcde$
$(4bc+3bd-12e) = 13bcd+20bce-10bde$;

nen zugleich als Uebungs-Beispiele im Mul-
mmen, weil der Quotient mit dem Divisor
denden geben muß.

15) $-\frac{5}{7}abc : \frac{3}{7}abcd = -\frac{5}{3d}$;

16) $2abc : -\frac{5}{7}abcd = -\frac{14}{5d}$;

17) $-2ab : -\frac{5fg}{3h} = \frac{6}{5} \cdot \frac{abh}{fg} = \frac{6abh}{5fg}$;

18) $7abc : 3abcd = \frac{7}{3d}$;

19) $-\frac{2}{3}a : \frac{8}{3}ab = -\frac{1}{4b}$;

20) $\frac{3fgh}{7pq} : -\frac{6pq}{5fgh} = -\frac{5}{14} \cdot \frac{f^2g^2h^2}{p^2q^2} = -\frac{5f^2g^2h^2}{14p^2q^2}$; u. s. w. f.

XVI.

Eine algebraische Summe wird durch einen beliebig gegebenen Ausdruck dividirt, wenn man jedes einzelne Glied durch selbigen dividirt. (§. 45. Anmerkung 2.).

Man erhält daher leicht folgende Uebungs-Beispiele:

1) $(-4xy+3xz-5f-b) : 3x = -\frac{4}{3}y+z-\frac{5f}{3x}-\frac{b}{3x}$;

2) $(-6abc-7b+9ac-5d) : (-5a) = \frac{6}{5}bc+\frac{7b}{5a}-\frac{2}{5}c+\frac{d}{a}$;

3) $(a^3-2a^2+7b^2-8b-a) : (-3ab) = -\frac{a^2}{3b}+\frac{2a}{3b}-\frac{7b}{3a}+\frac{8}{3a}+\frac{1}{3b}$;

4) $(9ax^2-6a^2x-8axy+12a^2b^2x^2) : 4a^2b^2x^2$

$= \frac{9}{4ab^2}-\frac{3}{2b^2x}-2 \cdot \frac{y}{ab^2x}+3$ *);

5) $(-2ab+3c+6b-3d) : \frac{2a}{3b} = -3b^2+\frac{9bc}{2a}+\frac{9b^2}{a}-\frac{9bd}{2a}$;

6) $(3a-4b+c-7d+8f) : 8f = \frac{3a}{8f}-\frac{b}{2f}+\frac{c}{8f}-\frac{7d}{8f}+1$;

7) $(3a-4b+c-7d+8f) : (-\frac{8f}{3b}) = -\frac{9ab}{8f}+\frac{3b^2}{2f}-\frac{3bc}{8f}+\frac{21bd}{8b}-3b$;

---

*) Wenn man in diesen Gleichungen (n. n. 1 — 4. und n. 6.) die Ausdrücke rechts als die gegebenen ansieht, so dienen solche auch zur Uebung in dem Geschäft, Brüche unter einerlei Benennung zu bringen, und algebraische Summen, deren Glieder solche Brüche sind, in einen Bruch (Quotienten) zu verwandeln.

8) $\left(\frac{2a^2}{3b^2}-\frac{7ab}{9cd}+1-\frac{5}{8}d\right):\left(-\frac{7a}{3b}\right)=-\frac{2a}{7b}+\frac{b^2}{3cd}-\frac{3b}{7a}+\frac{15bd}{56a}$;

u. s. w. f.

XVII.

Ist aber der Divisor selbst nicht mehr eingliedrig, sondern eine algebraische Summe von 2 oder mehr Gliedern, so läßt man gewöhnlich die Regel des (§. 47.) eintreten; und für das praktische Geschäft ist es vorzüglich hier in den meisten Fällen sehr wichtig, den Divisor sowohl als den Dividenden gut alphabetisch geordnet zu haben, damit man so ziemlich allemal das zweckmäßigste neue Glied des Quotienten dadurch finde, daß die ersten Glieder im Divisor und im jedesmaligen Dividenden durch einander dividirt werden. —

Verfolgt man aber diese Regel, so wird man folgende Uebungs-Beispiele ohne weiters lösen: *)

1) $(xy-xz):(y-z)=x$;

2) $(-xy+xz):(y-z)=-x$;

3) $(a^2-b^2):(a-b)=a+b$;

4) $\frac{a^2-b^2}{a+b}=a-b$;

5) $(ad+bd-cd-ae-be+ce):(a+b-c)=d-e$;

6) $(14af-21bf-56cf-7df+63ef+4ag-6bg-16cg-2dg+18eg-2ah+3bh+8ch+dh-9eh):(7f+2g-h)=2a-3b-8c-d+9e$;

7) $(21a^2-83ab-27a+22b^2+99b):(3a-11b)=7a-2b-9$;

8) $(6a^2+35ab+9ac-15ae+50b^2+30bc-50be+30af+75bf+45cf-75ef):(3a+10b+15f)=2a+5b+3c-5e$;

9) $(3a^2-ab+\frac{47}{2}ac-10b^2+52bc-\frac{63}{2}c^2):(a-2b+9c)=3a+5b-\frac{7}{2}c$;

10) $(2c^2-\frac{19}{3}cd+\frac{43}{2}cg+\frac{7}{18}ch+5d^2-\frac{143}{4}dg-\frac{5}{6}dh+\frac{21}{4}g^2-\frac{271}{24}gh-\frac{5}{6}h^2):(\frac{2}{3}c-d+7g+\frac{1}{2}h)=3c-5d+\frac{3}{4}g-\frac{5}{3}h$;

11) $(35a^2b^2-69a^2bc-18ab^2c+5abd-54a^2c^2+78abc^2+3acd-8b^2c^2-4bcd):(7ab-18ac+2bc+d)=5ab+3ac-4bc$;

12) $(52b^2c^2d+80b^2c^2e+20b^2cde+39b^2cd^2-30b^2d^2e-156bcde-240bce^2+120bde^2):(4bc+3bd-12e)=13bcd+20bce-10bde$;

---

*) Diese Gleichungen dienen zugleich als Uebungs-Beispiele im Multipliciren der algebraischen Summen, weil der Quotient mit dem Divisor multiplicirt, allemal den Dividenden geben muß.

13) $(15a^3-14a^2b+24ab^2-7b^3):(3a-b)=5a^2-3ab+7b^2$;

14) $(a^2+2ab+b^2-c^2):(a+b+c)=a+b-c$;

15) $(9a^5+183a^4b+688a^3b^2-2476a^2b^3+631ab^4+741b^5):(3a^2+26ab-57b^2)=3a^3+35a^2b-17ab^2-13b^3$;

16) $(51a^2-23ab+70ac-51ad+85ae-2b^2-16bc+6bd-10be+24c^2-36cd+60ce):(17a-2b+12c)=3a-b+2c-3d+5e$;

17) $(a^2-b^2-2bc-2bd-c^2-2cd-d^2):(a+b+c+d)=a-b-c-d$;

18) $(6af-9bf+3c^2f+14a^2-21ab+5ac^2+3bc^2-c^4):(-3f-7a+c^2)=-2a+3b-c^2$;

19) $(\frac{3}{8}a^2-\frac{17}{4}ab+\frac{107}{12}ac^2+10b^2-\frac{88}{5}bc^2-2c^4):(\frac{1}{4}a-2b+6c^2)=\frac{3}{2}a-5b-\frac{1}{3}c^2$;

20) $\left(\frac{3a^4}{x^4}-\frac{19a^3b}{10x^3y}+\frac{21a^2b^2}{5x^2y^2}-\frac{9ab^3}{10xy^3}+\frac{b^4}{y^4}\right):\left(\frac{3a^2}{x^2}-\frac{2ab}{5xy}+\frac{b^2}{y^2}\right)=\frac{a^2}{x^2}-\frac{ab}{2xy}+\frac{b^2}{y^2}$;

21) *) $\frac{z}{1+2z}=z-\frac{2z^2}{1+2z}=z-2z^2+\frac{4z^3}{1+2z}=z-2z^2+4z^3-\frac{8z^4}{1+2z}$

$=z-2z^2+4z^3-8z^4+\frac{16z^5}{1+2z}$

$=z-2z^2+4z^3-8z^4+16z^5-\frac{32z^6}{1+2z}$

$=z-2z^2+4z^3-8z^4+16z^5-\ldots.+(-1)^{n-1}\cdot 2^{n-1}z^n+(-1)^n\cdot\frac{2^nz^{n+1}}{1+2z}$,

wie groß auch die ganze Zahl n seyn mag;

22) $\frac{z}{1-2z}=z+\frac{2z^2}{1-2z}=z+2z^2+4z^3+8z^4+\frac{16z^5}{1-2z}$

$=z+2z^2+4z^3+8z^4+16z^5+32z^6+\ldots.+2^{n-1}z^n+\frac{2^n\cdot z^{n+1}}{1-2z}$,

wie groß auch die ganze Zahl n seyn mag;

23) $\frac{1-x}{1+x}=1-\frac{2x}{1+x}=1-2x+\frac{2x^2}{1+x}=1-2x+2x^2-\frac{2x^3}{1+x}$

$=1-2x+2x^2-2x^3+\frac{2x^4}{1+x}$

---

*) Um diese Beispiele gehörig zu verstehen, mag hier noch besonders bemerkt werden, daß jede dieser Divisionen unmittelbar nach (§. 46.) verrichtet wird; daß man aber denselben (§. 46.) auf jeden entstehenden Quotienten auf's neue anwenden kann. Daher die verschiedenen Ausdrücke, die alle einander gleich seyn müssen.

$$=1-2x+2x^2-2x^3+2x^4-\ldots+(-1)^n.2x^n+(-1)^{n+1}\frac{2x^{n+1}}{1+x},$$

wie groß auch immer die Zahl n seyn mag. (Vergl. §. 46. Anmerk.).

Ferner nehme man in den Beispielen der Multiplikation (XIV.) die dort erhaltenen Produkte als Dividenden, einen der Faktoren aber als Divisor, so muß der andre Faktor (oder das Produkt der übrigen) als Quotient sich ergeben.

XVIII.

Dieses in den Nummern (X—XVII.) eingeübte praktische Operiren, sowohl mit algebraischen Summen als auch mit einzelnen Gliedern derselben, leidet natürlich keine Abänderung, sondern geschieht genau nach denselben Sätzen, wenn auch diese einzelnen Glieder noch Potenzen, Wurzeln, überhaupt ganz beliebige Ausdrücke enthalten. Nur bei dem Behandeln der einzelnen Glieder, wenn sie Potenzen oder Wurzeln noch enthalten, müssen die Sätze, nach denen mit letzteren beiden operirt wird, (§. §. 54 — 60 und §. §. 65 — 70 und §. 75.) noch mit zu Hülfe gezogen werden.

Es mögen aber darüber noch folgende Uebungs-Beispiele hier Platz finden: *)

1) Addition und Subtraktion. **)

1) $ax^2+bx^2-cx^2=(a+b-c).x^2;$

2) $3x^n+2x^n-x^n+7x^n=11.x^n;$

3) $2ax^n-3bx^n-x^n+4dx^n=(2a-3b-1+4d).x^n;$

4) $ab^2x^3y^n-cx^3y^n-2x^3y^n+4dx^3y^n=(ab^2-c-2+4d)x^3y^n;$

5) $-ax^{-n}+bx^{-n}-3x^{-n}+\frac{5}{2}dx^{-n}=(-a+b-3+\frac{5}{2}d).x^{-n};$

6) $\frac{7x^2}{z^2}-3\frac{x^2}{z^2}-5b\frac{x}{z}+\frac{x^2}{z^2}=5.\frac{x^2}{z^2}-5b\frac{x}{z}=\frac{5x}{z}\left(\frac{x}{z}-b\right);$

7) $a^{-mbn}+4a^{-mbn}+2^3a^{-mbn}-a^{-mbncp}-9a^{-mbn}$
$=(-4+2^3-cp)a^{-mbn}=-(4-2^3+cp)a^{-mbn}.$

---

*) Solche Beispiele, in denen Wurzeln noch vorkommen, werden hier absichtlich ausgelassen, weil solche mit mehren andern in die 2te Abtheilung der praktischen Uebungen (Kap. 10.) aufgenommen werden sollen.

**) Die erstern dieser Beispiele, wenn man die Ausdrücke rechts als die gegebenen ansehen will, welche in die links stehenden verwandelt werden sollen, sind zugleich Aufgaben der Multiplikation.

Man soll addiren:

$$4a^3b^2-7a^{-5}b+b^6-3xpzq$$
$$\text{zu } -3a^3b^2+a^{-5}b-7ab^6-2cxpzq-1$$
$$\text{zu } -a^3b^2+a^{-5}bc-2b^6+7cxpzq-c^4$$

und erhält $(c-6)a^{-5}b-(7a+1)b^6+(5c-3)xpzq-c^4-1$.

Desgleichen hat man nach (§. 54 oder §. 75.):

9) $a^m-3a^{m-1}=(a-3)a^{m-1}$;

10) $a^m-a^{m-1}b=(a-b)a^{m-1}$;

11) $-2a^m+3a^{m-1}b=-(2a-3b).a^{m-1}=(3b-2a)a^{m-1}$;

12) $-a^m+2a^{m-1}b-7a^{m-2}c^2=(-a^2+2ab-7c^2)a^{m-2}$.

13) Und soll $-2x^3y^2+7x^nyp-x^3y+ax^2y^3-b$
von $-x^3y^2-x^nyp+bx^3y-2cx^2y^3+7c$
subtrahirt werden, so erhält man:

$$x^3y^2-8x^nyp+(b+1)x^3y-(2c+a)x^2y^3+b+7c.$$

14) Und von $2a^{-1}b+3a^{-2}-a^{-3}b^{-1}-2ab^{-4}+c^m$
subtrahirt $-a^{-1}b+7a^{-2}+6a^{-3}b^{-1}-2ab^{-4}c+c^{m-1}$
giebt $3a^{-1}b-4a^{-2}-7a^{-3}b^{-1}+2(c-1)ab^{-4}+c^{m-1}(c-1)$.

15) Und von $2ab^mcp-3b^{m-1}cp+1-4b^{m-2}cp+2-4c^{m+3}d-5b^n$
subtrahirt $-2ab^mcp-4b^{m-1}cp+1+b^{m-2}cp+2-c^{m+3}+b^{n-1}$
giebt $4ab^mcp+b^{m-1}cp+1-5b^{m-2}cp+2-(4d-1)c^{m+3}-(5b+1)b^{n-1}$.

2) Multiplikation. (§. 55 und §. 75.).

1) $a^{-p}.a^q=a^{-(p-q)}=a^{q-p}=\frac{1}{a^{p-q}}=\frac{a^q}{a^p}$ (§. 56.);

2) $a^{-p}.a^{-q}=a^{-(p+q)}=a^{-p-q}=\frac{1}{a^p.a^q}=\frac{1}{a^{p+q}}$;

3) $5a^3.7a^2=35a^5$ (§. 55.);

4) $5a^3.7a^{-2}=35.a$ (§. 75.);

5) $5a^{-3}.7a^2=35.a^{-1}=\frac{35}{a}$;

6) $5a^{-3}.7a^{-2}=35a^{-5}=\frac{35}{a^5}$;

7) $2a^{-3}\times5a^{-1}\times6a^4\times7a=420.a$;

8) $-2a^{-3}\times-a\times5a^2\times-3a^4=-30.a^4$;

9) $-a^{m-n}\times-2a^{n-p}\times-a^{p-q}=-2a^{m-q}=-\frac{2a^m}{a^q}=-\frac{2}{a^{q-m}}$;

10) $a^{-m}\times-3a^3bc^2\times5a^n.b^nc^{-3}=-15a^{n-m+3}b^{n+1}c^{-1}$
$=-\frac{15a^{n-m+3}b^{n+1}}{c^1}=-\frac{15a^{n+3}b^{n+1}}{a^m.c}$;

11) $-ab^{-1}c^4\times a^2bc^{-3}\times2ab^{-1}c^2=-2a^4b^{-1}c^3=-\frac{2a^4c^3}{b}$;

12) $-3a^{-7}b^{-1}.c^{8} \times -\frac{2}{3}a^{5}b^{3}h^{5} \times -4a^{-3}b^{-5}c^{-2}d^{-1} = -8a^{-5}b^{-3}c^{6}d^{-1}h^{5}$

$$= -8\frac{c^{6}.h^{5}}{a^{5}b^{3}d} = -\frac{8}{a^{5}b^{3}c^{-6}dh^{-5}} = -\frac{8a^{-5}b^{-3}d^{-1}}{c^{-6}h^{-5}} = \text{etc. etc.};$$

13) $g^{3}h^{5}k^{-4} \times 5g^{2}h^{-3}k^{3}l \times -3g^{-1}.h^{-2}kl^{-1} = -15g^{4}$

auch $= \frac{g^{3}h^{5}}{k^{4}} \cdot \frac{5g^{2}.k^{3}.l}{h^{3}} \times -\frac{3k}{gh^{2}l} = -\frac{15g^{5}.k^{4}.h^{5}.l}{g.k^{4}.h^{5}.l} = \text{etc. etc.}$

14) $4a^{-m+3}.b^{2}.c^{-4} \times -3a^{-4}b^{-3}c^{3} \times 2a^{n-1}b^{3-q}c^{q+1}$

$$= -24a^{n-m-2}b^{2-q}c^{q} = -24\frac{c^{q}}{a^{m+2-n}b^{q-2}} = -\frac{24a^{n-m-2}c^{q}}{b^{q-2}}$$

$$= -\frac{24b^{2-q}c^{q}}{a^{m+2-n}};$$

15) $abcd \times a^{-m}b^{n}c^{p}d^{q} \times 3a^{n}b^{p}c^{-q} \times 2a^{-3}b^{-2}c^{-1}$

$$= 6a^{-m+n-2}b^{n+p-1}c^{p-q}d^{q+1} = \frac{6a^{-m+n-2}b^{n+p-1}d^{q+1}}{c^{q-p}}$$

$$= \frac{6b^{n+p-1}d^{q+1}}{a^{m-n+2}c^{q-p}} = \frac{6d^{q+1}}{a^{m-n+2}b^{1-n-p}c^{q-p}} = \text{etc. etc.}$$

16) $(a-b)^{-3}.a^{2}b^{3}d \times 2a^{-n}b(a-b)^{p+1}d^{-q} \times -3(a-b)^{2}.a^{5}b^{-7}d^{-n}$

$$= -6a^{-n+7}b^{-3}(a-b)^{p}d^{-n-q+1} = -\frac{6(a-b)^{p}}{a^{n-7}b^{3}d^{n+q-1}} = \text{etc. etc.}$$

17) $\frac{18a^{3}b^{-2}}{5c^{n}d^{p}} \cdot \frac{10a^{-1}d^{n}}{9b^{-3}c^{-q}} \times -\frac{3c^{p-3}d^{-n+1}}{4a^{-2}b^{q-1}}$

$$= -3a^{4}b^{-q+2}c^{-n+p+q-3}d^{-p+1}$$

nehmlich $= \frac{18}{5}a^{3}b^{-2}c^{-n}d^{-p} \times \frac{10}{9}a^{-1}b^{3}c^{q}d^{n} \times -\frac{3}{4}a^{2}b^{-q+1}c^{p-3}d^{-n+1}$

und noch $= -\frac{3a^{4}c^{p+q-(n+3)}}{b^{q-2}d^{p-1}} = -\frac{3a^{4}}{b^{q-2}c^{n+3-p-q}d^{p-1}}$

$$= -\frac{3a^{4}d^{1-p}}{b^{q-2}c^{n+3-(p+q)}} = \text{etc. etc.}$$

18) $\frac{3a^{2}b^{2}c^{3}}{4df^{2}} \times \frac{2b^{-1}c}{5abd^{2}f} \times \frac{3cd^{-4}}{5a^{3}b^{-3}f} = \frac{9}{50}a^{-2}b^{3}c^{5}d^{-7}f^{-4} = \frac{9b^{3}c^{5}}{50a^{2}d^{7}f^{4}};$

19) $4a^{m}b^{n}c^{p}.\frac{1}{3a^{-1}b^{3}c^{-2}d} \cdot \frac{1}{2abc^{2}d} = \frac{2}{3}a^{m}b^{n-4}c^{p}d^{-2};$

20) $\frac{2a^{-m+1}b^{-n+2}c^{-(1-n)}}{3d^{-(n-2)}f} \cdot \frac{6f^{3}d^{2}}{5a^{4}b^{2}c^{q-1}} = \frac{4}{5}a^{-m-3}b^{-n}c^{n-q}d^{n}f^{2}$

$$= \frac{4c^{n-q}d^{n}f^{2}}{5a^{m+3}b^{n}} = \frac{4(cd)^{n}f^{2}}{5a^{m+3}b^{n}c^{q}} = \text{etc. etc.};$$

21) $\frac{2(a+b)^{x-1}.(c-d)^{p-q}}{3(a-b)^{y}.c^{p}d^{q}(c+d)^{m}} \cdot \frac{5(a-b)^{3}(c+d)^{-3}c^{2}d}{4(a+b)^{2}(c-d)^{7}}$

$$= \frac{5(a+b)^{x-3}(c-d)^{p-q-7}}{6(a-b)^{y-3}(c+d)^{m+3}c^{p-2}d^{q-1}};$$

22) $\frac{3a^{-3}bc^{-2}}{5gh^{-4}} \times -\frac{5ab^{-5}c^{-6}}{6g^{-3}k^2} \times -\frac{4a^4b^{-6}c^2}{5g^{-3}k^{-3}} = \frac{2a^2b^{-10}c^{-6}}{5g^{-5}h^{-4}k^{-1}}$

$$= \frac{2a^2g^5h^4k}{5\,b^{10}.c^6}.$$

3) Multiplikation algebraischer Summen.

1) $(2a^3 - ab^2 + 3c^3).2a^3b^2 = 4a^6b^2 - 2a^4b^4 + 6a^3b^2c^3$;

2) $(-3a - 4b + 7c).3a^2b^3c^2 = -9a^3b^3c^2 - 12a^2b^4c^2 + 21a^2b^3c^3$;

3) $(3a^{-3}b - 4b^{-2}c - 5c^{-3}d).(-5ab^2c^{-1}) = -15a^{-2}b^3c^{-1} + 20a + 25ab^2c^{-4}d$;

$$= -15\,\frac{b^3}{a^2c} + 20a + 25\,\frac{ab^2d}{c^4};$$

4) $(a^{-3}b^2 - 3a^{-2}b^3 + 3a^{-1}b^4 - 4b^5) \times (-7a^{-1}b^{-3})$

$$= -7a^{-4}b^{-1} + 21a^{-3} - 21a^{-2}b + 28a^{-1}b^2$$

$$= -\frac{7}{a^4b} + \frac{21}{a^3} - \frac{21b}{a^2} + \frac{28b^2}{a};$$

5) $(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$;

6) $(a+b).(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$;

7) $(a+b).(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3) = a^4 - b^4$;

8) $(a+b).(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = a^5 + b^5$;

9) $(a+b).(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5) = a^6 - b^6$;

10) $(a+b).(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6) = a^7 + b^7$; u. s. f.

und wenn n eine beliebige ganze Zahl, also 2n eine beliebige gerade Zahl, dagegen $2n \pm 1$ beliebige ungerade Zahlen vorstellt:

11) $(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + a^{2n-3}b^2 - a^{2n-4}b^3 + \ldots - a^2b^{2n-3} + ab^{2n-2} - b^{2n-1}).(a+b) = a^{2n} - b^{2n}$;

12) $(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - a^{2n-3}b^3 + \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n}).(a+b) = a^{2n+1} + b^{2n+1}$.

So wie auch:

13) $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$;

14) $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$;

15) $(a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = a^4 - b^4$;

16) $(a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = a^5 - b^5$;

u. s. w.; zuletzt

17) $(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + a^{n-4}b^3 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n - b^n$;

18) $(a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 + \ldots + ab^{n-1} + b^n) = a^{n+1} - b^{n+1}$;

19) $(a^2 + 2ab + b^2)(a-b) = a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$;

20) $(3a^3 - 5a^2b + 2ab^2)(a^2 + 7ab) = 3a^5 + 16a^4b - 33a^3b^2 + 14a^2b^3$;

21) $(a^4 - 4a^3b^3 + 6a^2b^6)(a^3 - 2a^2b^3) = a^7 - 6a^6b^3 + 14a^5b^6 - 12a^4b^9$;

22) $(a^2 - b^2)(a^2 - b^2) = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = (a+b)(a-b)(a+b)(a-b)$

$$= (a+b)^2.(a-b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2)(a^2 - 2ab + b^2);$$

23) $(bx^6+a^3x^5-7a^4x^4)(a^2x^2-a^3x)=a^2bx^8-(a^3b-a^5)x^7-8a^6x^6+7a^7x^5$;

24) $(a^2b^3-5a^5b^4-2a^8b^5)(10a^9b^2-a^6b)=-a^8b^4+15a^{11}b^5$
$-48a^{14}b^6-20a^{17}b^7$;

25) $(a^6+2a^4z^2+4a^2z^4+8z^6)(a^2-2z^2)=a^8+16z^8$;

26) $(a^2-5ab+6b^2)(2a^2-3ab+4b^2)=2a^4-13a^3b+31a^2b^2$
$-38ab^3+24b^4$;

27) $(2c^2+3bc-b^2)(2c^2-3bc+b^2)=4c^4-9b^2c^2+6b^3c-b^4$;

28) $(\frac{3}{2}x^3-5x^2+\frac{1}{4}x+9)(\frac{1}{2}x^2-x+3)=\frac{3}{4}x^5-4x^4+\frac{77}{8}x^3-\frac{43}{4}x^2-\frac{33}{4}x+27$;

29) $(1+an+a^2n^2)(-1+an)=-1+a^3n^3$;

30) $(2ab^7-5a^4b^3-17a^7b)(\frac{1}{2}a^3b^5-\frac{1}{4}a^6b)=3a^4b^{12}-8a^7b^8-\frac{51}{2}a^{10}b^6$
$+\frac{5}{4}a^{10}b^4+\frac{17}{4}a^{13}b^2$;

31) $(5a^3b^2c^3-2a^2b^2c^4-3ab^2c^5-7bc^6)(a^2bc^2-4abc^3)=5a^5b^3c^5$
$-22a^4b^3c^6+5a^3b^3c^7+12a^2b^3c^8-7a^2b^2c^8+28ab^2c^9$;

32) $(\frac{1}{2}a^4-2a^3b)\left(\frac{2a^3b^2}{5}-\frac{3a^2b^3}{4}+6ab^4\right)=\frac{a^7b^2}{5}-\frac{47a^6b^3}{40}$
$+\frac{9a^5b^4}{2}-12a^4b^5$;

33) $(-a^{-5}x^2+7a^{-1}x^3+8a^3x^4)(2a^{-3}x^3-3ax^4)=-2a^{-8}x^5+17a^{-4}x^6$
$-5x^7-24a^4x^8$;

34) $\left(\frac{a^2c}{b^2}-\frac{2a^3c}{b}-a^4c\right)\left(\frac{a}{b^3}+\frac{3a^2}{b^2}+c^2\right)=\frac{a^3c}{b^5}+\frac{a^4c}{b^4}-\frac{7a^5c}{b^3}-\frac{3a^6c}{b^2}$
$+\frac{a^2c^3}{b^2}-\frac{2a^3c^3}{b}-a^4c^3$;

35) $(ad-cd)(a^2d^2-2acd^2+c^2d^2+ac^2d)=a^3d^3-3a^2cd^3+3ac^2d^3-c^3d^3$
$+a^2c^2d^2-ac^3d^2$;

36) $(a^4+a^3z+az^3+z^4)(a^2-az+z^2)=a^6+2a^3z^3+z^6$;

37) $(1-6z+9z^2)(\frac{1}{3}+2z+3z^2)=\frac{1}{3}-6z^2+27z^4$;

38) $(a^4+4a^3x+12a^2x^2+16ax^3+16x^4)(a^2-4ax+4x^2)=a^6-16a^3x^3+64x^6$;

39) $(a^{3m-n}b^{3p+1}c-a^{2m+2n-1}b^2c^n+bpc^m)(a-nb-p-1+bc^{n-1})$
$=a^{3m-2n}b^{2p}c-a^{2m+n-1}b^{1-p}c^n+a-nb-1c^m+a^{3m-nb^{3p+2}}c^n$
$-a^{2m+2n-1}b^3c^{2n-1}+bp+1c^{m+n-1}$;

40) $(a^m+3a^{m-1}b^n-6a^{m-2}b^{2n})(a^nb^n-7a^{n-1}b^{2n})$
$=a^{m+n}b^n-4a^{m+n-1}b^{2n}-27a^{m+n-2}b^{3n}+42a^{m+n-3}b^{4n}$.

4) Division (§. 56. §. 41. und §. 75.)

1) $a^p:a^q=a^{p-q}=\frac{1}{a^{q-p}}$;

2) $a^{-p}:a^q=a^{-p-q}=a^{-(p+q)}=\frac{1}{a^{p+q}}$;

3) $a^{-p}:a^{-q}=a^{-p+q}=\frac{1}{a^{p-q}}$;

4) $6a^3 : 2a^2 = 3a$;

5) $10a^8 : 2a^3 = 5a^5$;

6) $-10a^7 : 5a^2 = -2a^5$;

7) $10a^7 : -3a^{-4} = -\frac{10}{3}a^{11}$;

8) $9a^{-4} : -3a^{-1} = -3a^{-3} = -\frac{3}{a^3} = -3 . \frac{1}{a^3}$;

9) $-\frac{5}{4}a^{-2} : \frac{3}{7}a = -\frac{35}{12}a^{-3} = -\frac{35}{12} . \frac{1}{a^3}$;

10) $a^{-2}b : ab^{-3} = a^{-3}b^4 = \frac{b^4}{a^3}$;

11) $2ab^{-3} : -3a^{-1}b^{-2} = -\frac{2}{3}a^2b^{-1} = -\frac{2a^2}{3b}$;

12) $a^m : a = a^{m-1}$;

13) $8a^{-m} : 2a = 4a^{-m-1} = 4a^{-(m+1)} = \frac{4}{a^{m+1}}$;

14) $\frac{2}{3}a^{-3}b^2c^{-1} : \frac{3}{4}a^{-1}b^{-3}c^5 = \frac{8}{9}a^{-2}b^5c^{-6} = \frac{8b^5}{9a^2c^6}$;

15) $12(a-b)^3 : a^3 = 12 . \left(\frac{a-b}{a}\right)^3 = 12\left(1-\frac{b}{a}\right)^3$ *);

16) $-15(a+b)^5 : 3b^5 = -5 . \left(\frac{a+b}{b}\right)^5 = -5\left(1+\frac{a}{b}\right)^5$;

17) $-18(a-b)^3 : -6(a-b)^{-1}a^4 = 3(a-b)^4a^{-4} = 3 . \frac{(a-b)^4}{a^4}$

$= 3\left(\frac{a-b}{a}\right)^4 = 3\left(1-\frac{b}{a}\right)^4$;

18) $(a-b)^m : a^m = \left(\frac{a-b}{a}\right)^m = \left(1-\frac{b}{a}\right)^m$;

19) $\left(1-\frac{b}{a}\right)^m : \left(1+\frac{b}{a}\right)^m = \left(\frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}\right)^m = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^m = \frac{(a-b)^m}{(a+b)^m}$;

20) $-3a^mb^n : -5a^pc^qd^{-r} = \frac{3}{5}a^{m-p}b^nc^{-q}d^r = \frac{3a^{m-p}b^nd^r}{5c^q}$;

21) $a^{\frac{p}{q}} : a = a^{\frac{p}{q}-1} = a^{\frac{p-q}{q}} = \sqrt[q]{a^{p-q}} = \sqrt[q]{\frac{a^p}{a^q}} = \frac{\sqrt[q]{a^p}}{a}$ **);

---

*) In diesem und den folgenden Beispielen ist (§. 58.) angewandt.

**) Nach (§. §. 70 und 66.).

22) $-\frac{2a^3c^2(1+x^3)^{-\frac{1}{2}}}{7b^2d^3(1-z^2)^{\frac{3}{2}}} : \frac{4a^{-1}bc(1+x^3)^{-\frac{3}{2}}}{ad^{-2}(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$

$$= -\tfrac{1}{14}a^5b^{-3}cd^{-5}(1+x^3)(1-z^2)^{-1} = -\frac{a^5c(1+x^3)}{14b^3d^5(1-z^2)}.$$

5) Division algebraischer Summen (§. 45. Anmerk. 2. u. §. 47.).

1) $(9a^2b^2c-8b^2cd^2+12ab^3c^2-b^4c^2d) : 4abcd$

$$= \tfrac{9}{4}abd^{-1}-2a^{-1}bd+3b^2cd^{-1}-\tfrac{1}{4}a^{-1}b^3c = \frac{9ab}{4d}-\frac{2bd}{a}+\frac{3b^2c}{d}-\frac{b^3c}{4a};$$

2) $(\tfrac{4}{5}a^2b^4-\tfrac{5}{7}ab^6-4a^3b^3+\tfrac{1}{3}\tfrac{0}{}a^{-1}b^6) : -\tfrac{3}{4}a^{-\frac{1}{2}}b^3$

$$= -\tfrac{16}{15}a^{\frac{5}{2}}b+\tfrac{20}{21}a^{\frac{3}{2}}b^3+\tfrac{16}{3}a^{\frac{7}{2}}-\tfrac{40}{9}a^{-\frac{1}{2}}b^3$$

$$= -\tfrac{16}{15}a^2.a^{\frac{1}{2}}b+\tfrac{20}{21}a.a^{\frac{1}{2}}b^3+\tfrac{16}{3}a^3.a^{\frac{1}{2}}-\frac{40b^3}{9a}.a^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(-\tfrac{16}{15}a^2b+\tfrac{20}{21}ab^3+\tfrac{16}{3}a^3-\frac{40b^3}{9a}\right).\sqrt{a}\ (\text{weil } a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a});$$

3) $\left(\frac{3a^2b^5}{4c^3}-\frac{7ab^6}{3c^2d}+\frac{a^{-1}b^{-3}}{6c^{-3}d^{-1}}-\tfrac{3}{5}abc^2d^{-1}\right) : -\tfrac{1}{2}\frac{a^{-1}b}{c^{-1}d^3}$

$$= -\tfrac{3}{2}a^3b^4c^{-4}d^3+\tfrac{14}{3}a^2b^5c^{-3}d^2-\tfrac{1}{3}b^{-4}c^2d^4+\tfrac{6}{5}a^2cd^2$$

$$= -\frac{3a^3b^4d^3}{2c^4}+\frac{14a^2b^5d^2}{3c^3}-\frac{c^2d^4}{3b^4}+\tfrac{6}{5}a^2cd^2;$$

4) $(ab^2-b^2x) : (a-x) = b^2$; u. s. f.

Es können aber noch als Beispiele der Division die Aufgaben stehen, welche aus den Multiplikations-Beispielen (pag. 184. nn. 1—40.) hervorgehen, wenn man die dortigen Resultate als Dividenden annimmt und solche jedesmal durch einen der Faktoren dividirt, wo denn nach (§. 27.) der andere Faktor als Resultat der Division sich ergeben muß.

Ferner bemerke man noch nachstehende Beispiele:

5) $\frac{a^2-b^2}{a-b} = a+b$;

6) $\frac{a^3-b^3}{a-b} = a^2+ab+b^2$;

7) $\frac{a^4-b^4}{a-b} = a^3+a^2b+ab^2+b^3$;

8) $\frac{a^5-b^5}{a-b} = a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4$;

9) $\frac{(3a)^4-(2b)^4}{3a-2b} = (3a)^3+(3a)^2(2b)+(3a)(2b)^2+(2b)^3$;

10) $\frac{81a^4-16b^4}{3a-2b} = 27a^3+18a^2b+12ab^2+8b^3$;

11) $\frac{a^n-b^n}{a-b} = a^{n-1}+a^{n-2}+a^{n-3}b^2+a^{n-4}b^3+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}$;

12) $\frac{a^2-b^2}{a+b}=a-b$; 13) $\frac{a^4-b^4}{a+b}=a^3-a^2b+ab^2-b^3$;

14) $\frac{a^6-b^6}{a+b}=a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5$;

15) $\frac{a^{2n}-b^{2n}}{a+b}=a^{2n-1}-a^{2n-2}b+a^{2n-3}b^2-a^{2n-4}b^3+\ldots+ab^{2n-2}-b^{2n-1}$.

Und

16) $\frac{a^3+b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2$;

17) $\frac{a^5+b^5}{a+b}=a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4$;

18) $\frac{a^7+b^7}{a+b}=a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b_6$;

u. s. f.; so daß, wenn $2n+1$ eine beliebige ungerade Zahl vorstellt, d. h. n eine beliebige ganze Zahl:

19) $\frac{a^{2n+1}+b^{2n+1}}{a+b}=a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-a^{2n-3}b^3+\ldots$

$$+a^2b^{2n-2}-ab^{2n-1}+b^{2n}.$$

Auch noch:

20) $\frac{b}{z+1}=\frac{b}{z}-\frac{b}{z(z+1)}=\frac{b}{z}-\frac{b}{z^2}+\frac{b}{z^2(z+1)}$

$$=\frac{b}{z}-\frac{b}{z^2}+\frac{b}{z^3}-\frac{b}{z^3(z+1)}$$

$$=\frac{b}{z}-\frac{b}{z^2}+\frac{b}{z^3}-\frac{b}{z^4}+\frac{b}{z^4(z+1)}$$

$$=\frac{b}{z}-\frac{b}{z^2}+\frac{b}{z^3}-\frac{b}{z^4}+\frac{b}{z^5}-\frac{b}{z^5(z+1)}$$

$=$ etc. etc. etc.

$$=\frac{b}{z}-\frac{b}{z^2}+\frac{b}{z^3}-\frac{b}{z^4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{b}{z^n}-(-1)^{n-1}\cdot\frac{b}{z^n(z+1)},$$

man mag sich auch unter n eine noch so große ganze Zahl denken;

21) $\frac{a+z}{b+z}=\frac{a}{b}-\frac{(a-b)z}{b(b+z)}=\frac{a}{b}-\frac{(a-b)z}{b^2}+\frac{(a-b)z^2}{b^2(b+z)}$

$$=\frac{a}{b}-\frac{(a-b)z}{b^2}+\frac{(a-b)z^2}{b^3}-\frac{(a-b)z^3}{b^3(b+z)}$$

$$=\frac{a}{b}-\frac{(a-b)z}{b^2}+\frac{(a-b)z^2}{b^3}-\frac{(a-b)z^3}{b^4}+\frac{(a-b)z^4}{b^4(b+z)}$$

$$=\frac{a}{b}-\frac{(a-b)z}{b^2}+\frac{(a-b)z^2}{b^3}-\frac{(a-b)z^3}{b^4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(a-b)z^{n-1}}{b^n}$$

$$+(-1)^n\frac{(a-b)z^n}{b^n.(b+z)}$$

wie groß auch immer die Zahl n gedacht werden mag;

22) $\frac{z+a}{z+b}=1+\frac{a-b}{(z+b)}=1+\frac{a-b}{z}-\frac{(a-b)b}{z(z+b)}$

$=1+\frac{a-b}{z}-\frac{(a-b)b}{z^2}+\frac{(a-b)b^2}{z^2(z+b)}$

$=1+\frac{a-b}{z}-\frac{(a-b)b}{z^2}+\frac{(a-b)b^2}{z^3}-\frac{(a-b)b^3}{z^3(z+b)}$

$=1+\frac{a-b}{z}-\frac{(a-b)b}{z^2}+\frac{(a-b)b^2}{z^3}-\frac{(a-b)b^3}{z^4}+\frac{(a-b)b^4}{z^4(z+b)}$

$=1+\frac{a-b}{z}-\frac{(a-b)b}{z^2}+\frac{(a-b)b^2}{z^3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(a-b)b^{n-1}}{z^n}$

$+(-1)^n\cdot\frac{(a-b)b^n}{z^n(z+b)}$,

wie groß man sich die Zahl n auch immer denken mag;

23) $\frac{a-z}{b-z}=\frac{a}{b}+\frac{a-b}{b^2}z+\frac{a-b}{b^3}z^2+\frac{a-b}{b^4}z^3+\ldots+\frac{a-b}{b^n}z^{n-1}$

$+\frac{(a-b)}{b^n(b-z)}z^n$;

24) $\frac{z+a}{z-b}=1+\frac{a+b}{z}+\frac{b(a+b)}{z^2}+\frac{b^2(a+b)}{z^3}+\ldots+\frac{b^{n-1}(a+b)}{z^n}$

$+\frac{b^n(a+b)}{z^n\cdot(z-b)}$;

25) $\frac{a^8-a^2}{a^2-1}=a^2+a^4+a^6$;

26) $(20a^5-88a^4x+47a^3x^2-6a^2x^3):(5a^3-2a^2x)=4a^2-16ax+3x^2$;

27) $\frac{a^5+32b^5}{a+2b}=a^4-2a^3b+4a^2b^2-8ab^3+16b^4$;

28) $\frac{4a^8x^4-9b^8y^4}{2a^4x^2+3b^4y^2}=2a^4x^2-3b^4y^2$;

29) $(21a^7-43a^6b+150a^5b^2-110a^4b^3+104a^3b^4-32a^2b^5):(3a^4-4a^3b+16a^2b^2)=7a^3-5a^2b+6ab^2-2b^3$;

30) $(5x^4+\frac{7}{2}ax^3-\frac{107}{12}a^2x^2+\frac{5}{6}a^3x+\frac{7}{6}a^4):(2x^2-ax-\frac{1}{2}a^2)=\frac{5}{2}x^2+3ax-\frac{7}{3}a^2$;

31) $(7a^{10}-25a^8b^2+48a^6b^4-23a^4b^6+5a^2b^8):(7a^4-4a^2b^2+b^4)=a^6-3a^4b^2+5a^2b^4$;

32) $(a^8-8a^7b+28a^6b^2-56a^5b^3+70a^4b^4-56a^3b^5+28a^2b^6-8ab^7+b^8):(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$;

33) $\frac{a^4+a^2z^2+z^4}{a^2-az+z^2}=a^2+az+z^2$;

34) $(120a^{-8}b^4-101a^{-7}b^6+69a^{-6}b^8-18a^{-5}b^{10}):(8a^{-2}b^2-3a^{-1}b^4)=15a^{-6}b^2-7a^{-5}b^4+6a^{-4}b^6$;

35) $(78a^{-8}b^3-174a^{-5}b^4-295a^{-2}b^5+2ab^6+28a^4b^7):(6a^{-3}b^2-18b^3-7a^3b^4)=13a^{-5}b+10a^{-2}b^2-4ab^3$;

36) $(6x^{-5}y^{-12}+14x^{-1}y^{-10}+40x^3y^{-8}+24x^7y^{-6}+96x^{11}y^{-4}):(2x^{-3}y^{-5}+6xy^{-3}+12x^5y^{-1})=3x^{-2}y^{-7}-2x^2y^{-5}+8x^6y^{-3}$;

37) $(10a^6b^6c^4+3a^7b^5c^7+14a^{11}b^8c^8-18a^8b^4c^{10}+21a^{12}b^7c^{11}-30a^{10}b^7c^5+36a^{11}b^6c^8-42a^{15}b^9c^9):(2a^3b^3c^2+3a^4b^2c^5-6a^7b^4c^3)=5a^3b^3c^2-6a^4b^2c^5+7a^8b^5c^6$;

38) $(196a^{10}c^4-36a^4b^2c^4+12a^2bc^5-c^6):(14a^5c^2+6a^2bc^2-c^3)=14a^5c^2-6a^2bc^2+c^3$;

39) $\left(\frac{a^4}{b^6}-\frac{4c^6d^8}{b^{10}}+\frac{14c^5d^4}{a^4b^8}+\frac{49c^4}{4a^8b^6}\right):\left(\frac{a^2}{b^3}-\frac{2c^3d^4}{b^5}+\frac{7c^2}{2a^4b^3}\right)=\frac{a^2}{b^3}+\frac{2c^3d^4}{b^5}-\frac{7c^2}{2a^4b^3}$;

40) $(2a^{2m}+2a^mbp-4a^mcn-3amb-3bp+1+6bcn):(2a^m-3b)=a^m+bp-2cn$;

41) $(2a^{2-m}b^{n-2m+4}+3a^{2m}b^{n-2m+3}+a^{m-1}b^{1-2m}cp-2cap-2m+3bn+3-3cap+m+1b^{n+2}-apcp+1):(a^{m-1}b^{1-2m}-cap)=2a^{3-2m}b^{n+3}+3a^{m+1}b^{n+2}+cp$;

42) $(a^2xq-3p+8a^{m+2}xq-2p+3a^{2m+2}xq-p-56a^{3m+2}xq+20a^{4m+2}xq+p):(a^2xq+5a^{m+2}xq+p-2a^{2m+2}xq+2p)=x-3p+3a^mx-2p-10a^{2m}x-p$;

43) $(9a^{3m+2}b^{2m+1}c^{1-3m}+51a^{6m-5}b^{3m+1}c^{3-4m}-24a^{4-3m}bc^{m-2}-136a^{-3}b^{m+1}):(3a^{6m-2}b^{2m}c^{3-4m}-8)=3a^{4-3m}bc^{m-2}+17a^{-3}b^{m+1}$.

XIX.

Ueber die Potenzen selbst kann man sich noch nachstehende Uebungs-Beispiele bemerken:

1) $[(a^m)^n]^p=a^{mnp}=(a^{mn})^p=(a^{mp})^n=(a^{np})^m=(a^m)^{np}=(a^p)^{mn}=$ etc.;

2) $(a^{-m})^{-n}=a^{mn}=\left(\frac{1}{a^m}\right)^{-n}=\frac{1}{(1:a^m)^n}$;

3) $(a^{-m})^n=a^{-mn}=\frac{1}{a^{mn}}=\frac{1}{(a^m)^n}$;

4) $(a^m)^{-n}=a^{-mn}=\frac{1}{a^{mn}}=\frac{1}{(a^m)^n}$;

5) $[(a^{-m})^{-n}]^p=a^{mnp}$;

6) $[(a^{-m})^n]^{-p}=a^{mnp}$;

7) $([(a^m)^{-n}]^{-p})^{-q}=a^{-mnpq}=\frac{1}{a^{mnpq}}$;

8) $(a^2b^2cd^3)^4=a^8b^8c^4d^{12}$;

9) $(a^2b^{-1}c^{-1}d^3)^{-2}=a^{-4}b^2c^2d^{-6}=\left(\frac{a^2d^3}{bc}\right)^{-2}=\frac{a^{-4}d^{-6}}{b^{-2}c^{-2}}=\frac{b^2c^2}{a^4d^6}$;

10) $[(a^2b-3c)^2]^{-3} = a^{-12}b^{18}c^{-6} = \left(\frac{a^2c}{b}\right)^{-6} = \left(\frac{b^3}{a^2c}\right)^6 = \frac{b^{18}}{a^{12}c^6}$;

11) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}}$;

12) $(a^mb^{-n})^{-r} = a^{-mr}b^{nr}$;

13) $(a^{-m}b^nc^pd^{-q})^{-r} = a^{mr}b^{-nr}c^{-pr}d^{qr}$;

14) $(a^{2m}-3b^2cd^{-2})^{-3m} = a^{9m-6m^2}b^{-6mc-3m}d^{6m}$

$= \frac{a^{9m-6m^2}\cdot d^{6m}}{b^{6m}\cdot c^{3m}} = \frac{d^{6m}}{a^{6m^2-9m}b^{6m}c^{3m}}$

$= \left(\frac{a^{2m-3b^2c}}{d^2}\right)^{-3m} = \left(\frac{d^2}{a^{2m-3b^2c}}\right)^{3m}$;

15) $\left(\frac{a^2b^3cd^{-5}}{f^ng^{-p}}\right)^{-2m} = \left(\frac{f^ng^{-p}}{a^2b^3cd^{-5}}\right)^{2m} = \left(\frac{d^5f^n}{a^2b^3cg^p}\right)^{2m}$

$= \frac{d^{10mf^{2mn}}}{a^{4mb^{6m}c^{2m}g^{2mp}}} = a^{-4m}\,b^{-6m}\,c^{-2m}\,d^{10mf^{2mn}g^{-2mp}}$;

16) $\left[\left(\frac{ab^{-3}}{c^2d}\right)^{-1}\right]^{-3p} = \left(\frac{ab^{-3}}{c^2d}\right)^{3p} = \left(\frac{a}{b^3c^2d}\right)^{3p} = \frac{a^{3p}}{b^{9p}c^{2pdp}}$;

17) $(-a^3)^7 = -a^{21}$;

18) $(-a^3)^6 = a^{18}$;

19) $(-a^3)^{-7} = -a^{-21} = -\frac{1}{a^{21}}$;

20) $(-a^3)^{-6} = a^{-18} = \frac{1}{a^{18}}$;

21) $(-a)^{-2n} = a^{-2n} = \frac{1}{a^{2n}}$;

22) $(-a)^{-2n-1} = -a^{-2n-1} = -\frac{1}{a^{2n+1}}$;

23) $[(-2a)^{-2}]^{-4} = (-2a)^8 = (2a)^8 = 2^8\cdot a^8 = 256a^8$;

24) $[(-2a)^{-3}]^{-2} = (-2a)^6 = (2a)^6 = 2^6\cdot a^6 = 64a^6$;

25) $\left[\left(-\frac{a}{b}\right)^3\right]^{-4} = \left(-\frac{a}{b}\right)^{-12} = \left(\frac{b}{a}\right)^{12} = \frac{b^{12}}{a^{12}}$;

26) $\left(\frac{a^2b^{2n-1}cd^{2p-3}}{f^3g^{p-2}h^{3p-2}}\right)^4 = \frac{a^8b^{8n-4}c^4d^{8p-12}}{f^{12}g^{4p-8}h^{12p-8}}$;

27) $(a^x)^2 = a^{2x}$;

28) $(a^{-x\alpha})^2 = a^{-2\alpha x} = \frac{1}{a^{2\alpha x}}$;

29) $a^{-x\alpha}\times a^{y\alpha} = a^{(y-x)\alpha} = a^{-(x-y)\alpha} = \frac{1}{a^{(x-y.\alpha}}$;

30) $a^{-x\alpha}\times a^{-y\alpha} = a^{-(x+y)\alpha}$;

31) $(a^{x\alpha}+a^{-x\alpha})^2 = a^{2x\alpha}+2+a^{-2x\alpha}$;

32) $(a^{x\alpha}-a^{-x\alpha})^2 = a^{2x\alpha}-2+a^{-2x\alpha}$;

33) $(a^{x\alpha}+a^{-x\alpha})(a^{y\alpha}+a^{-y\alpha})=a^{(x+y)\alpha}+a^{-(x-y)\alpha}+a^{(x-y)\alpha}+a^{-(x+y)\alpha}$;

34) $(a^{x\alpha}-a^{-x\alpha})(a^{y\alpha}+a^{-y\alpha})=a^{(x+y)\alpha}-a^{-(x-y)\alpha}+a^{(x-y)\alpha}$
$-a^{-(x+y)\alpha}$;

35) $(a^{x\alpha}-a^{-x\alpha})(a^{y\alpha}-a^{-y\alpha})=a^{(x+y)\alpha}-a^{-(x-y)\alpha}-a^{(x-y)\alpha}$
$+a^{-(x+y)\alpha}$;

36) $(a^{x\alpha}+a^{-x\alpha})^2+(a^{x\alpha}-a^{-x\alpha})^2=2(a^{2x\alpha}+a^{-2x\alpha})$;

37) $\frac{1}{4}(a^{x\alpha}+a^{-x\alpha})^2-\frac{1}{4}(a^{x\alpha}-a^{-x\alpha})^2=1$;

38) $(a^{x\alpha}-a^{-x\alpha})(a^{y\alpha}+a^{-y\alpha})+(a^{x\alpha}+a^{-x\alpha})(a^{y\alpha}-a^{-y\alpha})$
$=2(a^{(x+y)\alpha}-a^{-(x+y)\alpha})$;

39) $(a^{x\alpha}-a^{-x\alpha})(a^{y\alpha}+a^{-y\alpha})-(a^{x\alpha}+a^{-x\alpha})(a^{y\alpha}-a^{-y\alpha})$
$=2(a^{(x-y)\alpha}-a^{-(x-y)\alpha})$;

40) $(a^{x\alpha}+a^{-x\alpha})(a^{y\alpha}+a^{-y\alpha})+(a^{x\alpha}-a^{-x\alpha})(a^{y\alpha}-a^{-y\alpha})$
$=2(a^{(x+y)\alpha}+a^{-(x+y)\alpha})$;

41) $(a^{x\alpha}+a^{-x\alpha})(a^{y\alpha}+a^{-y\alpha})-(a^{x\alpha}-a^{-x\alpha})(a^{y\alpha}-a^{-y\alpha})$
$=2(a^{(x-y)\alpha}+a^{-(x-y)\alpha})$.

XX.

Einige praktische Winke über die Zerlegung gegebener algebraischer Summen, in Faktoren.

1) In einer algebraischen Summe kann man diejenigen Buchstaben, welche in jedem der einzelnen Glieder vorkommen, desgleichen den allen Gliedern gemeinschaftlichen Ziffern-Faktor herausetzen, alle einzelnen Glieder der algebraischen Summe damit dividiren und diese neue algebraische Summe zum zweiten Faktor nehmen. (§. 26. nn. 1. 2. §. 45.)

So zerlegt sich z. B.

1) $ac-bc$ in $(a-b)c$;
2) $ac-bc-cd+cg$ in $(a-b-d+g)c$;
3) a^2b+ab^2 in $ab(a+b)$;
4) $a^3b^2c-a^2b^3c^2+a^2b^2c^2$ in $a^2b^2c(a-bc+c)$;
5) $2ab-6abd+4bf-12bg=2b(a-3ad+2f-6g)$;
6) $35a^2b-14ab^2-28abc=7ab(5a-2b-4c)$;
7) $2a^n+rb^m-1c-4a^r b^{2m-1}c^2d=2a^r b^{m-1}c(a^n-2b^mcd)$;
8) $12a^3x^4+2a^2x^5=2a^2x^4(6a+x)$;
9) $14a^4b^3-10a^3b^4+6a^2b^5=2a^2b^3(7a^2-5ab+3b^2)$;
10) $10a^{m+n}cd^{n+2}-14a^nb^mcd^{n+2}=2a^ncd^{n+2}(5a^m-7b^m)$
auch $=2a^mcd^{n+2}(5a^n-7a^{n-m}b^m)$.

Hieher gehören noch mehre der Beispiele (X.), so wie auch viele der (XIV. XVI. und XIX.), wenn man die Ausdrücke rechts als die gegebenen ansieht, und diese in die andern links stehenden zu verwandeln versucht.

2) Zuweilen gelingt eine Zerlegung in Faktoren dadurch, daß man nicht aus allen Gliedern, sondern nur aus Parthien von Gliedern der gegebenen algebraischen Summe, die gemeinschaftlichen Faktoren herausetzt, dadurch eine neue algebraische Summe von weniger Gliedern erhält, die dann vielleicht wiederum einen gemeinschaftlichen Faktor haben können, welcher herausgesetzt werden dürfte.

Hieher gehört z. B.

1) $ac+bd+ad+bc$, wo man aus ac und bc bilden kann $(a+b)c$, eben so aus $bd+ad$ noch $(b+a)d$, so daß man hat

$$ac+bd+ad+bc=(a+b)c+(b+a)d=(a+b)(c+d),$$

in so ferne $(a+b)c$ und $(b+a)d$ abermals den gemeinschaftlichen Faktor $a+b$ haben. — Man konnte aber auch die Glieder $ac+ad$ in $a(c+d)$ vereinigen, dann $bd+bc$ in $b(c+d)$ und erhielt zuletzt

$a(c+d)+b(c+d)$, welches $(a+b)(c+d)$ giebt. — Eben so:

2) $ac+bd-ad-bc=a(c-d)+b(d-c)=a(c-d)-b(c-d)$
oder $=(a-b)c+(b-a)d=(a-b)c-(a-b)d=(a-b)(c-d)$;

3) $ac-bd+ad-bc=a(c+d)-b(c+d)=(a-b)(c+d)$
oder $=(a-b)c+(a-b)d=(a-b)(c+d)$;

4) $ac-bd-ad+bc=a(c-d)+b(c-d)=(a+b)(c-d)$
oder $=(a+b)c-(a+b)d=(a+b)(c-d)$;

5) $ac-bd-ad-bc=a(c-d)-b(c+d)$
oder $=(a-b)c-(a+b)d$;

6) $4ac-12bd+6bc-8ad=4a(c-2d)+6b(c-2d)=(4a+6b)(c-2d)$
oder $=2c(2a+3b)-4d(2a+3b)=(2c-4d)(2a+3b)$
$=2(2a+3b)(c-2d)$;

7) $6ac-10bc-9ad+15bd=(3a-5b)(2c-3d)$;

8) $6ad-16cf-9bd+12bf-8af+12cd=(2a-3b+4c)(3d-4f)$;

u. s. w. f.

3) Multiplicirt man $A+B$ mit $A-B$, so erhält man A^2-B^2. — Also läßt sich die Differenz zweier Quadrate A^2-B^2 allemal zerlegen in ein Produkt aus der Summe der Dignanden $A+B$ und der Differenz derselben $A-B$.

Danach wird zerlegt:

1) x^2-a^2 in $(x-a)(x+a)$;
2) a^2-x^2 in $(a-x)(a+x)$;
3) x^2-1 d. h. x^2-1^2 in $(x-1)(x+1)$;
4) $1-x^2$ d. h. 1^2-x^2 in $(1-x)(1+x)$;
5) $4a^2-9b^2$ in $(2a+3b)(2a-3b)$;
6) $25a^2-\frac{4}{9}b^2$ in $(5a-\frac{2}{3}b)(5a+\frac{2}{3}b)$;
7) $25a^2-1$ in $(5a-1)(5a+1)$;
8) $1-49a^2b^4$ in $(1-7ab^2)(1+7ab^2)$;
9) x^4-1 d. h. $(x^2)^2-1^2$ in $(x^2-1)(x^2+1)$;
10) $1-\frac{16}{25}x^6=1^2-(\frac{4}{5}x^3)^2=(1-\frac{4}{5}x^3)(1+\frac{4}{5}x^3)$;
11) $4x^4-a^2=(2x^2-a)(2x^2+a)$;
12) $121x^4-49=(11x^2-7)(11x^2+7)$;
13) $(a+b)^2-c^2=(a+b-c)(a+b+c)$;
14) $a^2-(b-c)^2=(a+b-c)(a-b+c)$;
15) $a^2-(b+c)^2=(a+b+c)(a-b-c)$;
16) $a^4-x^4=(a^2-x^2)(a^2+x^2)=(a-x)(a+x)(a^2+x^2)$;
17) $a^6-4x^6=(a^3-2x^3)(a^3+2x^3)$;
18) $4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2=(2bc+a^2-b^2-c^2)(2bc-a^2+b^2+c^2)$;
u. s. w. f.

4) Multiplicirt man $x+a$ mit $x+b$, so erhält man $x^2+(a+b)x+ab$. — Hat man also umgekehrt z. B. x^2+5x+6, so muß man suchen zwei (positive oder negative) Zahlen für a und b zu finden, deren Summe 5 und deren Produkt 6 ist. Wenige Uebung gehört dazu um 3 und 2 als solche Zahlen zu erkennen, und man hat dann $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$ gefunden. — Ist gegeben $x^2+2ax+(a^2-b^2)$ so läßt sich a^2-b^2 in das Produkt $(a+b)(a-b)$ zerlegen; und weil die Summe von $(a+b)$ und $(a-b)$ gerade $2a$ ist, so hat man

$$x^2+2ax+a^2-b^2=(x+a-b)(x+a+b).$$ —

Eben so wird man finden, daß in dem Ausdruck

$$x^2+2bx-(a^2-b^2)$$

das dritte Glied $-(a^2-b^2)$ zerlegen läßt in $(a+b).[-(a-b)]$; und weil die Summe von $a+b$ und $-(a-b)$ gerade $2b$ ist, so hat man

$x^2+2bx-(a^2-b^2)=(x+a+b)(x-a+b)$. —

Oder man hat gegeben x^2-x-12, so läßt sich -12 zerlegen in $(-1).(12)$ oder in $1.(-12)$, oder in $2.(-6)$ oder in $6.(-2)$; oder in $3.(-4)$ oder in $(-3).4$. Und weil die Summe der beiden Faktoren in $3.(-4)$ gerade -1 ist; so wird

$$x^2-x-12=(x-4)(x+3)$$ seyn.

Diese Winke mögen hinreichen, um folgende Uebungs-Beispiele behandeln zu können:

1) $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$;
2) $x^2+3x+\frac{5}{4}=(x+\frac{1}{2})(x+\frac{5}{2})$;
3) $x^2+3x+\frac{8}{9}=(x+\frac{1}{3})(x+\frac{8}{3})$;
4) $x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$;
5) $x^2+3x-10=(x+5)(x-2)$;
6) $x^2+3x-18=(x+6)(x-3)$;
7) $x^2+3x-28=(x+7)(x-4)$;
8) $x^2+3x-\frac{55}{4}=(x+\frac{11}{2})(x-\frac{5}{2})$;
9) $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$;
10) $x^2-3x+\frac{9}{4}=(x-\frac{3}{2})(x-\frac{3}{2})=(x-\frac{3}{2})^2$;
11) $x^2-3x+\frac{26}{25}=(x-\frac{2}{5})(x-\frac{13}{5})$;
12) $x^2-3x+\frac{35}{16}=(x-\frac{5}{4})(x-\frac{7}{4})$;
13) $x^2-3x-4=(x+1)(x-4)$;
14) $x^2-3x-10=(x+2)(x-5)$;
15) $x^2-3x-18=(x+3)(x-6)$;
16) $x^2-3x-28=(x+4)(x-7)$;
17) $x^2-3x-\frac{70}{9}=(x+\frac{5}{3})(x-\frac{14}{3})$;
18) $x^2-x+\frac{2}{9}=(x-\frac{1}{3})(x-\frac{2}{3})$;
19) $x^2-19x+84=(x-7)(x-12)$;
20) $x^2-19x-20=(x-20)(x+1)$;
21) $x^2-\frac{7}{4}x+\frac{5}{8}=(x-\frac{1}{2})(x-\frac{5}{4})$;
22) $x^2-\frac{7}{4}x-\frac{9}{8}=(x+\frac{1}{2})(x-\frac{9}{4})$;
23) $2x^2+5x-12=2(x^2+\frac{5}{2}x-6)=2\cdot(x+4)(x-\frac{3}{2})=(x+4)(2x-3)$;
24) $7x^2+25x-12=7(x^2+\frac{25}{7}x-\frac{12}{7})=7(x^2+\frac{25}{7}x-\frac{84}{49})$
$=7(x+\frac{28}{7})(x-\frac{3}{7})=(x+4)(7x-3)$;
25) $2x^2-(3c+d+2)x+(3c+d)=2(x^2-\frac{3c+d+2}{2}x+\frac{2(3c+d)}{4})$
$=2(x-\frac{3c+d}{2})(x-\frac{2}{2})=(2x-3c-d)(x-1)$; *)

*) Alle diese Zerlegungen kann man auch direkt und ohne erst lange

26) $x^2+2ax+a^2=(x+a)(x+a)=(x+a)^2$;
27) $x^2-2ax+a^2=(x-a)(x-a)=(x-a)^2$;
28) $4x^2-4ax+a^2=(2x-a)(2x-a)=(2x-a)^2$;
29) $(4x^2+4ax+a^2)=(2x+a)(2x+a)=(2x+a)^2$; u. ſ. w. f.

5) Beobachtet man genau vorher verrichtete Multiplikationen z. B. die (XIV.) ſtehenden, ſo kann man umgekehrt in vielen Fällen vorkommende Produkte danach auch wieder zerlegen.

So findet man z. B. nach (XVIII. 3. n. n. 5 — 18.):

1) $a^3-8x^3=(a-2x)(a^2+2ax+4x^2)$;
2) $8x^3-1=(2x-1)(4x^2+2x+1)$;
3) $a^3+8x^3=(a+2x)(a^2-2ax+4x^2)$;
4) $1+8x^3=(1+2x)(1-2x+4x^2)$;
5) $\frac{1}{32}a^5-243x^5=(\frac{1}{2}a-3x)(\frac{1}{16}a^4+\frac{3}{8}a^3x+\frac{9}{4}a^2x^2+\frac{27}{2}ax^3+81x^4)$;
6) $\frac{1}{32}a^5+243x^5=(\frac{1}{2}a+3x)(\frac{1}{16}a^4-\frac{3}{8}a^3x+\frac{9}{4}a^2x^2-\frac{27}{2}ax^3+81x^4)$;

u. ſ. w. f.

6) Multiplicirt man $a+b$ mit $a+b$, und noch mit $a+b$, und noch mit $a+b$, u. ſ. w.; eben ſo $a-b$ mit $a-b$, und mit $a-b$, ſo ergiebt ſich:

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3;$$
$$(a\pm b)^4=a^4\pm 4a^3b+6a^2b^2\pm 4ab^3+b^4;$$

u. ſ. w.

Bemerkt man dieſe Formeln und alles was in den Nummern (1 — 5.) geſagt worden, über die Zerlegung in Faktoren, ſo wird man leicht noch folgende Uebungs-Beiſpiele löſen können.

1) $n^2\pm 2n+1=(n\pm 1)^2$;
2) $a^2+b^2-c^2+2ab=a^2+2ab+b^2-c^2=(a+b)^2-c^2$
$=(a+b+c)(a+b-c)$;

zu verſuchen, mittelſt der Auflöſung der quadratiſchen Gleichungen bewerkſtelligen. Davon aber erſt weiter unten.

3) $a^2+b^2-c^2-2ab=a^2-2ab+b^2-c^2=(a-b)^2-c^2$
$=(a-b+c)(a-b-c)$;

4) $c^2-a^2-b^2-2ab=c^2-(a+b)^2=[c+(a+b)][c-(a+b)]$
$=(c+a+b)(c-a-b)$;

5) $c^2-a^2-b^2+2ab=c^2-(a-b)^2=(c+a-b)(c-a+b)$
$=c^2-(b-a)^2=(c+b-a)(c-b+a)$;

6) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-ac^2-bc^2=(a+b)^3-(a+b)c^2$
$=(a+b).[(a+b)^2-c^2]=(a+b)(a+b+c)(a+b-c)$;

7) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3-ac^2+bc^2=(a-b)^3-(a-b)c^2$
$=(a-b)(a-b+c)(a-b-c)$;

8) $a^2-3ab+ac+2b^2-2bc=a^2-3ab+2b^2+(a-2b)c$
$=(a-2b)(a-b)+(a-2b)c=(a-2b)(a-b+c)$;

9) $x^4-x=x(x^3-1)=x(x-1)(x^2+x+1)$;

10) $x^4+x=x(x^3+1)=x(x+1)(x^2-x+1)$;

11) $a^2bx-b^3x^3=bx(a^2-b^2x^2)=bx(a-bx)(a+bx)$;

u. s. w. f.

Anmerkung. Für den Augenblick mögen diese Winke, welche hier nur auf Versuche aufmerksam machen sollen, hinreichen.

XXII.

Uebersieht man Alles bisherige, so findet man, daß alles darauf ankommt, gegebene Ausdrücke in andere gleiche (identische) zu verwandeln.

Sollen z. B. $\frac{4a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{5}{3}}}{\sqrt{c^3}}$ und $-\frac{3}{2}.\frac{a^{-\frac{5}{3}}b^{\frac{3}{4}}c^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{ad}}$

zu einander addirt, oder von einander subtrahirt, oder mit einander multiplicirt, oder durch einander dividirt werden, so wird man erhalten:

im ersten Falle $\frac{4a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{5}{3}}}{\sqrt{c^3}}+\left(-\frac{3}{2}.\frac{a^{-\frac{5}{3}}b^{\frac{3}{4}}c^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{ad}}\right)$

im andern Falle $\frac{4a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{5}{3}}}{\sqrt{c^3}}-\left(-\frac{3}{2}.\frac{a^{-\frac{5}{3}}b^{\frac{3}{4}}c^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{ad}}\right)$

im dritten Falle aber $\left(\frac{4a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{5}{3}}}{\sqrt{c^3}}\right).\left(-\frac{3}{2}.\frac{a^{-\frac{5}{3}}b^{\frac{3}{4}}c^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{ad}}\right)$

und

im vierten Falle $\left(\frac{4a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{5}{3}}}{\sqrt[3]{c^3}}\right):\left(-\frac{3}{2}.\frac{a^{-\frac{5}{2}}b^{\frac{3}{4}}c^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{ad}}\right)$;

weil das Addiren, Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren von A und B bloß in dem Hinschreiben der Summe A+B oder der Differenz A—B, des Produkts A.B oder des Quotienten $\frac{A}{B}$ oder A:B besteht. (§. §. 1. 3. 23 und 27.). Allein man will gewöhnlich nicht diese ersten unmittelbaren Resultate, sondern dafür andere mit diesen gleiche (identische) Ausdrücke, und um diese zu erhalten, dazu dienen eben die Formeln (Gleichungen) der frühern Kapitel, so wie die bisher beigebrachten Uebungs-Beispiele, welche keinen andern Zweck haben, als diese Kunst, gegebene Ausdrücke beliebig zu verwandeln, gehörig praktisch einzuüben. Gewöhnlich hat man bei diesem Verwandeln den Zweck, unter mehren identischen die einfachsten Ausdrücke heraus zu finden; allein zuweilen auch den andern Zweck, überhaupt einen Ausdruck von bestimmter Form zu haben, wenn er auch nicht der einfachste seyn sollte.

1) Es lassen sich aber algebraische Summen, deren einzelne Glieder alle oder nur zum Theil Quotienten-Form haben (Brüche sind), in einen Quotienten verwandeln (unter den Bruch bringen) nach (§. §. 39. 40.) oder auch auf demselben Wege, der in diesem Kapitel (VI.) für numerische Quotienten (gemeine Brüche) bereits betreten worden; — dadurch nehmlich, daß man die einzelnen Glieder alle in neue Quotienten (Brüche) verwandelt, die einen und denselben Divisor (Nenner) haben, und dann nach (§. 45. Anmerkg. 2.) die Zähler zusammen nimmt und den gemeinschaftlichen Nenner (General-Nenner) beibehält.

Die Nenner mögen daher numerische Zahlen oder allgemeine Ausdrücke seyn, so muß man wie in (VI.) einen General-Nenner heraussuchen, welcher die beiden Eigenschaften

hat, einmal, daß er durch jeden der einzelnen Nenner bequem dividirt werden könne, so daß der Quotient eine einfache und bequeme Gestalt gewinne; dann auch, daß er selbst so einfach wie möglich erscheine. Weil dann $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$ ist, so muß man, wenn der General-Nenner N ist, $bm=N$ sich denken, also $m=\frac{N}{b}$ nehmen und damit den Zähler a multipliciren, um den neuen Zähler am zu erhalten, wie dies bereits (VI.) für jenen besondern Fall gezeigt worden ist. *)

Hieher gehören nun folgende Uebungs-Beispiele:

1) $p\pm\frac{q}{s}=\frac{ps\pm q}{s}$;

2) $\frac{p}{q}\pm r=\frac{p\pm qr}{q}$;

3) $\frac{m}{n}-\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{mqs-nps+nqr}{nqs}$;

4) $\frac{2a}{3b}-\frac{3c}{5d}-f+\frac{g}{h}=\frac{10adh-9bch-15bdfh+15bdg}{15bdh}$;

5) $\frac{a}{b}-c-d+\frac{d}{3b}=\frac{3a-3bc-3bd+d}{3b}$;

6) $\frac{3a}{4b}-\frac{1}{b}+\frac{5a}{8c}-\frac{d}{4bc}=\frac{6ac-8c+5ab-2d}{8bc}$;

7) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}+d=\frac{bc-ac-ab+abcd}{abc}$;

8) $-\frac{2m}{3n}+\frac{3p}{2q}-\frac{5r}{7v}=\frac{-28mqv+63npv-30nqr}{42nqv}$;

9) $-\frac{3m}{4n}+\frac{p}{6q}-\frac{5r}{9v}=\frac{-27mqv+6npv-4nqr}{36nqv}$;

10) $\frac{3a}{4bcd}-\frac{1}{2c}-\frac{5a}{6d}+\frac{3f}{8cd}-\frac{1}{b}=\frac{18a-12bd-20abc+9bf-24cd}{24bcd}$;

11) $\frac{2a}{3b^2}-\frac{2d}{5bc^2}-p+\frac{5}{ab^2c^2}=\frac{10a^2c^2-6abd-15ab^2c^2p+75}{15ab^2c^2}$;

---

*) D. h. man dividirt mit dem Nenner b in den General-Nenner N (oder bm), um den Ausdruck $\frac{N}{b}$ oder m zu erhalten, womit der Zähler a multiplicirt werden muß, um den neuen Zähler am zu haben.

12) $-3a+2b-\frac{h}{4bcd}-\frac{k}{2bcg}=\frac{-12abcdg+8b^2cdg-gh-2dk}{4bcdg}$;

13) $3a-2b-\frac{h}{4bc}+\frac{k}{6cd}=\frac{12(3a-2b)bcd-3dh+2bk}{12bcd}$;

14) $\frac{a^2d}{3b^7c^3}-\frac{3ad}{2b^4c^2}-\frac{b^2}{cd}=\frac{2a^2d^2-9ab^3cd^2-6b^9c^2}{6b^7c^3d}$;

15) $\frac{a}{b^3}-\frac{2c}{b^2d}+\frac{3f}{bd^2}-\frac{h}{d^3}=\frac{ad^3-2bcd^2+3b^2df-b^3h}{b^3d^3}$;

16) $\frac{2a}{b^m}-\frac{3c}{b^{m-1}}=\frac{2a-3bc}{b^m}$;

17) $\frac{2a}{b^m}-\frac{3c}{b^{m-1}}+\frac{4d}{b^{m-2}}=\frac{2a-3bc+4b^2d}{b^m}$;

18) $-\frac{a}{b^m}+\frac{3c}{b^{m-n}}+\frac{4d}{b^{m-r}}=\frac{-a+3b^nc+4b^rd}{b^m}$;

19) $x+2vz-3xv-\frac{xz^2-5vxz^2+v^3}{z^2-xz}=\frac{2vz^3-x^2z+3vx^2z-v^3}{z^2-xz}$;

20) $\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}=x$;

21) $\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}=y$;

22) $\frac{9a-7b}{8}-\frac{2a-3b}{6}+\frac{c}{4}=\frac{19a-9b+6c}{24}$;

23) $\frac{-a+2b}{5}-\frac{3a-b}{10}+\frac{4a}{15}=\frac{-7a+15b}{30}$;

24) $\frac{2x-3y}{6}-\frac{4x-3y-7}{4}+\frac{x-3}{2}-\frac{2x+y}{8}=\frac{-10x+3y+6}{24}$;

25) $\frac{2a}{3b}-\frac{2a-3b}{2bc}-\frac{a-b+c}{4bc^2}=\frac{8ac^2-12ac+18bc-3a+3b-3c}{12bc^2}$;

26) $ab-\frac{3c}{a^2b}-\frac{3d-a+b}{a^5b^3}=\frac{a^6b^4-3a^3b^2c-3d+a-b}{a^5b^3}$;

27) $\frac{8x}{5a}-y-\frac{3x-4y}{4b}+\frac{x-y}{2a}=\frac{(42b-15a)x-10(2ab-2a+b)y}{20ab}$;

28) $\frac{3a^m(a+b)^{m-2}}{c^{m+2}d^{m-3}f^4}-\frac{a^{3m}-2acd^{4-m}}{c^{m+1}df^n(a+b)^2}-\frac{1}{c^{m-2}f^{n-3}(a+b)^2}$
$=\frac{3a^mf^{n-4}(a+b)^m-ca^{3m}d^{m-4}+2ac^2-c^4f^3d^{m-3}}{c^{m+2}d^{m-3}f^n(a+b)^2}$;

29) $\frac{(a+x)^{\frac{p}{q}-1}}{3b^2(c+x)^{\frac{m}{n}}}-\frac{b^{\frac{2}{3}}x^2(c+x)^{\frac{m}{n}}}{(a+x)^{1-\frac{p}{2q}}}=\frac{(a+x)^{\frac{p}{2q}}-3b^{\frac{8}{3}}x^2}{3b^2(c+x)^{\frac{m}{n}}(a+x)^{1-\frac{p}{2q}}}$;

30) $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}=\frac{2}{1-x^2}$;

31) $\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}=-\frac{2x}{1-x^2}$;

32) $\frac{a}{a-x}+\frac{a}{a+x}=\frac{2a^2}{a^2-x^2}$;

33) $\frac{a}{a-x}-\frac{a}{a+x}=\frac{2ax}{a^2-x^2}$;

34) $\frac{a+2b}{3c-2d}-\frac{a-2b}{5c-d}=\frac{2ac+ad+16bc-6bd}{15c^2-13cd+2d^2}$;

35) $\frac{3a-2b}{2a+3b}-\frac{a-3b}{4a-2b}=\frac{10a^2-11ab+13b^2}{8a^2+8ab-6b^2}$;

36) $\frac{a}{b-z}-\frac{-a+2b}{z}-\frac{4a-b}{4z}-2=\frac{-7b^2+4az-bz+8z^2}{4bz-4z^2}$ *)

37) $=\frac{a}{b-z}-\left(\frac{-a+2b}{z}+\frac{4a-b}{4z}\right)-2=\frac{a}{b-z}-\frac{7b}{4z}-2=$ etc. etc.;

38) $\frac{a^2}{a^2-x^2}-\frac{a+x}{a-x}=-\frac{2ax+x^2}{a^2-x^2}$;

39) $\frac{a^2}{a^2-x^2}-\frac{a-x}{a+x}=\frac{2ax-x^2}{a^2-x^2}$;

40) $\frac{2a-b}{a+x}-\frac{3a-b}{a-x}+\frac{(a-b)x}{a^2-x^2}-\frac{4a}{x}=\frac{-a^2-4ax+bx}{a^2-x^2}-\frac{4a}{x}$

$=-\frac{4a^3+a^2x-bx^2}{a^2x-x^3}=\frac{bx^2-a^2x-4a^3}{a^2x-x^3}$

$=\frac{4a^3+a^2x-bx^2}{x^3-a^2x}=$ etc. etc.;

41) $\frac{a^3}{(a-b)^3}-\frac{ab}{(a-b)^2}+\frac{b}{a-b}=\frac{a^3-ab^2+b^3}{(a-b)^3}$;

42) $\frac{a^m}{(a+b)^n}+\frac{a^{m-2}b^r}{(a+b)^{n-1}}-\frac{a^{m-3}b^r}{(a+b)^{n-2}}=\frac{a^m-a^{m-2}b^{r+1}-a^{m-3}b^{r+2}}{(a+b)^n}$;

43) $\frac{ac}{a-2c}-\frac{a^2-c^2}{a+2c}-\frac{a^2c+ac^2}{a^2-4c^2}=\frac{-a^3+2a^2c+2ac^2-2c^3}{a^2-4c^2}$;

44) $\frac{2ax+x^2}{(a-x)^2}-\frac{a^2+5ax}{(a+x)^2}-\frac{x}{a-x}=\frac{ax+2x^2}{(a-x)^2}-\frac{a^2+5ax}{(a+x)^2}$

$=\frac{2x^4+13a^2x^2-2a^3x-a^4}{(a^2-x^2)^2}$;

45) $\frac{a-(n+1)a^{n+1}}{1-a}+\frac{a^2(1-a^n)}{(1-a)^2}=\frac{a-(n+1)a^{n+1}+na^{n+2}}{(1-a)^2}$;

---

*) Bei solchen Aufgaben ist es meist vortheilhaft, erst diejenigen der Brüche zusammenzunehmen, welche leicht auf einerlei Benennung gebracht werden können, so wie solches für dasselbe Beispiel in der nächsten Nummer angedeutet ist.

$$46)\ \frac{3}{4(1-x)^2}+\frac{3}{8(1-x)}+\frac{1}{8(1+x)}-\frac{1-x}{4(1+x^2)}=\frac{1+x+x^2}{1-x-x^4+x^5};$$

$$47)\ \frac{1+2x}{(3-x)(1+x)}+\frac{7}{(2+x)(1-3x)}+\frac{x}{(1+x)(2+x)}=$$

$$=\frac{23+16x-30x^2-3x^3}{(3-x)(1+x)(2+x)(1-3x)};$$

$$48)\ \frac{3}{a+2x}-\frac{a-x}{(a-3x)(a+2x)}+\frac{1}{a-3x}=\frac{3a-6x}{(a-3x)(a+2x)}$$

$$=3.\frac{a-2x}{(a+2x)(a-3x)}.$$

2) Ist dagegen nur ein Quotient (oder Bruch) gegeben, der in einen andern Quotienten verwandelt werden soll, so kann dies nur mittelst einer der beiden Formeln des (§. 38.) geschehen, d. h. nur dadurch, daß man Dividend und Divisor (Zähler und Nenner) durch einen und denselben Ausdruck multiplicirt, oder dividirt. *) Bei diesem Multipliciren oder Dividiren hat man aber die Sätze der (§. §. 26 und 45. Anmerkung 1 und 2.) wohl im Auge zu behalten, nach denen eine algebraische Summe multiplicirt oder dividirt wird, wenn man jedes einzelne ihrer Glieder multiplicirt oder dividirt; während dagegen ein Produkt multiplicirt oder dividirt wird, wenn man nur einen einzigen der Faktoren multiplicirt oder dividirt. —

Man multiplicirt aber Zähler und Nenner (Dividend und Divisor) mit einer und derselben Zahl, wenn der eine oder der andere oder beide, selbst noch Quotienten (Brüche) enthalten, welche durch die Multiplikation mit ihrem Divisor, oder mit dem Produkt der Divisoren, oder mit einer Art General-Nenner, wegfallen.

Dazu folgende Uebungs-Beispiele:

---

*) Es erleidet dies einige Ausnahme wie aus der Lehre der Proportionen hervorgeht. — Im allgemeinen ist es aber gut, die obige Regel zu behalten.

1) $\frac{\frac{5}{4}.7.6.\frac{5}{8}}{8.\frac{5}{3}.3\frac{1}{2}.5.9} = \frac{3.7.6.\frac{5}{8}}{8.\frac{5}{3}.14.5.9} = \frac{3.7.6.5}{8.8.\frac{5}{3}.14.5.9} =$

$$= \frac{3.7.6.5.3}{8.8.5.14.5.9} = \frac{3}{320},$$

wo zuerst Zähler und Nenner mit 4, dann der neue Zähler und Nenner mit 8, zuletzt der neue Zähler und Nenner mit 3 multiplicirt worden ist;

2) $\frac{a-\frac{2b}{c}-\frac{7c}{4}+\frac{3d}{6c}-3\frac{5}{8}}{(\frac{1}{2}-x)(\frac{1}{3}+2x)(\frac{3}{5}-4x)} = \frac{24ac-48b-42c^2+12d-87c}{4(1-2x)(1+6x)(\frac{3}{5}-4x)c} =$

$$= \frac{120ac-240b-210c^2+60d-435c}{4(1-2x)(1+6x)(3-20x)c};$$

wo zuerst Zähler und Nenner mit 24c, hernach noch mit 5 multiplicirt worden sind;

3) $\frac{\frac{3}{2}a-x}{\frac{2}{3}+x} = \frac{9a-6x}{4+6x}$;

4) $\frac{1\frac{3}{4}a-3\frac{1}{2}b+4c}{\frac{5}{7}x-\frac{1}{2}a} = \frac{7a-14b+16c}{\frac{20}{7}x-2a} = \frac{49a-98b+112c}{20x-14a}$;

5) $\frac{-\frac{3}{2}a-5\frac{2}{3}b+2c-\frac{7}{4}d}{-a+\frac{4}{3}b+1\frac{3}{5}c-\frac{5}{6}d-3f} = \frac{-90a-340b+120c-105d}{-60a+80b+96c-50d-180f}$

$$= \frac{90a+340b-120c+105d}{60a-80b-96c+50d+180f},$$

wo zuerst Zähler und Nenner mit 60, und dann noch der neue Zähler und Nenner mit -1 *) multiplicirt worden ist;

6) $\frac{(7\frac{1}{2}-x)(8\frac{3}{4}-3x)}{(2x-3)(\frac{5}{6}+x)(1-\frac{4}{5}x)} = \frac{(15-2x)(8\frac{3}{4}-3x)}{(2x-3)(\frac{5}{3}+2x)(1-\frac{4}{5}x)}$

$$= \frac{(15-2x)(35-12x)}{4(2x-3)(\frac{5}{3}+2x)(1-\frac{4}{5}x)} = \frac{15(15-2x)(35-12x)}{4(2x-3)(5+6x)(5-4x)}$$

---

*) Dieses letztere bemerke man noch besonders. Indem eine algebraische Summe mit -1 multiplicirt wird, ändert sich nichts an ihr, als daß alle Glieder das entgegengesetzte (+) oder (—) Zeichen erhalten. Wird daher Zähler und Nenner mit -1 multiplicirt, so wird der ganze Bruch bloß dahin umgeändert, daß die einzelnen Glieder im Zähler und im Nenner alle zugleich das entgegengesetzte + oder — Zeichen erhalten. Durch eine solche Verwandlung der Zeichen (aller Glieder) im Zähler und Nenner, erhält man also immer einen mit dem gegebenen gleichen (identischen) Quotienten.

So ist z. B. $\frac{a-b}{1-2x} = \frac{b-a}{2x-1}$; $\frac{-2a+b-3c}{-1+2x-x^2} = \frac{2a-b+3c}{1-2x+x^2}$

$\frac{1-x}{-1+x-x^2} = \frac{x-1}{x^2-x+1}$; u. s. w. f.

$$= -\frac{15.(2x-15)(12x-35)}{4(2x-3)(6x+5)(4x-5)} = \frac{-15(24x^2-250x+525)}{4(48x^3-92x^2-20x+75)}$$

$$= \frac{-360x^2+3750x-7875}{192x^3-368x^2-80x+300}.$$

Man dividirt dagegen Dividend und Divisor eines Quotienten (Zähler und Nenner eines Bruches) durch einen und denselben Ausdruck, so oft beide (Dividend und Divisor nehmlich) einen gemeinschaftlichen Faktor haben. Dieses Geschäft selbst wird im Praktischen das Aufheben der Brüche genannt. Dieses Aufheben ist aber sehr wichtig, weil sehr zusammengesetzte Brüche dadurch eine weit einfachere, ja zuweilen eine sehr einfache Form erhalten, was von allen Ausdrücken, mit seltenen Ausnahmen, in der Praxis allemal gewünscht werden muß. Für gemeine Brüche haben wir schon (§. 98.) die Art mitgetheilt, wie sie am einfachsten dargestellt werden können. Sind aber Zähler und Nenner allgemeine (Buchstaben-) Ausdrücke, so ist es nicht so leicht den größten gemeinschaftlichen Faktor des Zählers und Nenners zu finden, obgleich man ein, dem (§. 97.) angegebenen ähnliches Verfahren kann eintreten lassen, um solchen zu finden. In den meisten Fällen thut auch hier die Uebung das Meiste, so daß man der Form der Ausdrücke es absehen kann, welchen gemeinschaftlichen Faktor sie haben mögen. Man vergl. damit noch (XXI.) für die Zerlegung in Faktoren.

Folgende Beispiele mögen zur Uebung hierin dienen:

7) $\frac{a^2-ab}{2ax-a^3} = \frac{a-b}{2x-a^2}$;

8) $\frac{ax^3-bx^2+cx}{2ax^4-3bx^2} = \frac{ax^2-bx+c}{2ax^3-3bx}$;

9) $\frac{35a^2b-14ab^2-28a^3c}{7a-21a^2x+14ax^3} = \frac{5ab-2b^2-4a^2c}{1-3ax+2x^3}$;

10) $\frac{2a^{n+r}b^{m-1}c-4a^r b^{2m-1}c^2d+2a^{r+1}b^m c+6a^{r-1}b^{m-1}c^n}{8a^{r+5}b^{m+2}c^2-2a^{r+3}b^m c+10a^r b^3 c^4}$

$$= \frac{a^n-2b^m cd+ab+3a^{-1}c^{n-1}}{4a^5b^3c-a^3b+5b^{4-m}c^3};$$

11) $\frac{14a^2-7ab}{10ac-5bc}=\frac{7a(2a-b)}{5c(2a-b)}=\frac{7a}{5c}$;

12) $\frac{12a^3x^4+2a^2x^5}{18ab^2x+3b^2x^2}=\frac{2a^2x^4(6a+x)}{3b^2x(6a+x)}=\frac{2a^2x^3}{3b^2}$;

13) $\frac{6ac+9bc-5c^2}{12adf+18bdf-10cdf}=\frac{c(6a+9b-5c)}{2df(6a+9b-5c)}=\frac{c}{2df}$;

14) $\frac{14a^4b^3-10a^3b^4+6a^2b^5}{7a^2b^2cd^2-5ab^3cd^2+3b^4cd^2}=\frac{2a^2b^3(7a^2-5ab+3b^2)}{b^2cd^2(7a^2-5ab+3b^2)}=\frac{2a^2b}{cd^2}$;

15) $\frac{10a^{m+n}cd^{n+2}-14a^nb^mcd^{n+2}}{25a^{n+2}b^2c^nd-35a^{n-m+2}b^{m+2}c^nd}=\frac{2a^md^{n+2}c(5a^n-7a^{n-m}b^m)}{5a^2b^2c^nd(5a^n-7a^{n-m}b^m)}$
$=\frac{2a^{m-2}d^{n+1}}{5b^2c^{n-1}}$;

16) $\frac{5a^2+5ax}{a^2-x^2}=\frac{5a(a+x)}{(a-x)(a+x)}=\frac{5a}{a-x}$;

17) $\frac{(a+x)^2}{a^2-x^2}=\frac{a+x}{a-x}$;

18) $\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a+b)}=\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$;

19) $\frac{(a-b)^2}{a^3-b^3}=\frac{a-b}{a^2+ab+b^2}$;

20) $\frac{a^2-b^2}{a^3+b^3}=\frac{a-b}{a^2-ab+b^2}$;

21) $\frac{n^2-2n+1}{n^2-1}=\frac{(n-1)(n-1)}{(n-1)(n+1)}=\frac{n-1}{n+1}$;

22) $\frac{2x^3-3x^2+2x-3}{x^4-1}=\frac{(2x-3)(x^2+1)}{(x^2-1)(x^2+1)}=\frac{2x-3}{x^2-1}=\frac{2x-3}{(x-1)(x+1)}$;

23) $\frac{2x^3-x^2-2ax+a}{x^4-a^2}=\frac{2x-1}{x^2+a}$;

24) $\frac{ac+bd-ad-bc}{3ac-3bc-4ad+4bd}=\frac{(a-b)(c-d)}{(a-b)(3c-4d)}=\frac{c-d}{3c-4d}$;

25) $\frac{x^3-ax^2}{x^2-5ax+4a^2}=\frac{x^2(x-a)}{(x-a)(x-4a)}=\frac{x^2}{x-4a}$;

26) $\frac{x^2+x-6}{x^2+5x+6}=\frac{(x-2)(x+3)}{(x+2)(x+3)}=\frac{x-2}{x+2}$;

27) $\frac{2x^3+5x^2-12x}{7x^3+25x^2-12x}=\frac{2x^2+5x-12}{7x^2+25x-12}=\frac{(2x-3)(x+4)}{(7x-3)(x+4)}=\frac{2x-3}{7x-3}$;

28) $\frac{ax^m-bx^{m+1}}{a^2bx-b^3x^3}=\frac{x^m(a-bx)}{bx(a^2-b^2x^2)}=\frac{x^{m-1}}{b(a+bx)}$;

29) $$\frac{2x^3-(3c+d+2)x^2+(3c+d)x}{x^4-x}=\frac{2x^2-(3c+d+2)x+(3c+d)}{x^3-1}$$
$$=\frac{(x-1)[2x-(3c+d)]}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{2x-3c-d}{x^2+x+1};$$

30) $$\frac{a^2+2ab+b^2-c^2}{a^2-b^2+2bc-c^2}=\frac{(a+b)^2-c^2}{a^2-(b-c)^2}=\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b-c)(a-b+c)}=\frac{a+b+c}{a-b+c};$$

31) $$\frac{a^2-3ab+ac+2b^2-2bc}{a^2-b^2+2bc-c^2}=\frac{(a-2b)(a-b+c)}{(a+b-c)(a-b+c)}=\frac{a-2b}{a+b-c};$$

32) $$\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-ac^2-bc^2}{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}=\frac{(a+b)^3-c^2(a+b)}{4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2}$$
$$=\frac{(a+b)[(a+b)^2-c^2]}{(2bc+a^2-b^2-c^2)(2bc-a^2+b^2+c^2)}=\frac{(a+b)(a+b+c)(a+b-c)}{[a^2-(b-c)^2][(b+c)^2-a^2]}$$
$$=\frac{a+b}{(a-b+c)(b+c-a)};$$

33) $$\frac{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3-ac^2+bc^2}{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}$$
$$=\frac{(a-b)^3-(a-b)c^2}{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}=\frac{a-b}{(c+a+b)(c-a-b)}$$
$$=\frac{b-a}{(a+b+c)(a+b-c)}.$$

Arithmetik.

Siebentes Kapitel.

Der binomische Lehrsatz.

§. 128. Bemerkung.

Multiplicirt man das Binomium (die zweigliedrige algebraische Summe) $a+b$ mit sich selbst und was herauskommt nochmal mit $a+b$, und was sich dann ergiebt wiederum mit $a+b$, u. s. f., so erhält man nach den Regeln der Multiplikation, wenn man $1.a$ statt a und $1.b$ statt b schreibt:

$$\begin{array}{r} 1.a+1.b \\ 1.a+1.b \\ \hline 1.a^2+1.ab \\ +1.ab+1.bb \\ \hline 1.a^2+2.ab+1.b^2 \quad = (a+b)^2 \\ 1.a+1.b \\ \hline 1.a^3+2.a^2b+1.ab^2 \\ +1.a^2b+2.ab^2+1.b^3 \\ \hline 1.a^3+3.a^2b+3.ab^2+1.b^3 \quad = (a+b)^3 \\ 1.a+1.b \\ \hline 1.a^4+3.a^3b+3.a^2b^2+1.ab^3 \\ +1.a^3b+3.a^2b^2+3.ab^3+1.b^4 \\ \hline 1.a^4+4.a^3b+6.a^2b^2+4.ab^3+1.b^4 \quad = (a+b)^4 \\ 1.a+1.b \\ \hline 1.a^5+4.a^4b+6.a^3b^2+4.a^2b^3+1.ab^4 \\ +1.a^4b+4.a^3b^2+6.a^2b^3+4.ab^4+1.b^5 \\ \hline 1.a^5+5.a^4b+10.a^3b^2+10.a^2b^3+5.ab^4+1.b^5 \quad = (a+b)^5 \\ 1.a+1.b \\ \hline 1.a^6+5.a^5b+10.a^4b^2+10.a^3b^3+5.a^2b^4+1.ab^5 \\ +1.a^5b+5.a^4b^2+10.a^3b^3+10.a^2b^4+5.ab^5+1.b^6 \\ \hline 1.a^6+6.a^5b+15.a^4b^2+20.a^3b^3+15.a^2b^4+6.ab^5+1.b^6 \quad = (a+b)^6 \end{array}$$

u. s. w. f.*)

*) Der ohne Klammern geschriebene Ausdruck ab^5 ist in seiner Be-

§. 129. Bemerkung.

Betrachtet man die Resultate dieser Multiplikation genauer, so fällt das Gesetz, welches die Buchstaben beobachten, leicht in die Augen, so daß man z. B. für $(a+b)^7$, die Buchstaben-Glieder erhalten wird:

$$a^7,\ a^6b,\ a^5b^2,\ a^4b^3,\ a^3b^4,\ a^2b^5,\ ab^6,\ b^7.$$

Es fragt sich daher nur noch, wie die Ziffern-Coefficienten zu finden seyn werden? — Beobachtet man aber die Art wie die Multiplikation verrichtet ist, so findet man, daß um irgend eines der Resultate zu erhalten, zwei unter einander geschriebene Reihen addirt worden sind, von denen jede, der Folge nach, aus denselben Ziffern besteht und zwar aus den Ziffern, welche die Coefficienten der nächstvorhergehenden Potenz bilden. — Um daher die Zahlen-Coefficienten für $(a+b)^7$ zu finden, nehme man die für $(a+b)^6$ und schreibe sie so unter einander und addire je zwei unter einander stehende:

	1,	6,	15,	20,	15,	6,	1
		1,	6,	15,	20,	15,	6, 1
und erhält	1,	7,	21,	35,	35,	21,	7, 1,

welche, obigen Buchstaben-Gliedern beziehlich vorgesetzt, geben:

$$(a+b)^7 = 1.a^7 + 7.a^6b + 21.a^5b^2 + 35.a^4b^3 + 35.a^3b^4 + 21.a^2b^5 + 7.ab^6 + 1.b^7.$$

---

zeichnung unbestimmt und kann eben so gut das Produkt $a(b^5)$ als auch die Potenz $(ab)^5$ vorstellen. Hier und in ähnlichen Fällen immer bedeutet er das erstere, nehmlich das Produkt $a(b^5)$ nach der Regel, die man gewöhnlich stillschweigend festsetzt: Wenn Addition und Subtraktion die erste Klasse, Multiplikation und Division die zweite Klasse, Potenziren und Radiciren die dritte Klasse der Operationen bilden, und ein Ausdruck nicht bestimmt genug (aus Mangel an Klammern oder anderer Unterscheidungsmittel) herausgehoben ist, so daß seine Bedeutung doppelsinnig aufgefaßt werden könnte, so läßt man der spätern Klasse der Operationen jedesmal das Vorrecht, so z. B. daß in ab^5 zuerst potenzirt dann multiplicirt wird.

Schreibt man hier wieder diese Coefficienten so unter einander und addirt, nehmlich:

	1,	7,	21,	35,	35,	21,	7,	1
		1,	7,	21,	35,	35,	21,	7, 1
so erhält man	1,	8,	28,	56,	70,	56,	28,	8, 1

und dieses sind dann die Zahlen-Coefficienten des für $(a+b)^8$ sich ergebenden Resultats, so daß man hat:

$$(a+b)^8 = 1.a^8 + 8.a^7b + 28.a^6b^2 + 56.a^5b^3 + 70.a^4b^4 + 56.a^3b^5 + 28.a^2b^6 + 8.ab^7 + 1.b^8.$$

Es erscheint aber nun als leicht, auch die Resultate für

$(a+b)^9$, $(a+b)^{10}$, $(a+b)^{11}$, etc. etc. etc.,

eines aus dem andern ohne weiters hinschreiben zu können.

§. 130. Bemerkung.

Statt aber, um eine folgende Potenz von $a+b$ zu entwickeln, die Ziffern-Coefficienten der nächstvorhergehenden Potenz wirklich so untereinander zu schreiben und je zwei untereinanderstehende zu addiren, kann man sich das Untereinandersetzen als geschehen denken, und erhält dann

zum 1ten Coefficienten der neuen Potenz 1,
zum 2ten der neuen Potenz, die Summe aus dem 2ten und 1ten der nächstvorhergehenden;
zum 3ten der neuen Potenz, die Summe aus dem 3ten und 2ten der nächstvorhergehenden;
zum 4ten der neuen Potenz, die Summe aus dem 4ten und 3ten der nächstvorhergehenden;
zum 5ten der neuen Potenz, die Summe aus dem 5ten und 4ten der nächstvorhergehenden;
u. s. w. f.; allgemein
zum pten Coefficienten der neuen Potenz, die Summe des pten und $p-1$ten der vorhergehenden;
zum $(p+1)$ten der neuen Potenz, die Summe aus dem $(p+1)$ten und pten der nächstvorhergehenden.

Note. So ist z. B. im (§. 128.) der 5te Coefficient von $(a+b)^6$, nehmlich 15, die Summe aus dem 5ten und 4ten Coefficienten von $(a+b)^5$, nehmlich die Summe aus 5 und 10; der 4te Coefficient 20 in $(a+b)^6$ ist die Summe aus dem 4ten nehmlich 10, und dem 3ten nehmlich 10 in $(a+b)^5$; u. s. w. f.

§. 131. Aufgabe.

Man soll allgemein $(a+b)^m$ entwickeln.

Auflösung. 1) Die Glieder der gesuchten Entwicklung werden hinsichtlich der Buchstaben, in der Reihe

a^m, $a^{m-1}b$, $a^{m-2}b^2$, $a^{m-3}b^3$, $a^{m-4}b^4$, $a^{m-5}b^5$, u. s. w. f.

zuletzt noch a^4b^{m-4}, a^3b^{m-3}, a^2b^{m-2}, ab^{m-1}, b^m, enthalten seyn.

2) Die noch unbekannten Coefficienten dieser Glieder wollen wir einstweilen in ihrer Folge durch

m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 u. s. w. also die letztern durch

m_{m-4}, m_{m-3}, m_{m-2}, m_{m-1}, m_m

bezeichnen, so daß m_0 und m_m jedesmal 1 ist, die übrigen dazwischen liegenden aber noch ganz unbekannt sind und erst näher bestimmt werden sollen.

3) Für die nächste Potenz $(a+b)^{m+1}$ ist das Gesetz der Buchstaben dasselbe und die Zahlen-Coefficienten müssen diejenigen seyn, die sich aus denen in (n. 2.) für $(a+b)^m$ ergeben, wenn $m+1$ statt m gesetzt wird; sie können also durch

$(m+1)_0$, $(m+1)_1$, $(m+1)_2$, $(m+1)_3$, $(m+1)_4$ u. s. f.

und zuletzt durch

$(m+1)_{m-3}$, $(m+1)_{m-2}$, $(m+1)_{m-1}$, $(m+1)_m$, $(m+1)_{m+1}$

bezeichnet werden, wo $(m+1)_0$ und $(m+1)_{m+1}$ nichts anders als 1 seyn werden, wo die übrigen aber mit denen in (n: 2.) gleich unbekannt sind, wenn auch die hiesigen aus den vorhergehenden abgeleitet werden, indem man statt m die nächstgrößere Zahl $m+1$ schreibt.

4) Nun müssen aber nach (§. 130.) die unbekannten Coefficienten in (n. 2. und n. 3.) solche Ausdrücke vorstellen, daß jeder in der 2ten Reihe (n. 3.) die Summe ist von dem

ebensovielten und seinem nächstvorhergehenden in der obern Reihe (n. 2.), daß also:

$$(m+1)_1 = m_1 + m_0,$$
$$(m+1)_2 = m_2 + m_1,$$
$$(m+1)_3 = m_3 + m_2,$$
$$(m+1)_4 = m_4 + m_3,$$
$$(m+1)_5 = m_5 + m_4,$$

u. s. w. f. werde; und es käme demnach darauf an, Ausdrücke zu finden, denen diese Eigenschaft zukommt, und die zugleich den übrigen Forderungen entsprechen.

5) Bei einiger Aufmerksamkeit auf die verschiedene Form der Ausdrücke findet man aber, daß

1, $\frac{m}{1}$, $\frac{m(m-1)}{1.2}$, $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$, $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$,

$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}$, $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1.2.3.4.5.6}$,

u. s. w. f. solche Ausdrücke sind. Setzt man nehmlich in ihnen überall $m+1$ statt m, so erhält man:

1, $\frac{m+1}{1}$, $\frac{(m+1)m}{1.2}$, $\frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}$, $\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1.2.3.4}$,

$\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4.5}$, $\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5.6}$,

u. s. w. f.

und jeder von diesen letztern Ausdrücken, ist in der That die Summe des ebensovielten und seines nächstvorhergehenden in der erstern Reihe. *)

6) Nimmt man daher die Ausdrücke dieser erstern Reihe, statt der Coefficienten m_0, m_1, m_2, etc. in (n. 2.), so wird man jetzt bloß noch zu untersuchen haben, ob diese Ausdrücke für irgend eine bestimmte Zahl m die richtige in (§. 128.)

---

*) Es ist z. B.

$$\frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m}{1} = \frac{m(m-1)+m.2}{1.2} = \frac{m.(m-1+2)}{1.2} = \frac{(m+1)m}{1.2};$$

und

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \frac{m(m-1)}{1.2} = \frac{m(m-1)}{1.2}.\left(\frac{m-2}{3}+1\right)$$
$$= \frac{m(m-1)}{1.2}.\frac{m+1}{3} = \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3};$$

u. s. w. f.

schon durch gewöhnliche Multiplikation gefundene Entwicklung geben. Denn da wir aus (n. 5.) schon wissen, daß wenn man in ihnen die nächstgrößere Zahl setzt statt m, dann allemal Ausdrücke hervorgehen, von denen jeder p^{te} die Summe ist des p^{te} und $p-1^{ten}$ der vorhergehenden Zahlen-Reihe, und da wir ferner aus (§. 130.) wissen, daß dies gerade das Gesetz ist, nach welchem die Coefficienten der folgenden Potenz, aus denen der nächstvorhergehenden gebildet werden müssen, so werden dann dieselben Ausdrücke m_0, m_1, m_2, etc. etc., für jede folgende Zahl statt m, ebenfalls nichts anders geben können, als die Coefficienten der folgenden Potenzen von $a+b$.

Setzt man aber in

$$m_0,\ m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,\ \text{etc. etc.}$$

d. h. jetzt in

$$1)\ \frac{m}{1},\ \frac{m(m-1)}{1.\ 2},\ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3},\ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4},$$

etc. etc., zuerst 2, dann 3, 4, 5, etc. statt m, so erhält man:

für							
m=2	1,	2,	1,	0,	0,	0,	etc.
m=3	1,	3,	3,	1,	0,	0,	etc.
m=4	1,	4,	6,	4,	1,	0,	etc.
m=5	1,	5,	10,	10,	5,	1,	etc.

u. s. f.

und weil diese Zahlen-Reihen zugleich die Coefficienten sind von $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$, $(a+b)^5$, etc. etc. (wie sich aus der Vergleichung mit §. 128. ergiebt), so ist man überzeugt, daß dieselben Ausdrücke auch für jede beliebige Zahl m, die Coefficienten der Potenz $(a+b)^m$ geben müssen.

8) Man hat also:

$$(a+b)^m = a^m + m.a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}.a^{m-2}b^2 +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3.}.a^{m-3}b^3 +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}.a^{m-4}b^4 + \ldots.$$

was wir kürzer noch so schreiben:

I. $(a+b)^m = a^m + m_1.a^{m-1}b + m_2.a^{m-2}b^2 + m_3.a^{m-3}b^3 + \ldots$
$$+ m_{m-2}.a^2b^{m-2} + m_{m-1}.ab^{m-1} + m_m.b^m,$$

wo die Bedeutung von m_1, m_2, m_3, etc. etc. etc. die oben (n. 6.) angenommene ist, so nehmlich, daß m_p *) den Quotienten $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(p-1)]}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ p}$ vorstellt.

Anmerkung 1. Die Gleichung (I.) enthält den sogenannten binomischen Lehrsatz, und die Coefficienten

m_0 oder 1, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, etc. etc. etc.

heißen die Binomial-Coefficienten.

Anmerkung 2. Setzt man in (I.) $a=b=1$, so erhält man

$(1+1)^m$ oder $2^m = 1 + m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_m$

d. h. die Summe aller Binomial-Coefficienten von m_0 an bis m_m ist $=2^m$, wo m eine absolute ganze Zahl.

§. 132. Zusatz.

Die Binomial-Coefficienten vorwärts gelesen vom 1ten, d. h. von m_0 an gerechnet, sind genau dieselben, als wenn man sie rückwärts liest, von dem letzten m_m an gerechnet. — Denn da $a+b=b+a$ ist, so ist auch $(a+b)^m=(b+a)^m$. — Nun ist aber nach (I.)

$(b+a)^m = b^m + m_1.b^{m-1}a + m_2.b^{m-2}a^2 + m_3.b^{m-3}a^3 + \ldots.$

und da diese Entwicklung dieselbe auch seyn muß, als die von

---

*) Die Zeichen $m_1, m_2, m_3, \ldots m_p$ sind hier, wie man sieht, dieselben der Form und der Bedeutung nach, welche in den Uebungs-Beispielen Kap. 6. II. eingeführt und gebraucht worden sind.

$(a+b)^m$ rückwärts gelesen, so fällt die Richtigkeit der Behauptung in die Augen.

Es ist also

$$m_1 = m_{m-1}, \qquad m_2 = m_{m-2},$$
$$m_3 = m_{m-3}, \qquad m_4 = m_{m-4},$$

und allgemein $m_p = m_{(m-p)}$,

so lange nur m eine absolute ganze Zahl ist.*)

Anmerkung. Daß $m_p = m_{m-p}$ seyn müsse, kann auch noch direkt gezeigt werden. Es ist nehmlich nach unsrer Annahme:

$$m_p = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots[m-(p-1)]}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ p}$$

und $$m_{m-p} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots[m-(m-p-1)]}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ (m-p)}.$$

Multiplicirt man nun Zähler und Nenner des ersten dieser Brüche mit dem Nenner des 2ten, und Zähler und Nenner des 2ten derselben, mit dem Nenner des ersten, so daß beide Brüche einerlei Nenner bekommen, so werden die Zähler der beiden neuen Brüche ebenfalls dieselben seyn, jeder nehmlich das Produkt aller ganzen Zahlen, von 1 an bis m inclusive. Also sind die beiden durch m_p und m_{m-p} bezeichneten Brüche allemal einander gleich, wenn nur m und p absolute ganze Zahlen sind und p die kleinere von beiden.

Note. So ist z. B. $8_3 = 8_5$, $8_2 = 8_6$, $11_3 = 11_8$, $11_4 = 11_7$, $11_5 = 11_6$; $9_1 = 9_8$, $9_2 = 9_7$, $9_3 = 9_6$, $9_4 = 9_5$; u. dgl. f. Es ist nehmlich z. B. $11_4 = \frac{11.10.9.8}{1.2.3.4}$ und $11_7 = \frac{11.10.9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5.6.7}$; und läßt man in dem 2ten Bruche (11_7) die gemeinschaftlichen Faktoren 7.6.5 und 5.6.7 im Zähler und Nenner gegenseitig weg, so erhält man den ersten 11_4 ohne weiters; oder bringt man (nach der Anmerkung) die beiden Brüche 11_4 und 11_7 dadurch unter einerlei Benennung, daß man Zähler und Nenner des ersten mit dem Nenner des 2ten und Zähler und Nenner des 2ten mit dem Nenner des 1ten multiplicirt, so erhält man:

$$11_4 = \frac{11.10.9.8.1.2.3.4.5.6.7}{1.\ 2.3.4.1.2.3.4.5.6.7} \text{ und } 11_7 = \frac{11.10.9.8.7.6.5.1.2.3.4}{1.2.3.4.5.6.7.1.2.3.4}$$

---

*) Ist daher m eine ungerade Zahl $=2p+1$, so ist $m-p=p+1$ und dann $m_p = m_{p+1}$; d. h. 2 Glieder in der Mitte sind dann hinsichtlich der Coefficienten einander gleich. Ist dagegen m eine gerade Zahl $=2p$, so giebt es nur ein mittleres Glied m_p, und $m_{p-1} = m_{p+1}$ sind dann die diesem nächstanliegenden Glieder.

und da sind nun die Nenner dieselben, und auch die Zähler dieselben, jeder letztere nehmlich das Produkt 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11. — So auch mit den übrigen Beispielen.

§. 133. Zusatz.

Setzt man in der Formel (I. §. 131.) $-b$ statt b, und bemerkt, daß die geraden Potenzen von $-b$ genau dieselben sind wie die von b, und daß die ungeraden Potenzen von $-b$ sich von denen von b nur durch das — Zeichen unterscheiden, so hat man sogleich

$$\text{II. } (a-b)^m = a^m - m_1.a^{m-1}b + m_2.a^{m-2}b^2 - m_3.a^{m-3}b^3 + m_4.a^{m-4}b^4 - m_5.a^{m-5}b^5 + \ldots.$$

wo das letzte Glied $+b^m$ seyn wird oder $-b^m$, je nachdem m eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Anmerkung. Man hat daher:

$$(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$
$$(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$
$$(a\pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4,$$
$$(a\pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5,$$

u. s. w. f. — Und hieraus folgt auch leicht noch:

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2),$$
$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab,$$
$$(a+b)^3 + (a-b)^3 = 2(a^3+3ab^2),$$
$$(a+b)^3 - (a-b)^3 = 2(3a^2b+b^3),$$
$$(a+b)^4 + (a-b)^4 = 2(a^4+6a^2b^2+b^4),$$
$$(a+b)^4 - (a-b)^4 = 8ab(a^2+b^2),$$

u. s. w. f.

§. 134. Zusatz.

Man kann den binomischen Lehrsatz auch noch in anderer Form ausdrücken. Bezeichnen nehmlich A, B, C, D, E, F, G, H, etc. etc. die auf einander folgenden Glieder der Entwicklung von $(a+b)^m$ in (§. 131. I.), so daß also

$$A = a^m,\ B = m_1.a^{m-1}b,\ C = m_2.a^{m-2}b^2,\ \text{etc. etc.}$$

seyn wird, so läßt sich der Satz (§. 131. I.) auch so schreiben

$$\text{III. } (a+b)^m = a^m + \frac{m}{1}\cdot\frac{b}{a}A + \frac{m-1}{2}\cdot\frac{b}{a}\cdot B + \frac{m-2}{3}\cdot\frac{b}{a}\cdot C +$$

$$+\frac{m-3}{4}\cdot\frac{b}{a}\cdot D + \frac{m-4}{5}\cdot\frac{b}{a}\cdot E + \frac{m-5}{6}\cdot\frac{b}{a}\cdot F + \frac{m-6}{7}\cdot\frac{b}{a}\cdot G + \text{etc.}$$

Man bedient sich aber dieser Form im Praktischen, um in der Entwicklung der m^{ten} Potenz eines Binomiums ein Glied jedesmal aus dem nächstvorhergehenden bequemer ableiten zu können.

Beispiel. Man soll $(3x-\frac{1}{2}y)^7$ entwickeln. — Hier ist $a=3x$, $b=-\frac{1}{2}y$, $m=7$, und $\frac{b}{a}=-\frac{y}{6x}$; $\frac{m-1}{2}=3$, $\frac{m-2}{3}=\frac{5}{3}$, $\frac{m-3}{4}=1$, $\frac{m-4}{5}=\frac{3}{5}$, $\frac{m-5}{6}=\frac{1}{3}$, $\frac{m-6}{7}=\frac{1}{7}$, $\frac{m-7}{8}=0$, etc. etc. und daher:

$$A=(3x)^7=3^7\cdot x^7=2187x^7;$$

$$B=-7\cdot\frac{y}{6x}\cdot A=-\frac{5103}{2}x^6y;$$

$$C=-3\cdot\frac{y}{6x}\cdot B=+\frac{5103}{4}x^5y^2;$$

$$D=-\frac{5}{3}\cdot\frac{y}{6x}\cdot C=-\frac{2835}{8}x^4y^3;$$

$$E=-1\cdot\frac{y}{6x}\cdot D=+\frac{945}{16}x^3y^4;$$

$$F=-\frac{3}{5}\cdot\frac{y}{6x}\cdot E=-\frac{189}{32}x^2y^5;$$

$$G=-\frac{1}{3}\cdot\frac{y}{6x}\cdot F=+\frac{21}{64}xy^6;$$

$$H=-\frac{1}{7}\cdot\frac{y}{6x}\cdot G=-\frac{1}{128}y^7;$$

$$J=0\cdot\frac{y}{6x}\cdot H=0; \quad \text{u. s. w.}$$

Also findet man:

$$(3x-\tfrac{1}{2}y)^7=2187x^7-\frac{5103}{2}x^6y+\frac{5103}{4}x^5y^2-\frac{2835}{8}x^4y^3+\frac{945}{16}x^3y^4-$$
$$-\frac{189}{32}x^2y^5+\frac{21}{64}xy^6-\frac{1}{128}y^7.$$

§. 135. Zusatz.

Weil ferner $a \pm b = a\left(1 \pm \frac{b}{a}\right)$ geschrieben werden kann, so hat man auch, nach (§. 57.):

$$(a \pm b)^m = a^m . \left(1 \pm \frac{b}{a}\right)^m ;$$

und um $(a \pm b)^m$ entwickelt zu haben, ist also nur nöthig $\left(1 \pm \frac{b}{a}\right)^m$ zu entwickeln und diese letztere Entwicklung noch mit a^m zu multipliciren. —

Und weil man $\frac{b}{a}$ auch durch x bezeichnen kann, so hat man dann $(a \pm b)^m = a^m (1 \pm x)^m$, wenn x den Quotienten $\frac{b}{a}$ vorstellt.

Setzt man aber in (§. 131. I. und §. 133. II.) 1 statt a und x statt b, so erhält man noch:

IV. $(1 \pm x)^m = 1 \pm m_1 . x + m_2 . x^2 \pm m_3 . x^3 + m_4 . x^4 \pm m_5 . x^5 + ..$

wo immer m als eine absolute ganze Zahl gedacht ist.

Anmerkung. Ob aber die Reihe rechts in (IV.) noch immer der Potenz $(1 \pm x)^m$ gleich seyn werde, auch wenn m nicht mehr eine ganze Zahl ist, folgt aus dem vorhergehenden noch nicht, sondern muß noch untersucht werden.

§. 136. Zusatz.

Multiplicirt man die beiden Reihen:

A) $1 + m_1 . x + m_2 . x^2 + m_3 . x^3 + m_4 . x^4 + m_5 . x^5 + ...$

B) $1 + n_1 . x + n_2 . x^2 + n_3 . x^3 + n_4 . x^4 + n_5 . x^5 + ...$

die man sich beide bis in's unendliche fortgehend denken kann, und wo m und n beliebige Ausdrücke (also nicht bloß ganze Zahlen) vorstellen sollen, mit einander, nach den gewöhnlichen Regeln der Multiplikation (§. 45.), so erhält man:

C) $1 + (m_1 + n_1)x + (m_2 + m_1 . n_1 + n_2)x^2 + (m_3 + m_2 . n_1 + m_1 . n_2 + n_3)x^3 + (m_4 + m_3 . n_1 + m_2 . n_2 + m_1 . n_3 + n_4).x^4 +$ etc. etc.

oder wenn man die Coefficienten von x, x^2, x^3, etc. gehörig reducirt: *)

D) $1+(m+n)_1 . x+(m+n)_2 . x^2+(m+n)_3 . x^3+$
$+(m+n)_4 . x^4+$ etc. etc.

Bezeichnet man daher die Reihe (A.) durch $f(m)$, so muß die Reihe (B.), weil sie sich von der (A.) nur dadurch unterscheidet, daß, wo dort m steht, hier n zu finden ist, durch $f(n)$ bezeichnet werden, während die Reihe (D.) aus demselben Grunde durch $f(m+n)$ zu bezeichnen ist. Daß aber die Reihe (A.) mit der Reihe (B.) multiplicirt, die Reihe (D.) giebt, was auch m und n bedeuten mögen, kann dann so geschrieben werden:

1) $f(m) . f(n) = f(m+n)$,

wo f die Form der in Rede stehenden Reihen bedeutet.

§. 137. Zusatz.

Setzt man in (§. 136. n. 1.) $n = m$, so erhält man

2) $[f(m)]^2 = f(2m)$

---

*) Es ist z. B. $m_2 = \frac{m(m-1)}{2} = \frac{m^2-m}{2}$, $m_1 n_1 = mn$, $n_2 = \frac{n^2-n}{2}$, also der Coefficient von $x^2 = \frac{m^2-m+2mn+n^2-n}{2} = \frac{m^2+2mn+n^2-(m+n)}{2} = \frac{(m+n)^2-(m+n)}{2} = \frac{(m+n)(m+n-1)}{2} = (m+n)_2$.

Ferner $m_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} = \frac{m^3-3m^2+2m}{2 \cdot 3}$,

$m_2 . n_1 = \frac{m(m-1) . 3n}{2 \cdot 3} = \frac{3m^2n-3mn}{2 \cdot 3}$, $m_1 n_2 = \frac{3mn^2-3mn}{2 \cdot 3}$,

$n_3 = \frac{n^3-3n^2+2n}{2 \cdot 3}$; also der Coefficient von x^3,

$= \frac{m^3+3m^2n+3mn^2+n^3-3m^2-6mn-3n^2+2m+2n}{2 \cdot 3}$

$= \frac{(m+n)^3-3(m+n)^2+2(m+n)}{2 \cdot 3}$

$= \frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}{2 \cdot 3} = (m+n)_3$ u. s. w. f.

und für $n=2m$, geht aus (n. 1.) hervor

$$fm.f(2m)=f(3m),$$

oder wenn man (n. 2.) zu Hilfe nimmt,

$$3)\quad [f(m)]^3=f(3m).$$

Fährt man fort, $n=3m$, $n=4m$, $n=5m$, u. s. w. zu setzen in (§. 136. n. 1.) und nimmt man dabei jedesmal die vorher schon erwiesenen Gleichungen zu Hülfe, so erhält man:

$$4)\quad [f(m)]^4=f(4m)$$

$$5)\quad [f(m)]^5=f(5m).$$

u. s. w. f.; so daß zuletzt, wenn μ irgend eine ganze Zahl, auch

$$6)\quad [f(m)]^{\mu}=f(\mu m)$$

sich ergeben wird.

Anmerkung. Dieser Satz (n. 6.) lehrt aber, daß wenn man die durch f(m) bezeichnete Reihe (A. §. 136.) zur μ^{ten} Potenz erhebt, (d. h. μ solche Reihen nimmt und sie mit einander multiplicirt), dann allemal eine ähnliche Reife $f(\mu m)$ erhalten werde, welche aus f(m) oder (A.) hervorgeht, sobald überall in letzterer μm statt m gesetzt wird.

§. 138. Zusatz.

Setzt man in (§. 137. n. 6.), da m jeden Werth haben kann, $m=\frac{\nu}{\mu}$, so erhält man

$$7)\quad \left[f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)\right]^{\mu}=f(\nu).$$

Nimmt man nun an, daß ν und μ ganze Zahlen sind und $\frac{\nu}{\mu}$ eine gebrochene Zahl, so ist $f(\nu)$ oder die Reihe

$$1+\nu_1.x+\nu_2.x^2+\nu_3.x^3+\ldots$$

allemal der Potenz $(1+x)^{\nu}$ gleich (nach §. 135. IV.). Also ist dann aus (7.):

$$\left[f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)\right]^{\mu}=(1+x)^{\nu},$$

also auch nach (§. 64.) und (§. 70. n. 6.):

$$8)\quad f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)=\sqrt[\mu]{(1+x)^{\nu}}=(1+x)^{\frac{\nu}{\mu}}.$$

Aber unter $f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)$ verstehen wir nichts anders, als die Reihe f(m) oder (A.), wenn in ihr $\frac{\nu}{\mu}$ statt m gesetzt wird, also die Reihe

$$1+\left(\frac{\nu}{\mu}\right)_1.x+\left(\frac{\nu}{\mu}\right)_2.x^2+\left(\frac{\nu}{\mu}\right)_3.x^3+\left(\frac{\nu}{\mu}\right)_4.x^4+\text{ etc.}$$

Also enthält die Gleichung (8.) den binomischen Lehrsatz d. h. die Formel (§. 135. IV.) für den Fall, daß der Exponent m eine gebrochene Zahl $\frac{\nu}{\mu}$ ist.

§. 139. Zusatz.

Ist aber p irgend eine ganze oder gebrochene Zahl und setzt man in (§. 136. n. I.) p statt m und —p statt n, so findet man

$$f(p).f(-p)=f(0).$$

Aber f(0) ist das was aus f(m) oder (A.) wird, wenn man 0 (Null) statt m setzt; also nichts weiter als 1. Folglich ist

$$f(p).f(-p)=1$$

und

$$9)\quad f(-p)=\frac{1}{f(p)}.$$

Aber die Reihe f(p), mag p eine ganze oder gebrochene Zahl seyn, ist nach (§. 135. u. §. 138.) allemal der Potenz $(1+x)^p$ gleich; also folgt aus (9.) noch

$$10)\quad f(-p)=\frac{1}{(1+x)^p}=(1+x)^{-p}$$

d. h. die durch f(—p) bezeichnete Reihe ist der Potenz $(1+x)^{-p}$ gleich. — Und dies ist der binomische Lehrsatz d. h. die Gleichung (§. 135. IV.) für den Fall, daß statt des Exponenten m eine negative (ganze oder gebrochene) Zahl gesetzt wird.

§. 140. Zusatz.

Mag also m eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl vorstellen, so ist doch immer

$\odot\ldots(1+x)^m = 1 + m_1.x + m_2.x^2 + m_3.x^3 + m_4.x^4 +$ etc. etc.

und daraus, wenn $\frac{b}{a}$ statt x geschrieben, und links und rechts mit a^m multiplicirt wird (§. §. 57. 72 und 74.)

$(\mathbb{C})..(a+b)^m = a^m + m_1.a^{m-1}b + m_2.a^{m-2}b^2 + m_3.a^{m-3}b^3 + \ldots$,

so daß also die Formeln (I. §. 131. II. §. 133. und III. §. 134. und IV. §. 135.) unbedingt gelten, es mag der Exponent m eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl vorstellen.

Anmerkung. Man muß jedoch bemerken, daß so oft der Exponent m eine positive (absolute) ganze Zahl ist, die Reihe rechts allemal von selbst abbricht, weil m_{m+1}, m_{m+2}, m_{m+3}, m_{m+4}, u. s. w. s. ihrer Bedeutung nach, (§. 131.), allemal Null werden müssen, weil in dem Bruche, den sie vorstellen, allemal 0 (Null) als Faktor des Zählers gefunden werden wird. — So oft dagegen m eine gebrochene oder negative (ganze oder gebrochene) Zahl ist, bricht die Reihe für $(a+b)^m$ nie ab, sondern geht in der That in's unendliche fort. — Wenn aber für besondere Werthe der Buchstaben a, b, m, die folgenden Glieder der Reihe für $(a+b)^m$, immer bedeutend kleiner werden, als die vorhergehenden, so werden vom 3ten, 5ten, oder doch vielleicht vom 10ten, 20ten, Gliede ab, die übrigen Glieder alle vielleicht eine so unbedeutende Summe ausmachen, daß sie außer Acht gelassen werden können (in den Anwendungen nehmlich, denn in der Theorie darf auch nicht das Unbedeutendste außer Acht gelassen werden). Man erhält dann Näherungswerthe, für $(a+b)^m$, welche dem wahren desto näher kommen, je mehr erste Glieder der Reihe man nimmt. Dies wird in den folgenden (§. §.) aus einigen Beispielen noch näher erhellen.

Beispiel. Die durch $\sqrt{3}$ vorgestellte absolute (ganze oder gebrochene) Zahl zu finden. — Man zerlege die Zahl 3 in zwei beliebige Theile a und b, so daß $3 = a+b$ wird, so ist $\sqrt{3} = \sqrt{a+b} = (a+b)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \times (1+\frac{b}{a})^{\frac{1}{2}}$. Man setze nun in der Formel (§. 140. $\odot$.) $\frac{1}{2}$ statt m, und $\frac{b}{a}$ statt x, und man erhält, weil $m_1 = \frac{1}{2}$, $m_2 = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2} = -\frac{1}{8}$, $m_3 =$

$m_2 \cdot \frac{m-2}{3} = (-\frac{1}{8}) \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{16}$, etc. etc. $\sqrt{3} = \sqrt{a+b} = (a+b)^{\frac{1}{2}}$

$$= a^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{a} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} - \frac{1}{8} \cdot \frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{16} \cdot \frac{b^3}{a^3} - \frac{5}{128} \cdot \frac{b^4}{a^4} + \text{etc. etc.}\right].$$

Man wird nun a möglichst groß annehmen, gegen b, damit $\frac{b}{a}$ möglichst klein werde, und dabei wird man für a eine Zahl nehmen, deren Quadrat-Wurzel $\sqrt{a}$ ohne weiters angegeben werden kann. — Um beide Zwecke zu erreichen, wird man auch b negativ nehmen können.

Nimmt man nun $a=1$ und $b=2$, so wird $\frac{b}{a}=2$, und obige Formel wird rechts immer größere und größere Glieder geben, also nicht zur Bestimmung von $\sqrt{3}$ dienen. Nimmt man $a=2$ und $b=1$, so wird $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$, die Glieder in der obigen Formel rechts werden immer kleiner und kleiner und man mag in dieser Beziehung seinen Zweck erreichen, wenn auch langsam; aber dann kommt $\sqrt{a}$, jetzt $\sqrt{2}$, als Faktor noch vor, welcher selbst noch genau oder näherungsweise gefunden werden müßte. — Nimmt man $a=4$ und $b=-1$, so wird $\frac{b}{a}=-\frac{1}{4}$, der Werth der Reihe kann näherungsweise gefunden werden, und $\sqrt{a}=\sqrt{4}=2$ ist bekannt; folglich erreicht man hier seinen Zweck in beiden Beziehungen.

Man findet für diese Annahme aus obiger Formel

$$\sqrt{3} = 2[1 - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{128} - \tfrac{1}{1024} - \tfrac{5}{32768} - \text{etc. etc.}]$$

und nimmt man nur diese 5 Glieder, so erhält man die $\sqrt{3}$, wenn man alles in Decimalbrüche verwandelt, bis auf die 4te Decimalstelle genau; und mehr Glieder der Reihe berechnet und hinzugenommen, giebt den Werth für $\sqrt{3}$ immer näher.

Hätte man eine gebrochene Zahl zwischen 1 und 2 gesucht, welche quadrirt der Zahl 3 noch näher kommt; hätte man z. B. $(\frac{17}{10})^2$ d. h. $\frac{289}{100}$ statt a genommen, so wäre $b=\frac{11}{100}$ geworden, und $\frac{b}{a}=\frac{11}{289}$ und dann hätte man erhalten

$$\sqrt{3} = \tfrac{17}{10}\left(1 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{11}{289} - \tfrac{1}{8} \cdot \frac{11^2}{(289)^2} + \tfrac{1}{16} \cdot \frac{11^3}{(289)^3} - \ldots\right);$$

und nimmt man hier nur diese 4 ersten Glieder der Reihe und läßt alle folgenden ganz außer Acht, so erhält man $\sqrt{3}$ schon bis auf 5 Decimalstellen genau, wenn man alles in Decimalbrüche verwandelt (was gewöhnlich geschieht und bequem ist, wenn auch nicht geradezu nothwendig).

Wollte man $\sqrt{10}$ suchen, so konnte man $a=9$ und $b=1$ annehmen, damit $\sqrt{a}=3$ und $\frac{b}{a}=\frac{1}{9}$ würde; 5 Glieder der Reihe würden dann schon $\sqrt{10}$ bis zur 5ten Decimalstelle genau geben.

§. 141. Zusatz.

Setzt man in der Formel (§. 140.) des binomischen Lehrsatzes nach und nach $m=\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{\nu}$, und übersieht man nicht, daß $z^{\frac{1}{2}}=\sqrt{z}$, $z^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{z}$, $z^{\frac{1}{\nu}}=\sqrt[\nu]{z}$ ist, so erhält man,

$$(a+b)^{\frac{1}{\nu}}=a^{\frac{1}{\nu}}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{\nu}}=\sqrt[\nu]{a}.\left(1+\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{\nu}}$$ setzend:

1) $$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}.\left[1+\tfrac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)-\tfrac{1}{8}.\left(\frac{b}{a}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{16}\left(\frac{b}{a}\right)^3-\tfrac{5}{128}\left(\frac{b}{a}\right)^4+\ldots.\right]$$

2) $$\sqrt[3]{a+b}=\sqrt[3]{a}.\left[1+\tfrac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)-\tfrac{1}{9}.\left(\frac{b}{a}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\tfrac{5}{81}\left(\frac{b}{a}\right)^3-\tfrac{10}{243}\left(\frac{b}{a}\right)^4+\ldots.\right]$$

3) $$\sqrt[4]{a+b}=\sqrt[4]{a}.\left[1+\tfrac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)-\tfrac{3}{32}\left(\frac{b}{a}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\tfrac{7}{128}\left(\frac{b}{a}\right)^3-\tfrac{77}{2048}\left(\frac{b}{a}\right)^4+\ldots.\right]$$

4) $$\sqrt[\nu]{a+b}=\sqrt[\nu]{a}\times$$
$$\left[1+\frac{1}{\nu}\frac{b}{a}-\frac{\nu-1}{1.2.\nu^2}\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{(\nu-1)(2\nu-1)}{1.2.3.\nu^3}\left(\frac{b}{a}\right)^3-\right.$$
$$\left.-\frac{(\nu-1)(2\nu-1)(3\nu-1)}{1.2.3.4.\nu^4}\left(\frac{b}{a}\right)^4+\frac{(\nu-1)(2\nu-1)(3\nu-1)(4\nu-1)}{1.2.3.4.5.\nu^5}\left(\frac{b}{a}\right)^5-..\right]$$

Anmerkung. Man kann sich aber dieser Formeln auch bedienen, um aus irgend einer absoluten (ganzen oder gebrochenen) gegebenen Zahl, die Quadrat-, oder Kubik-Wurzel, oder irgend eine folgende Wurzel zu ziehen, d. h.

die absolute Zahl zu finden, welche unter der Wurzel selbst verstanden wird. Das praktische Verfahren bleibt immer dem, in dem vorhergehenden Beispiele gebrauchten ähnlich.

§. 142. Zusatz.

Man kann sich aber auch des binomischen Lehrsatzes (§. 140.) bedienen, um 3, 4 und mehrgliedrige Ausdrücke (Trinomien, Quatrinomien, Polynomien) zu irgend einer Potenz zu erheben, weil man jeden solchen auch allemal als einen 2gliedrigen ansehen und schreiben kann.

Hätte man z. B. $a+b+c$ zur 4ten Potenz zu erheben, so setzte man in (§. 140. C.) $a+b$ statt a und c statt b und $m=4$, und erhielte:

$$(a+b+c)^4=(a+b)^4+4(a+b)^3.c+6(a+b)^2.c^2+$$
$$+4(a+b).c^3+c^4.$$

Setzt man nun hier statt $(a+b)^4$, $(a+b)^3$, $(a+b)^2$, ebenfalls die Entwicklungen, welche der binomische Lehrsatz für sie liefert, so ergiebt sich

$$(a+b+c)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4+4a^3c+$$
$$+12a^2bc+12ab^2c+4b^3c+6a^2c^2+12abc^2+$$
$$+6b^2c^2+4ac^3+4bc^3+c^4.$$

Auf dieselbe Weise findet man:

$$(a+b-c+d)^3=[(a+b)-(c-d)]^3$$
$$=(a+b)^3-3(a+b)^2(c-d)+3(a+b)(c-d)^2-(c-d)^3$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-3a^2c-6abc-3b^2c+3a^2d+$$
$$+6abd+3b^2d+3ac^2-6acd+3ad^2+3bc^2-6bcd+3bd^2$$
$$-c^3+3c^2d-3cd^2+d^3.$$

Anmerkung. Wenn auf diese Weise allgemein

$(a+b+c)^m$, $(a+b+c+d)^m$, $(a+b+c+d+e+....)^m$

entwickelt wird, so nennt man diese Entwicklungen den trinomischen, den quatrinomischen und überhaupt den polynomischen Lehrsatz.

Sowohl für diese Anwendungen des binomischen Lehrsatzes, als auch für den Fall eines vorhandenen bloßen Binomiums mögen noch folgende Beispiele berücksichtigt werden.

Zu diesem Kapitel gehörige Uebungs-Beispiele.

1) $(2a-3b)^2=(2a)^2-2(2a)(3b)+(3b)^2=4a^2-12ab+9b^2$;

2) $\left(4x+5\frac{y}{z}\right)^2=16x^2+40\frac{xy}{z}+\frac{25y^2}{z^2}$;

3) $\left(5x\pm\frac{1}{5x}\right)^2=25x^2\pm2+\frac{1}{25x^2}$;

4) $(1-3x)^5=1-15x+90x^2-270x^3+405x^4-243x^5$;

5) $(2x\pm1)^4=16x^4\pm32x^3+24x^2\pm8x+1$;

6) $(1\pm z)^{10}=1\pm10z+45z^2\pm120z^3+210z^4\pm252z^5+210z^6\pm120z^7$
$+45z^8\pm10z^9+z^{10}$;

7) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}z\right)^6=\frac{64}{729}-\frac{32}{81}z+\frac{20}{27}z^2-\frac{20}{27}z^3+\frac{5}{12}z^4-\frac{1}{8}z^5+\frac{1}{64}z^6$;

8) $\left(\frac{1}{2}a+2b\right)^7=\frac{1}{128}a^7+\frac{7}{32}a^6b+\frac{21}{8}a^5b^2+\frac{35}{2}a^4b^3+70a^3b^4+168a^2b^5$
$+224ab^6+128b^7$;

9) $(6a^2b^2c^2-9ab^2d)^4=[3ab^2(2ac^2-3d)]^4=81a^4b^8(2ac^2-3d)^4$
$=81a^4b^8(16a^4c^8-96a^3c^6d+216a^2c^4d^2-216ac^2d^3+81d^4)$
$=1296a^8b^8c^8-7776a^7b^8c^6d+17496a^6b^8c^4d^2-17496a^5b^8c^2d^3$
$+6561a^4b^8d^4$;

10) $\left(\frac{2ac}{b^2d}+\frac{1}{4}bc^2d\right)^6=\frac{64a^6c^6}{b^{12}d^6}+\frac{48a^5c^7}{b^9d^4}+\frac{15a^4c^8}{b^6d^2}+\frac{5a^3c^9}{2b^3}+\frac{15}{64}a^2c^{10}d^2$
$+\frac{3}{256}ab^3c^{11}d^4+\frac{1}{4096}b^6c^{12}d^6$;

11) $(1\pm e^x)^8=1\pm8e^x+28e^{2x}\pm56e^{3x}+70e^{4x}\pm56e^{5x}+28e^{6x}$
$\pm8e^{7x}+e^{8x}$;

12) $(1\pm e^{-x})^m=1\pm m_1.e^{-x}+m_2.e^{-2x}\pm m_3.e^{-3x}+m_4.e^{-4x}$
$\pm m_5.e^{-5x}+$ etc. etc. etc.

13) $(e^x\pm e^{-x})^2=e^{2x}\pm2+e^{-2x}$;

14) $(e^x\pm e^{-x})^9=e^{9x}\pm9e^{7x}+36e^{5x}\pm84e^{3x}+126e^x\pm126e^{-x}$
$+84e^{-3x}\pm36e^{-5x}+9e^{-7x}\pm e^{-9x}$;

15) $(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\pm2\sqrt{a}.\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2=a+b\pm2\sqrt{ab}$;

16) $(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^3=a\sqrt{a}\pm3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}\pm b\sqrt{b}$;

17) $(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^4=a^2\pm4a\sqrt{ab}+6ab\pm4b\sqrt{ab}+b^2$
$=a^2+6ab+b^2\pm4(a+b)\sqrt{ab}$;

18) $(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^5=a^2\sqrt{a}\pm5a^2\sqrt{b}+10ab\sqrt{a}\pm10ab\sqrt{b}+5b^2\sqrt{a}\pm b^2\sqrt{b}$
$=(a^2+10ab+5b^2)\sqrt{a}\pm(5a^2+10ab+b^2)\sqrt{b}$;

19) $(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b})^2=\sqrt[3]{a^2}\pm2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$;

20) $(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b})^3=a\pm3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}\pm b$
$=a\pm b+3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{b}\pm\sqrt[3]{a})$;

21) das 7te Glied von $(a-b)^{29}$ ist $=29_6.a^{23}b^6=475020a^{23}b^6$;

22) das 10te Glied derselben Potenz ist $=1320910a^{20}b^9$;

23) das mittelste Glied von $(a-b)^{14}$ ist $=-14_7.a^7b^7=-24024a^7b^7$;

24) die beiden mittelsten Glieder von $(a-b)^{13}$ sind $=13_6a^7b^6$ und $-13_7a^6b^7$ oder $1716a^7b^6$ und $-1716a^6b^7$;

25) $(a+b-c)^2=a^2+2ab+b^2-2ac-2bc+c^2$;

26) $(a+b-c+d)^2=a^2+2ab+b^2-2ac-2bc+c^2+2ad+2bd-2cd+d^2$;

27) $(a-b+c)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3+3a^2c-6abc+3b^2c+3ac^2-3bc^2+c^3$;

28) $(a-b-c)^7=a^7-7a^6b-7a^6c+21a^5b^2+42a^5bc+21a^5c^2-35a^4b^3-105a^4b^2c-105a^4bc^2-35a^4c^3+35a^3b^4+140a^3b^3c+210a^3b^2c^2+140a^3bc^3+35a^3c^4-21a^2b^5-105a^2b^4c-210a^2b^3c^2-210a^2b^2c^3-105a^2bc^4-21a^2c^5+7ab^6+42ab^5c+105ab^4c^2+140ab^3c^3+105ab^2c^4+42abc^5+7ac^6-b^7-7b^6c-21b^5c^2-35b^4c^3-35b^3c^4-21b^2c^5-7bc^6-c^7$;

29) $(a-b+c)^5=a^5-5a^4b+5a^4c+10a^3b^2-20a^3bc+10a^3c^2-10a^2b^3+30a^2b^2c-30a^2bc^2+10a^2c^3+5ab^4-20ab^3c+30ab^2c^2-20abc^3+5ac^4-b^5+5b^4c-10b^3c^2+10b^2c^3-5bc^4+c^5$;

30) $(a-b+c-d)^4=a^4-4a^3b+4a^3c-4a^3d+6a^2b^2-12a^2bc+12a^2bd+6a^2c^2-12a^2cd+6a^2d^2-4ab^3+12ab^2c-12ab^2d-12abc^2+24abcd-12abd^2+4ac^3-12ac^2d+12acd^2-4ad^3+b^4-4b^3c+4b^3d+6b^2c^2-12b^2cd+6b^2d^2-4bc^3+12bc^2d-12bcd^2+4bd^3+c^4-4c^3d+6c^2d^2-4cd^3+d^4$;

31) $(a-b-c-d)^5=a^5-5a^4b-5a^4c-5a^4d+10a^3b^2+20a^3bc+20a^3bd+10a^3c^2+20a^3cd+10a^3d^2-10a^2b^3-30a^2b^2c-30a^2b^2d-30a^2bc^2-60a^2bcd-30a^2bd^2-10a^2c^3-30a^2c^2d-30a^2cd^2-10a^2d^3+5ab^4+20ab^3c+20ab^3d+30ab^2c^2+60ab^2cd+30ab^2d^2+20abc^3+60abc^2d+60abcd^2+20abd^3+5ac^4+20ac^3d+30ac^2d^2+20acd^3+5ad^4-b^5-5b^4c-5b^4d-10b^3c^2-20b^3cd-10b^3d^2-10b^2c^3-30b^2c^2d-30b^2cd^2-10b^2d^3-5bc^4-20bc^3d-30bc^2d^2-20bcd^3-5bd^4-c^5-5c^4d-10c^3d^2-10c^2d^3-5cd^4-d^5$;

32) $(a+b+c+d+f+g)^2=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2+2ad+2bd+2cd+d^2+2af+2bf+2cf+2df+f^2+2ag+2bg+2cg+2dg+2fg+g^2$;

33) $(a-b-c+d-f)^2=a^2-2ab+b^2-2ac+2bc+c^2+2ad-2bd-2cd+d^2-2af+2bf+2cf-2df+f^2$;

34) $(2a-3b+c)^3=8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3+12a^2c-36abc+27b^2c+6ac^2-9bc^2+c^3$;

35) $(2a-\frac{3}{2}b+\frac{2c}{3b})^4=16a^4-48a^3b+54a^2b^2-27ab^3+\frac{81}{16}b^4+\frac{64a^3c}{3b}$
$-48a^2c+36abc-9b^2c+\frac{32a^2c^2}{3b^2}-\frac{16ac^2}{b}+6c^2-\frac{64ac^3}{27b^3}+\frac{16c^3}{9b^2}+\frac{16c^4}{81b^4}$;

36) $\left(\frac{2ab^m}{c}-\frac{3c^2}{4a^2b^{2m}}-\frac{2ab^2}{3c}-\frac{5b}{3a}\right)^3=\frac{8a^3b^{3m}}{c^3}-9$
$+\frac{27c^3}{8a^3b^{3m}}-\frac{27c^6}{64a^6b^{6m}}-8\frac{a^3b^{2m+2}}{c^3}+6\frac{1}{b^{m-2}}-\frac{9c^3}{8a^3b^{4m-2}}$
$-\frac{20ab^{2m+1}}{c^2}+\frac{15c}{a^2b^{m-1}}-\frac{45c^4}{16a^5b^{4m-1}}+\frac{8a^3b^{m+4}}{3c^3}+\frac{40ab^{m+3}}{3c^2}$
$+\frac{50b^{m+2}}{3ac}-\frac{10}{3}b^{2m-4}-5\frac{c}{a^2b^{2m-3}}-\frac{25b^2c^2}{4a^2b^{2m}}-\frac{8a^3b^6}{27c^3}$
$-\frac{20ab^5}{9c^2}-\frac{50b^4}{9ac}-\frac{125b^3}{27a^3}$;

37) $(1-x)^{\frac{2}{3}}=1-\frac{2}{3}x-\frac{1}{9}x^2-\frac{4}{81}x^3-\frac{7}{243}x^4-\frac{14}{729}x^5-\frac{91}{6561}x^6-$ etc. etc.

38) $(1-\frac{1}{2}z)^{\frac{5}{3}}=1-\frac{5}{6}z+\frac{5}{36}z^2+\frac{5}{648}z^3+\frac{5}{3888}z^4+\frac{35}{23328}z^5+\frac{35}{419904}z^6+$etc.

39) $(1+\frac{3}{2}x)^{-\frac{2}{3}}=1-x+\frac{5}{4}x^2-\frac{5}{3}x^3+\frac{55}{24}x^4-\frac{79}{24}x^5+\frac{1309}{2888}x^6-$ etc. etc.

40) $(1+x+x^2)^{\frac{1}{2}}=(1+(x+x^2))^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}(x+x^2)-\frac{1}{8}(x+x^2)^2$
$+\frac{1}{16}(x+x^2)^3-\frac{5}{128}(x+x^2)^4+\frac{7}{256}(x+x^2)^5-\frac{21}{1024}(x+x^2)^6+$ etc.
$=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{16}x^3+\frac{3}{128}x^4+\frac{15}{256}x^5-\frac{57}{1024}x^6+$ etc. etc.

Schlußfragen.

1) Ist $(a+b)^2=a^2+b^2$? oder $(a-b)^2=a^2-b^2$? —
2) Ist $(a+b)^3=a^3+b^3$? oder $(a-b)^3=a^3-b^3$? —
3) Ist überhaupt $(a+b)^m=a^m+b^m$? —
4) Oder hat man $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$? —
5) Oder $(a+b+c)^m=a^m+b^m+c^m$? —

6) In welchem Falle besteht die Entwicklung der Potenz $(a+b)^m$ nach dem binomischen Lehrsatze aus einer endlichen Menge von Gliedern, und in welchen Fällen erhält man eben daher eine unendliche Menge Glieder? —

7) Aus wieviel Gliedern besteht dieselbe Entwicklung von $(a+b)^m$, wenn m eine absolute ganze Zahl ist? —

8) Wie groß ist die Summe aller Ziffern-Coefficienten in der Entwicklung von $(a+b+c)^4$, $(a+b+c)^7$, $(a+b+c)^m$, $(a+b+c+d)^2$, $(a+b+c+d)^3$, $(a+b+c+d)^m$, $(a+b+c+d+f)^m$, u. s. f.? —

9) Ist solche beziehlich 3^4, 3^7, 3^m, 4^2, 4^3, 4^m, 5^m, etc., und warum? —

10) Welcher Form wird man sich am bequemsten bedienen, wenn in dem binomischen Lehrsatze jedes folgende Glied aus dem unmittelbar vorhergehenden gefunden werden soll? — Der des (§. 134.).

11) Ist $(1-1)^n$ allemal der Null gleich? —

Antw. Nur wenn n positiv (absolut) ist, nicht aber wenn n negativ und $=-p$; denn dann ist $0^n = 0^{-p} = \frac{1}{0^p} = \frac{1}{0}$.

Arithmetik.

Achtes Kapitel.

Von dem numerischen Wurzel-Ausziehen.

§. 143. Bemerkung.

Will man eine zweiziffrige Zahl z. B. 47 mit 2 potenziren (quadriren), so ist $47=4.10+7$, also $(47)^2=(4.10+7)^2$.— Wendet man daher den binomischen Lehrsatz an für diesen Fall, nehmlich die Formel

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

so kann man 4.10 statt a setzen und 7 statt b, und hat dann:

$a^2=(4.10)^2=4^2.10^2=16.100=1600$, $2ab=2.(4.10).7$
$=2.4.7.10=2.28.10=56.10=560$ und $b^2=7^2=49$; folglich

$$\begin{array}{r} a^2= 1600 \\ 2ab= 560 \\ \hline b^2= 49 \\ \hline (a+b)^2=2209. \end{array}$$

Dasselbe Resultat hätte man auch erhalten, wenn man bloß die erste Ziffer 4 statt a und 7 statt b gesetzt hätte, aber bei dem Addiren jeden der 3 Theile, a^2, $2ab$ und b^2

um eine Ziffer zur rechten herausgerückt. Nehmlich, für $a=4$, $b=7$ wird:

$$a^2 = 16$$
$$2ab = 56$$
$$b^2 = 49$$
$$\text{und } (a+b)^2 = 2209.$$

§. 144. Aufgabe.

Aus einer gegebenen 3 oder 4ziffrigen Zahl z. B. 2209 die Quadrat-Wurzel zu ziehen, d. h. die absolute Zahl zu finden, welche unter der Quadratwurzel $\sqrt{2209}$ verstanden wird.

Auflösung. 1) Denkt man sich die gesuchte Wurzel $=a+b$, wo a eine zweiziffrige Zahl, deren 2te Ziffer 0 ist, so muß $(a+b)^2=2209$ werden. — Schneidet man daher von der Zahl 2209 die letzten 2 Ziffern zur rechten ab, so ist die Zahl 22 die links übrig bleibt, allemal das Quadrat a^2 (wenn a die erste, b aber die zweite Ziffer der gesuchten Quadrat-Wurzel vorstellt) nebst dem noch, was bei dem Addiren (§. 143.) von den beiden andern Theilen 2ab und b^2 mit hinübergezählt worden ist; nach (§. 143.).

2) Sucht man also hievon (von 22) die nächst kleinste Quadrat-Wurzel, so findet man (nicht 5, denn $5^2=25$ ist schon mehr als 22, sondern) 4 als die erste Ziffer a der gesuchten Wurzel. — Diese Zahl 4 quadrire man, giebt 16 oder a^2, und subtrahire von 22, bleiben 6. Dieser Rest in Verbindung mit den abgeschnittenen Ziffern 09, bildet die Zahl 609, welche nichts anders seyn kann, als die Summe der beiden andern Theile 2ab und b^2; und zwar wird 60 der zweite Theil 2ab seyn, nebst dem was von dem dritten Theil b^2 mit hinübergezählt worden.

3) Nimmt man daher nun das doppelte der ersten Ziffer 4 oder a, um 8 oder 2a zu haben, und dividirt man damit in 60 (welches letztere ohngefähr 2ab seyn wird), so er-

hält man 7, und dieses muß ohngefähr die 2te Ziffer b der gesuchten Wurzel seyn, weil $\frac{2ab}{2a}=b$.

4) Diese 7 schreibe man nun neben dem Divisor 8, um 87 d. h. $2a+b$ zu erhalten und multiplicire solches mit 7 oder b selbst wieder, so wird dieses 87×7 das Produkt $(2a+b)b$ oder $2ab+b^2$ liefern, und wenn dieses, abgezogen von dem obigen Rest 609, Null giebt, so ist die Ziffer 7 nothwendig die wahre 2te Ziffer der gesuchten Wurzel gewesen.

5) Bliebe aber zuletzt noch ein Rest, so hätte man doch die nächst kleinste Quadrat-Wurzel in ganzen Zahlen.

Anmerkung. Das praktische Geschäft erhält folgende Form:

Radikand	Wurzel
22|09	47
$a^2=16$ |	
$2a=8$ |609	
$b.(2a+b)=7.87=609$	

Und wenn aus 5768 die Quadrat-Wurzel gezogen werden soll:

Radikand	Wurzel
57|68	75
$a^2=49$ |	
$2a=14$ |868	
$b.(2a+b)=5.145$ |725	
Rest = 143	

und es ist also 75 die nächstkleinste Quadrat-Wurzel, so nehmlich, daß $(75)^2+143=5768$, dagegen $(76)^2=5776$ schon zu viel giebt.

Soll endlich aus 8007 die Quadrat-Wurzel gezogen werden, so hat man:

Radikand	Wurzel
80|07	89
$a^2=64$ |	
$2a=16$ |16 07	
$b.(2a+b)=9.169$ |15 21	
Rest = 86	

also 89 die nächstkleinste Wurzel und $86=8007-(89)^2$. —

Und $\sqrt{875}$ findet sich:

	8 | 75	29
$a^2 = 4$	4	
$2a = 4$	4 75	
$2a + b = 49$	4 41	
Rest =	34	

also: $875 = (29)^2 + 34$ oder $34 = 875 - (29)^2$. —

§. 145. Bemerkung.

Nimmt man die 3ziffrige Zahl z. B. 759, so läßt sie sich ebenfalls so schreiben $75.10 + 9$; und die Formel und das Verfahren des (§. 143.) angewandt, geben dann:

$75^2 = a^2$	$=$	5625
$2.75.9 = 2ab$	$=$	1350
$9^2 = b^2$	$=$	81
$(759)^2 = (a+b)^2$	$=$	576081.

§. 146. Zusatz.

Soll also umgekehrt aus einer 5 bis 6ziffrigen Zahl z. B. 576081 die Quadrat-Wurzel gezogen werden, so muß man wieder die Klasse 81 abschneiden und von dem was links übrig bleibt, also von 5760 die nächstkleinste Quadrat-Wurzel nehmen, um a oder den ersten Theil der Wurzel zu erhalten. Dies geschieht aber nach (§. 144.) wie hier steht

57	60	75
49		
14	8 60	
145	7 25	
	1 35	

so daß also 75 die nächstkleinste Wurzel ist, und statt a genommen werden kann; und der Rest 135 ist das, was übrig bleibt, wenn man $(75)^2$ oder 5625 von 5760 abzieht. Dieser Rest mit den beiden in der letzten Klasse befindlichen Ziffern 81 in Verbindung, also die Zahl 13581 wird die Summe der beiden übrigen Theile $2ab + b^2$ seyn, und zwar 1358 der Theil 2ab nebst dem, was von b^2 mit hinüber gezählt worden. — Wiederholt man also hier wiederum genau das

Verfahren (3—5.) des (§. 144.), so wird man auch hier den zweiten Theil b dazu finden; nehmlich 75=a nehmend

2a=150	13581	759
2a+b=1509	13581	

Anmerkung. Verbindet man aber beide hier auf einander folgende Schema, so sieht das Ganze so aus:

	57	60	81	7=a
$7^2=a^2=$	49			
2a=14	8	60		5=b
2a+b=145	7	25		75=a
2a=150	1	3581		9=b
2a+b=1509	1	3581		759= gesuchte Wurzel.

Beispiel 1. Aus 76549 die Quadrat-Wurzel zu ziehen.

Man hat:

	Radikand			
	7	65	49	2=a
$a^2=$	4			
2a=4	3	65		7=b
2a+b=47	3	29		27=a
2a=54		36	49	6=b
2a+b=546		32	76	276= gesuchte kleinste Wurzel,
		3	73	

so daß $76549=(276)^2+373$ ist.

Beispiel 2. Aus 700609 die Quadrat-Wurzel zu ziehen

	70	06	09	837
	64			
16	6	06		
163	4	89		
166	1	1709		
1667	1	1669		
		40		

so daß $700609=(837)^2+40$ ist.

§. 147. Aufgabe.

Aus jeder beliebig vielziffrigen Zahl z. B. 68750693857 die Quadrat-Wurzel zu ziehen.

Auflösung. Das Schema bildet sich so:

	Radikand						Wurzel
	6	87	50	69	38	57	2=a
$a^2=4$							
2a=4	2	87	..				6=b
2a+b=46	2	76	..				26=a
2a=52	1	150					2=b
2a+b=522	1	044					262=a
2a=524	1	06	69				2=b
2a+b=5242	1	04	84				2622=a
2a=5244	1	8538					0 =b
2a+b=52440		0					26220=a
2a=52440	1	853857					3=b
2a+b=524403	1	573209					262203= Wurzel
Rest = 280648							

so daß $68750693857=(262203)^2+280648$ ist, und $(262204)^2=68750937616$ ist schon zu viel.

Beweis. Der Grund davon fällt dem vorhergehenden zu Folge ohne weiters in die Augen.

Anmerkung 1. Man prüft aber die gefundenen Resultate dadurch, daß man solche mit sich selber multiplicirt und dazu noch die gebliebenen Reste addirt, wo denn der gegebene Radikand wieder herauskommen muß. — Der Ungeübte jedoch kann auch leicht eine zu kleine Wurzel erhalten, welche diese eben bemerkte Probe doch aushält. Es ist daher rathsam, die der gefundenen Wurzel nächstgrößere ganze Zahl auch noch mit sich zu multipliciren und nachzusehen, ob das was sich ergiebt, auch wirklich mehr ist als der Radikand.

Ist aber a die gefundene Wurzel, so ist die nächstgrößere Zahl $a+1$, und ihr Quadrat oder $(a+1)^2=a^2+2a+1$. Ist nun r der, bei'm Wurzel-Ausziehen gebliebene Rest, und R der gegebene Radikand (die Zahl aus welcher die Quadrat-Wurzel gezogen werden sollte) so hat man $R-a^2=r$. Wäre nun die gefundene Wurzel a zu klein, so daß $(a+1)^2$ ebenfalls noch $\leqq R$, so wäre $R-(a+1)^2$ oder $R-a^2-2a-1$ oder $r-(2a+1)$ noch immer Null oder positiv, also auch $r \geqq 2a+1$. — Es ist daher nicht nöthig, daß man $a+1$ quadrire und zusehe, ob das Quadrat wirklich größer als R werde, sondern man darf nur das doppelte von a um 1 vermehren, und ist dieses $2a+1$ dann größer als der Rest r, so

ist $a+1$ zu groß, also a die nächstkleinste Quadrat-Wurzel von R, wenn sonst nur $a^2+r=R$ wird.

Anmerkung 2. Dieses ganze Verfahren, die Quadrat-Wurzel (oder doch die nächstkleinste in ganzen Zahlen) zu finden, ist offenbar bloß ein leichter gemachtes (beschränktes) Versuchen.

§. 148. Bemerkung.

Nimmt man die zweiziffrige Zahl z. B. 47 und potenzirt man sie mit 3 nach dem binomischen Lehrsatze, nehmlich nach der Formel

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

4.10 statt a und 7 statt b setzend, so erhält man:

$$a^3=4^3.10^3= \quad 64000$$
$$3a^2b=3.4^2.10^2.7=3.4^2.7.10^2 = \quad 33600$$
$$3ab^2=3.4.10.7^2=3.4.7^2.10 = \quad 5880$$
$$b^3= \quad 7^3 = \quad 343$$
$$(a+b)^3= \quad (47)^3 = 103823.$$

Dasselbe hätte man offenbar auch erhalten, wenn man in der Formel bloß 4 statt a und 7 statt b gesetzt, dagegen jeden der 4 Theile bei'm Addiren um eine Stelle zur rechten herausgerückt hätte. Man würde nehmlich dann gehabt haben:

$$a^3=4^3 \quad = 64$$
$$3a^2b=3.4^2.7 = 336$$
$$3ab^2=3.4.7^2 = \quad 588$$
$$b^3 = \quad 7^3 = \quad 343$$
$$(a+b)^3= \quad (47)^3 = 103823.$$

§. 149. Aufgabe.

Aus einer 4—6ziffrigen Zahl z. B. aus 103823 die Kubikwurzel zu ziehen, d. h. die absolute Zahl zu finden, welche

$$= \sqrt[3]{103823}.$$

Auflösung. 1) Nach der Bemerkung (§. 148.) wird, wenn man die zweiziffrige Zahl $a.10+b$ oder $a+b$ zur Wurzel annimmt und vom Radikanden die 3 letzten Ziffern

zur rechten 823 abschneidet, das was übrig bleibt (103) der Kubus seyn müssen von a (wenn a die erste Ziffer, b die zweite der gesuchten Wurzel bedeutet) nebst dem was von den übrigen 3 Theilen durch die Addition mit hinüber gezählt worden.

2) Nimmt man also von dieser Zahl 103 die nächstkleinste Kubik-Wurzel (durch Versuche), so findet man 4 und dieses muß die erste Ziffer a der gesuchten Wurzel seyn. Kubirt man nun diese 4 oder a, um 64 oder a^3 zu erhalten, zieht solches von 103 ab (bleibt 39), so wird dieser Rest 39 in Verbindung mit der abgeschnittenen Klasse 823 (also die Zahl 39823) die Summe der 3 übrigen Theile $3a^2b$, $3ab^2$ und b^3 seyn, und namentlich wird 398 der zweite Theil $3a^2b$ seyn, nebst dem was von den übrigen Theilen bei dem Addiren mit hinübergenommen worden ist.

3) Nimmt man daher die erstgefundene Ziffer 4 statt a, berechnet $3a^2$ (giebt 48) und dividirt man damit in 398 (welches ohngefähr $3a^2b$ ist) so wird der ohngefähr genommene Quotient 8 oder 7, so ohngefähr der 2te Theil b der gesuchten Wurzel seyn, weil $\frac{3a^2b}{3a^2} = b$ ist.

4) Man setze nun diese 8 oder 7 statt b und berechne, indem man diese 8 oder 7 mit dem Divisor $3a^2$ oder 48 multiplicirt, $3a^2b$, dann noch $3ab^2$ und b^3, setze sie wie im (§. 148.) so unter einander, daß jeder folgende Theil um eine Stelle zur rechten hinausgerückt wird, und addire sie so zusammen, nehmlich:

für b=8,		für b=7,	
$3a^2b$ =	384	$3a^2b$ =	336
$3ab^2$ =	768	$3ab^2$ =	588
b^3 =	512	b^3 =	343
$3a^2b+3ab^2+b^3$ =	46592	$3a^2b+3ab^2+b^3$ =	39823

Dieses Endresultat ist entweder größer als der obige Rest 39823, und dies ein Beweis, daß man die Ziffer zu groß genommen habe, oder es ist gleich oder kleiner als der

gedachte Rest, und dann ziehe man es von dem Reste selbst ab. Ist die Differenz Null, so ist 47 die wahre genaue gesuchte Wurzel. Bleibt aber noch ein Rest, so ist sie doch die nächstkleinste Wurzel in ganzen Zahlen, wenn man sich nehmlich überzeugt hat, daß die nächstgrößere Zahl als Wurzel genommen zu groß seyn würde.

Anmerkung. Das praktische Geschäft erhält diese Gestalt:

Radikand	Wurzel
103 | 823	4 = a
$a^3 =$ 64	
$3a^2 =$48 | 39823	7 = b
39823	

$3a^2b = 336$
$3ab^2 = 588$
$b^3 = 343$
39823

also 47 die gesuchte Wurzel.

Und wenn aus 96748 die Kubik-Wurzel gefunden werden sollte:

Radikand	Wurzel
96 | 748	4 = a
$a^3 =$64	
$3a^2 =$48 | 32748	6 = b,
33336	

$3a^2b = 288$
$3ab^2 = 432$
$b^3 = 216$
33336

Weil aber hier die abzuziehende Zahl 33336 größer ist, als die über ihr stehende 32748, so hat man b zu groß genommen, man muß daher die Rechnung noch einmal machen:

Radikand	Wurzel
96 | 748	4 = a
$a^3 =$64	
$3a^2 =$48 | 32748	5 = b,
27125	
Rest = 5623	

$3a^2b = 240$
$3ab^2 = 300$
$b^3 = 125$
27125

Es ist also 45 die nächstkleinste Wurzel und 5623 bleibt noch als Rest, so daß $96748 = (45)^3 + 5623$ und $96748 - (45)^3 = 5623$ ist.

Sey noch aus 7609 die Kubik-Wurzel zu ziehen. Man hat:

Radikand	Wurzel
6 | 609	1=a
$a^3=1$	
$3a^2=3$ | 5609	9=b,
5859	

$3a^2b=27$
$3ab^2=243$
$b^3=729$
5859

wo man also abermals findet, daß 9 zu groß genommen ist. Man fängt von vorne an und erhält

Radikand	Wurzel
6 | 609	1=a
$a^3=1$	
$3a^2=3$ | 5609	8=b,
4832	
Rest = 777	

$3a^2b=24$
$3ab^2=192$
$b^3=512$
4832

so daß also 18 die nächstkleinste Wurzel ist (in ganzen Zahlen) und noch 777 als Rest bleibt, so nehmlich, daß $777=6609-(18)^3$ und $6609=(18)^3+777$.

§. 150. Bemerkung.

Nimmt man die 3ziffrige Zahl 478, so kann man sie ebenfalls so schreiben $47.10+8$ und dann gerade wie im (§. 148.) den binomischen Lehrsatz anwenden, nehmlich die Formel

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

um 478 zu kubiren, 47 statt a und 8 statt b setzend.

Man erhält dann $a=47$, $b=8$

$a^3=103823$
$3a^2b=53016$
$3ab^2=9024$
$b^3=512$

$(478)^3=109215352$

§. 151. Zusatz.

Soll also umgekehrt aus einer 7 bis 9ziffrigen Zahl die Kubik-Wurzel gezogen werden, so muß man abermals eine Klasse aus den 3 letzten Ziffern zur rechten (352) bestehend,

abschneiden und aus dem was links übrig bleibt (nehmlich 109215) die nächstkleinste Kubik-Wurzel ziehen, um a oder den ersten Theil der jetzt gesuchten Wurzel zu erhalten, dieses a nachher kubiren, um a^3 zu haben und letztres abziehen, damit das, was übrig bleibt, in Verbindung mit der vorher abgeschnittenen Klasse, nur noch die Summe der 3 übrigen Theile $3a^2b$, $3ab^2$ und b^3 seyn werde. Dies wird nach (§. 149.) ausgeführt:

109|215 | 47
64
48 |45215
39823
5392

$3a^2b = 336$
$3ab^2 = 588$
$b^3 = 343$
39823

Verbindet man mit diesem Reste 5392 die vorher abgeschnittenen 3 Ziffern (352), so erhält man

5392352

und dieses ist die Summe der 3 übrigen Theile $3a^2b$, $3ab^2$, b^3, während $a=47$ ist; und das Geschäft, um b zu finden, wird also gerade wie (§. 149. n. n. 3—4.) fortgesetzt werden müssen, nehmlich $a=47$ und

$3a^2 = 6627$ | 5392 | 352 | $8 = b$,

5392352

$3a^2b = 53016$
$3ab^2 = 9024$
$b^3 = 512$
5392352

also 478 die genaue Kubik-Wurzel.

Anmerkung. Verbindet man aber beide hier nach einander folgende Schema, so sieht das Ganze so aus:

109|215|352 | $4 = a$
$a^3 = 64$
$3a^2 = 48$ |45215

$7 = b$,

$3a^2b = 336$
$3ab^2 = 588$
$b^3 = 343$
39823

39823

$47 = a$, $3a^2 = 6627$ | 5392352 | $8 = b$

$3a^2b = 53016$
$3ab^2 = 9024$
$b^3 = 512$
5392352

5392352

und die gesuchte Kubik-Wurzel ist also 478.

Beispiel 1. $\sqrt[3]{6498007}$ zu finden.

Man hat:

Radikand	
6|498|007	1=a
$a^3=1$	
$3a^2=3$ | 5498	8=b
4832	
$a=18,\ 3a^2=972$ | 666007	6=b
602956	
Rest = 63051	

$3a^2b=24$
$3ab^2=192$
$b^3=512$
4832

$3a^2b=5832$
$2ab^2=1954$
$b^3=216$
602956

Also 186 die nächstkleinste Wurzel, so nehmlich daß $(187)^3 > 6498007$, dagegen $6498007-(186)^3=63051$.

Beispiel 2. Aus 40010000 die Kubik-Wurzel zu finden.

Man hat:

Radikand	
40|010|000	3=a
$a^3=27$	
$3a^2=27$ | 13010	4=b
12304	
$a=34,\ 3a^2=3468$ | 706000	2=b
697688	
Rest = 8312	

$3a^2b=108$
$3ab^2=144$
$b^3=64$
12304

$3a^2b=6936$
$3ab^2=408$
$b^3=8$
697688

Also 342 die nächstkleinste Wurzel und 8312 der Rest, so daß
$40010000-(342)^3=8312$, und $(343)^3 > 40010000$ seyn wird.

§. 152. Aufgabe.

Aus jeder gegebenen mehrziffrigen Zahl z. B. aus 476598400076O3 die Kubik-Wurzel zu ziehen.

Auflösung. Die Gestalt des Geschäfts ist folgende:

Radikand	Wurzel
47|659|840|007|603	3=a
$a^3=27$	6=b, $3a^2b=162$
$3a^2=27$ | 20 659.....	$3ab^2=324$
	$b^3=216$
19 656.....	19656
$a=36,\ 3a^2=3888$|1003840	2=b, $3a^2b=7776$
	$3ab^2=432$
	$b^3=8$
781928.....	781928
$a=362,\ 3a^2=393132$|221912007 ...	5=b, $3a^2b=1965660$
	$3ab^2=27150$
	$b^3=125$
196837625 ...	196837625
$a=3625,\ 3a^2=39421875$ | 25074382 603	6=b, $3a^2b=236531250$
	$3ab^2=391500$
	$b^3=216$
23657040 216	23657040216
Rest = 1417342 387	

Die gesuchte Kubik-Wurzel ist also 36256 und

$$476598400007603-(36256)^3=1417342387.$$

Beweis. Der Grund davon fällt dem vorhergehenden zu Folge ohne weiters in die Augen.

Anmerkung 1. Man prüft aber die gefundenen Resultate dadurch, daß man sie dreimal nimmt und mit einander multiplicirt, den Rest addirt und nun zusieht, ob der Radikand wieder herauskommt.

Hätte man dagegen die Wurzel zu klein genommen, übrigens richtig gerechnet, so würde diese Probe doch zutreffen. — Um sich daher zu überzeugen, daß die gefundene Wurzel nicht zu klein sey, muß man die nächstgrößere Zahl nehmen, sie kubiren und zusehen, ob wirklich mehr herauskommt, als der Radikand.

Weil aber $(a+1)^3=a^3+3a^2+3a+1$ ist, so darf man auch nur die gefundene Wurzel statt a setzen, $3a^2+3a+1$ berechnen und zusehen, ob diese Summe größer, gleich oder kleiner als der Rest ist. Ist nehmlich die Summe $3a^2+3a+1$ größer als der gebliebene Rest, so ist a nicht zu klein; ist aber $3a^2+3a+1$ dem gebliebenen Reste gleich, so ist $a+1$ die wahre und genaue Kubik-Wurzel; und ist endlich $3a^2+3a+1$ kleiner noch als der Rest, so ist a ebenfalls zu klein.

Anmerkung 2. Dieses Verfahren, die Kubik-Wurzel zu finden, ist ebenfalls bloß ein eingeschränktes Versuchen.

Anmerkung 3. Wendet man den binomischen Lehrsatz auf die Erhebung einer zwei oder mehrziffrigen Zahl zur 4ten, 5ten, 6ten u. s. w. Potenz an, so wird man aus den dazu nöthigen Formeln

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$
$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5,$$
u. s. w. f.

umgekehrt ähnliche Methoden leicht ableiten können, um auch die 4te, 5te, etc. Wurzel zu finden, wenn sie verlangt werden sollte, aus einer (absoluten) numerischen ganzen Zahl.

§. 153. Aufgabe.

Aus einem gegebenen Decimalbruch z. B. 467,34526 die Quadrat- oder die Kubik-Wurzel zu ziehen.

Auflösung. 1) Man mache bei dem Komma einen Theilstrich, und theile von da ab zur rechten und linken in Klassen, wie in (§. 147. und §. 152.) bei der Quadrat-Wurzel zwei Ziffern, bei der Kubik-Wurzel dagegen drei Ziffern in eine Klasse nehmend und rechts die nicht vollen Klassen mit Nullen ausfüllend;

also	4|67,	34|52|60|	für die Quadrat-Wurzel,
und	467,	345|260|	für die Kubik-Wurzel.

2) Man denke sich nun das Komma ganz weg, ziehe aus der dadurch entstehenden ganzen Zahl 467345260 die Quadrat- oder Kubik-Wurzel nach (§. 147.) oder (§. 152.) und gebe dem Resultat so viele Decimalstellen, als man (rechts vom Komma) jedesmal Klassen von Decimalstellen hat, so ist der so entstehende Decimal-Bruch entweder die genaue Wurzel, wenn kein Rest geblieben ist, oder doch eine Näherungs-Wurzel, wenn zuletzt noch ein Rest geblieben.

Das Praktische des Geschäfts sieht so aus:

1) Für das Quadrat-Wurzel-Ausziehen

	4	67,	34	52	60	21618
	4					
4(1)	67					
	41					
42(6)	26	34				
	25	56				
432(1)	78	52				
	43	21				
4322(8)	35	3160				
	34	5824				
		7336				

und weil man hier (rechts vom Komma) 3 Klassen von Decimalstellen hat, so ist 21,618 eine Näherungs-Wurzel, dergestalt, daß 21,619 schon zu groß ist.

2) Für das Kubik-Wurzel-Ausziehen

	467,	345	260	776	$3a^2b = 1029$
	343				$3ab^2 = 1029$
147	124	345			$b^3 = 343$
	113	533			113533
17787	10	812	260		$3a^2b = 106722$
	10	755	576		$3ab^2 = 8316$
Rest =		56	684		$b^3 = 216$
					10755576

und weil hier nur 2 Klassen von Decimalstellen sind, so ist hier die gesuchte Kubik-Wurzel 7,76 näherungsweise, so daß 7,77 schon zu groß wäre.

Beweis. Denn es ist nach (§. 102.):

$$467{,}34526 = \frac{46734526}{100000} = \frac{467345260}{1000000};$$

folglich nach (§. 66. n. 2.):

$$\sqrt{467{,}34526} = \frac{\sqrt{467345260}}{\sqrt{1000000}}.$$

Nun ist aber $\sqrt{467345260} = 21618 + x$,

wo $x < 1$, weil 21619 schon zu groß ist; und

$\sqrt{1000000} = 1000$; folglich

$$\sqrt{467{,}34526} = \frac{21618+x}{1000} = \frac{21618}{1000} + \frac{x}{1000} = 21{,}618 + \frac{x}{1000}.$$

Da nun $x<1$, so ist $\frac{x}{1000} < \frac{1}{1000}$; also ist 21,618 dergestalt näherungsweise die Quadrat-Wurzel aus 467,34526, daß nicht ein volles Tausendtheil fehlt.

Aber eben so ist

$$\sqrt[3]{467{,}34526} = \frac{\sqrt[3]{467345260}}{\sqrt[3]{1000000}} = \frac{776+z}{100}$$

$$\text{(wo } z<1 \text{ ist)} = \frac{776}{100} + \frac{z}{100} = 7{,}76 + \frac{z}{100},$$ so daß 7,76 dergestalt näherungsweise die Kubik-Wurzel aus 467,34526 seyn muß, daß weniger als $\frac{1}{100}$ daran nur fehlt.

§. 154. Zusatz.

Da jede ganze Zahl z. B. 3, 5, 6, 7, 67, 529, u. s. w. als ein Decimalbruch betrachtet werden kann, dessen Decimalstellen lauter Nullen sind, die erst zur rechten der ganzen Zahl noch angehängt werden müssen, nachdem man vorher ein Komma gemacht hat; weil also z. B. 67 auch so 67,000000 geschrieben werden kann, so kann man auf demselben Wege und nach denselben Regeln des (§. 153.) auch jede Näherungs-, Quadrat- oder Kubik-Wurzel aus einer gegebenen ganzen Zahl finden, so daß noch nicht ein Theilchen der letzten Decimalstelle fehlt.

Da man ferner an einen Decimalbruch rechts beliebig viel Nullen anhängen kann (§. 105.), so kann man auch diese Näherungswurzeln in so vielen Decimalstellen finden, als man nur immer haben will, so daß sie nach und nach, in je mehr Decimalstellen sie ausgedrückt werden, desto mehr und mehr dem wahren Werthe der Wurzel sich nähern.

Beispiele. 1) Aus 6,4 die Quadrat- und Kubik-Wurzel näherungsweise zu finden.

A) Für die Quadrat-Wurzel:

$$
\begin{array}{r|l|l}
 & 6,|40|..|..|.. & 25298 \\
 & 4 & \\
\hline
4(5) & 2\,40\ldots\ldots & \\
 & 2\,25\ldots\ldots & \\
\hline
50(2) & 1500\ldots\ldots & \\
 & 1004\ldots\ldots & \\
\hline
504(9) & 496\,00\ldots & \\
 & 454\,41\ldots & \\
\hline
5058(8) & 41\,5900 & \\
 & 40\,4704 & \\
\hline
 & 1\,1196 &
\end{array}
$$

und es sind nun 2,5 und 2,52 und 2,529 und 2,5298, Näherungs-Werthe der Quadrat-Wurzel aus 6,4, so daß der erste um weniger als $\frac{1}{10}$, der andere um weniger als $\frac{1}{100}$, der dritte um weniger als $\frac{1}{1000}$, der vierte endlich um weniger als $\frac{1}{10000}$ vom wahren Werthe der Wurzel verschieden ist. Und hätte man noch mehr Klassen von Nullen angehängt und die Operation noch weiter fortgesetzt, so hätte man noch nähere Werthe erhalten.

B) Für die Kubik-Wurzel:

$$
\begin{array}{r|l|l|l}
 & 6,|400|\ldots|\ldots| 1856, & 3a^2b=24 & \\
 & 1 & 3ab^2=192 & \\
 & & b^3=\ 512 & \\
\hline
3a^2=3 & 5\ 400\ldots\ldots & 4832 & \\
 & 4\ 832\ldots\ldots & & \\
\hline
3a^2=972 & 568000\ldots & 3a^2b=4860 & \\
 & & 3ab^2=\ 1350 & \\
 & & b^3=\ \ 125 & \\
\hline
 & 499625\ldots & 499625 & \\
\hline
3a^2=102675 & 68375\,000 & 3a^2b=616050 & \\
 & & 3ab^2=\ 19980 & \\
 & & b^3=\ \ 216 & \\
\hline
 & 61805016 & 61805016 & \\
\hline
\text{Rest}=\ & 6569984 & &
\end{array}
$$

und es sind daher 1,8 und 1,85 und 1,856 u. s. w. Näherungs-Werthe von $\sqrt[3]{6,4}$, wo jeder noch nicht eine Einheit der letzten Decimalstelle zu klein ist.

Beispiel. 2) Man soll $\sqrt{6}$ und $\sqrt[3]{6}$ näherungsweise bestimmen.

A) Für die Quadrat-Wurzel hat man:

6,|00|00|00| 2449
4|
4(4)|2 00
1 76
48(4)|24 00
19 36
488(9)|4 64 00
4 40 01
23 99

und 2,449 ist ein Näherungs-Werth von $\sqrt{6}$.

B) Für die Kubik-Wurzel hat man:

6,|000|000|000| 1817
1|
$3a^2$=3 |5 000
4 832
$3a^2$=972| 168 000

97 741
$3a^2$=98283 |70 259 000|

69 064 513
Rest = 1 194 487

$3a^2b$=24
$3ab^2$=192
b^2= 512
4832
$3a^2b$=972
$3ab^2$= 54
b^3= 1
97741
$3a^2b$=687981
$3ab^2$= 26607
b^3= 343
69064513

und 1,817 ist ein Näherungs-Werth von $\sqrt[3]{6}$.

§. 155. Aufgabe.

Aus irgend einem gegebenen Bruche z. B. $\frac{5}{12}$ die Quadrat-Wurzel oder die Kubik-Wurzel zu ziehen.

Auflösung I. Man ziehe die Wurzel aus dem Zähler 5 und auch aus dem Nenner 12 und dividire das erstere durch das letztere (§. 66. n. 2.). — So erhält man $\sqrt{5}$=2,2360679... und $\sqrt{12}$=3,464...; also $\sqrt{\frac{5}{12}} = \frac{2,2360679...}{3,464...}$=0,6455. Eben so $\sqrt[3]{5}$=1,709976... und $\sqrt[3]{12}$=2,289...; folglich $\sqrt[3]{\frac{5}{12}} = \frac{1,709976...}{2,289...}$=0,747.

Auflösung II. Man verwandle den gegebenen Bruch $\frac{5}{12}$ in einen Decimalbruch (§. 118 — 121.) und findet $\frac{5}{12}$=0,41666666666... Aus diesem Decimalbruch ziehe man

dann die Quadrat- oder Kubik-Wurzel nach (§. 153.) und erhält die obigen Resultate wieder näherungsweise, nehmlich $\sqrt{\frac{5}{12}} = 0{,}64549\ldots$ und $\sqrt[3]{\frac{5}{12}} = 0{,}7469\ldots$, welche letzteren genauer sind als die obigen.

§. 156. Zusatz.

Bei der Auflösung (I.) wird man sich aber das Geschäft sehr erleichtern, wenn man den gegebenen Bruch $\frac{5}{12}$ erst in einen andern verwandelt (§. 38.), welcher eine vollständige Quadratzahl oder eine vollständige Kubikzahl im Nenner hat. Hier z. B. ist der Nenner $12 = 3.2.2$; ein Faktor 3 noch hinzugefügt, verwandelt ihn in $3.3.2.2$ oder in $3^2.2^2$, und die Quadrat-Wurzel daraus ist dann 3.2 oder 6. — Man wird also Zähler und Nenner in $\frac{5}{12}$ mit 3 multipliciren, $\frac{5}{12} = \frac{15}{36}$ erhalten, und nun $\sqrt{\frac{5}{12}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{36}} = \frac{\sqrt{15}}{6}$

$= \frac{3{,}87298\ldots}{6} = 0{,}64549\ldots$, so daß wir sehen, wie oben in (I.) die gefundene Quadrat-Wurzel, wenn auch noch nicht um $\frac{1}{100000}$, zu groß gefunden ist.

Hängt man aber an den Nenner 12 oder $3.2.2$ noch die Faktoren $3.3.2$ an, so erhält man $3^3.2^3$, und die Kubik-Wurzel daraus ist wiederum 3.2. — Man multiplicire daher Zähler und Nenner von $\frac{5}{12}$ mit $3.3.2$ oder 18, so erhält man $\frac{5}{12} = \frac{90}{216}$ oder $= \frac{90}{6^3}$ und nachher $\sqrt[3]{\frac{5}{12}} =$

$$\frac{\sqrt[3]{90}}{\sqrt[3]{216}} = \frac{\sqrt[3]{90}}{6} = \frac{4{,}481404}{6} = 0{,}7469....$$

Anmerkung. Wir nehmen dieser Gelegenheit wahr, darauf aufmerksam zu machen, daß man in der Praxis so wenig wie möglich Näherungs-Werthe einführen müsse, und wenn deren gebraucht werden, daß man sie immer so einführe, um den möglichen Abstand über oder unter dem wah-

ren Werthe, auch der spätern Resultate, noch so ziemlich beurtheilen zu können. — In vorstehender Auflösung (I. §. 155.) hat man z. B. unnützerweise zwei Näherungs-Werthe nehmlich $\sqrt{5}$ und $\sqrt{12}$ oder $\sqrt[3]{5}$ und $\sqrt[3]{12}$ eingeführt, und daraus zugleich den zweiten Nachtheil gezogen, daß man nicht wußte, ob das gefundene Resultat für $\sqrt{\frac{5}{12}}$ oder $\sqrt[3]{\frac{5}{12}}$ zu groß oder zu klein war, und noch weniger, um wieviel ohngefähr zu groß oder zu klein. — In der Auflösung (II. §. 155.) dagegen, oder im Zusatz (§. 156.) konnte man beurtheilen, daß die hier gefundenen Werthe zu klein sind und nicht um eine Einheit der letzten Decimalstelle vom wahren Werthe abweichen.

Als Uebungs-Beispiele zu dem Verfahren (§. 156.) seyen noch die Quadrat-Wurzeln zu ziehen aus $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{17}{24}$, $\frac{29}{18}$ u. s. w. f., und man wird dafür erst setzen beziehlich $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{15}{9}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{6}{16}$, $\frac{55}{121}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{17\cdot 6}{12^2}$, $\frac{58}{36}$ u. s. w. — Soll aber aus denselben Brüchen die Kubik-Wurzel gezogen werden, so wird man dafür setzen beziehlich

$\frac{4}{8}$, $\frac{9}{27}$, $\frac{18}{27}$, $\frac{45}{27}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{14}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{605}{11^3}$, $\frac{21}{27}$, $\frac{17\cdot 9}{6^3}$, $\frac{29\cdot 12}{6^3}$ u. s. w. f., wo die Nenner alle vollständige Kubikzahlen sind und wo man nicht übersehen darf, daß der Zähler und der Nenner eines jeden der gegebenen Brüche allemal mit derselben Zahl multiplicirt seyn muß, wenn der neue Bruch dem gegebenen gleich seyn soll.

§. 157. Zusatz.

Will man endlich die Formeln (§. 141.) anwenden, so kann man aus jeder ganzen und auch aus jeder gebrochenen Zahl c die Quadrat-, Kubik- und auch jede höhere (νte) Wurzel ziehen, wenn man diese Zahl c in eine Summe $a+b$ zerlegt, deren erster Summand a eine vollständige (ganze oder gebrochene) Quadrat-, Kubik-Zahl, oder höhere (νte) Potenz ist. Bereits (§. 140.) haben wir in Bezug auf das Quadrat-Wurzel-Ausziehen einiges Detail darüber gegeben. Hier wollen wir $\sqrt[3]{6{,}4}$ näherungsweise bestimmen. — Man strebe nun durch Versuche eine Zahl zu finden (ganz oder gebrochen), deren Kubus der Zahl 6,4 schon ziemlich nahe kommt; z. B. 1,8; bestimme nun $(1{,}8)^3 = 5{,}832$, ziehe solches von 6,4 ab,

so daß 0,568 bleibt; setze nachgehends $(1,8)^3$ oder 5,832 statt a und 0,568 statt b, so wird $a+b=6,4$ und $\frac{b}{a}=\frac{71}{729}$; und nimmt man nun die Formel (§. 141. n. 2.)

$$\sqrt[3]{a+b}=\sqrt[3]{a}\left(1+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{b}{a}-\tfrac{1}{9}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^2+\tfrac{5}{81}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^3-\tfrac{10}{243}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^4+..\right)$$

zu Hülfe, so hat man:

$$\sqrt[3]{6,4}=(1,8)\cdot\left(1+\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{71}{729}-\tfrac{1}{9}\cdot\frac{71^2}{729^2}+\tfrac{5}{81}\cdot\frac{71^3}{729^3}-\tfrac{10}{243}\cdot\frac{71^4}{729^4}+\ldots\right);$$

und verwandelt man hier die Glieder einzeln in Decimalbrüche, nimmt die mit dem (+) Zeichen versehenen zusammen und auch die mit dem (−) Zeichen versehenen, zieht die letztere Summe von der erstern ab, nachdem man ohngefähr die ersten 7 Glieder der Reihe genommen hat, multiplicirt das Resultat mit 1,8, so wird 1,856 herauskommen, wie solches (§. 154. Beispiel 1.) bereits gefunden worden ist.

Anmerkung. Man erkennt leicht, daß dieser Weg nicht der vortheilhafteste ist, so lange nicht $\frac{b}{a}$ so sehr klein wird, daß $\left(\frac{b}{a}\right)^2$, $\left(\frac{b}{a}\right)^3$, etc. schon außer Acht gelassen werden können. Ist nehmlich $\frac{b}{a}$ so sehr klein, so reduciren sich die Formeln (§. 141.) bloß auf

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}\cdot\left(1+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}\right)=\sqrt{a}+\tfrac{1}{2}\frac{b}{\sqrt{a}},$$

$$\sqrt[3]{a+b}=\sqrt[3]{a}\cdot\left(1+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{b}{a}\right)=\sqrt[3]{a}+\frac{b}{3(\sqrt[3]{a})^2},$$

$$\sqrt[4]{a+b}=\sqrt[4]{a}\cdot\left(1+\tfrac{1}{4}\cdot\frac{b}{a}\right)=\sqrt[4]{a}+\frac{b}{4(\sqrt[4]{a})^3},$$

u. s. w. s.

und
$$\sqrt[n]{a+b}=\sqrt[n]{a}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\cdot\frac{b}{a}\right)=\sqrt[n]{a}+\frac{b}{n(\sqrt[n]{a})^{n-1}}.$$

Hat man also aus einer Zahl c bereits die Quadrat-Wurzel dergestalt näherungsweise gefunden, daß, wenn ihr Quadrat $=a$ gesetzt wird, dann $\frac{b}{a}$

ohngefähr $=$ oder $<$ als $\frac{1}{1000}$ wird, so ist $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ dann gleich oder kleiner als $\frac{1}{1000000}$, u. s. w. f., und alle die weggelassenen Glieder betragen dann noch nicht $\frac{1}{1000000}$. Man kann daher $\frac{b}{2\sqrt{a}}$ berechnen, durch bloße Division, in so ferne $\sqrt{a}$ gegeben ist, die Division bis auf 6 Decimalstellen fortsetzen, wenn $\sqrt{a}$ in 3 Decimalstellen gegeben ist, und die Summe $\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}$ wird dann $\sqrt{(a+b)}$ oder $\sqrt{c}$ bis auf die 6te Decimalstelle genau geben.

Man habe z. B. $\sqrt{2}$ bereits $=1{,}414$ näherungsweise gefunden, so daß $(1{,}414)^2=1{,}999396=a$ und $0{,}000604=b$ gesetzt werden kann, so ist $\sqrt{a}=1{,}414$, $2\sqrt{a}=2{,}818$ und $\frac{b}{2\sqrt{a}}=\frac{0{,}000302}{1{,}414}=0{,}00021357$ und $\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}=1{,}41421357=\sqrt{a+b}=\sqrt{2}$, welches Resultat bis auf die 7te Decimalstelle noch richtig ist. Und dieses Verfahren ist besonders dann mit Vortheil anwendbar, wenn man die erste Näherungs-Wurzel 1,414 auf dem Wege (§. 153.) gefunden hat, weil dann der dort zuletzt übrig gebliebene Rest ohne weiters unser hiesiges b ist.

Hat man also auf dem Wege des (§. 153.) irgend eine Quadrat-Wurzel bis auf 3 Decimalstellen gefunden, so dividire man den letzten Rest durch das doppelte der gefundenen Näherungs-Wurzel, setze die Division bis auf 6 Decimalstellen fort, und addire den Quotienten zu der bereits gefundenen Näherungs-Wurzel, so erhält man die Wurzel bis auf 6 Decimalstellen genau.

Hat man aber auf dem Wege des (§. 153.) die Kubik-Wurzel bereits bis auf 3 Decimalstellen gefunden, etwa im Beispiel (2. B. §. 154.) 1,817, so darf man nur den letzten Rest 1194487 durch $3(1817)^2$ oder durch 9904467 dividiren, indem man an den Rest 1194487 noch 3 Nullen (oder die nächste Klasse des Radikanden) anhängt, und wenn dann 120 als Resultat der Division sich ergiebt, so wird 1,817120 die $\sqrt[3]{6}$ dergestalt näherungsweise seyn, daß sie von dem wahren Werthe nicht um 1 Milliontheilchen abweicht.

Hat man aber die Wurzeln bereits bis auf 4 Decimalstellen näherungsweise gefunden, so wird man auf diesem Wege sogleich noch 4 folgende Decimalstellen dazu erhalten, so daß alle 8 Stellen noch richtig sind.

Die Vortheile, welche die Berücksichtigung der (§. 141.) hingestellten unendlichen Reihen gewähren, in Bezug auf noch höhere Wurzeln, fallen nun von selbst in die Augen.

Zu diesem Kapitel gehörige Uebungs-Beispiele.

1) $\sqrt{2704}=52$;
2) $\sqrt{3969}=63$;
3) $\sqrt{364816}=604$;
4) $\sqrt{40908816}=6396$;
5) $\sqrt{2796}=52$, Rest $=92$;
6) $\sqrt{64985}=254$, Rest $=469$;
7) $\sqrt{298417}=546$, Rest $=301$;
8) $\sqrt{1234567}=1111$, Rest $=246$;
9) $\sqrt{67108864}=8192$;
10) $\sqrt{12103441}=3479$;
11) $\sqrt{71216721}=8439$;
12) $\sqrt{85877289}=9267$;
13) $\sqrt{8844676}=2974$;
14) $\sqrt{\overline{8000000}}=2828$, Rest $=2416$;
15) $\sqrt{80000000}=8944$, Rest $=4864$;
16) $\sqrt{10000000}=3162$, Rest $=1756$;
17) $\sqrt{2500000}=1581$, Rest $=439$;
18) $\sqrt{97000000}=9848$, Rest $=6896$;
19) $\sqrt{59700000}=7727$, Rest $=8924$;
20) $\sqrt{38331764225}=195785$;
21) $\sqrt{38331920\not{8}5316}=1957854$;
22) $\sqrt{48303584206084}=6950078$;
23) $\sqrt{7,6538}=2,766\ldots$
24) $\sqrt{7}=2,645\ldots$
25) $\sqrt{31,8}=5,639\ldots$
26) $\sqrt{3,18}=1,783\ldots$
27) $\sqrt{0,318}=0,5639\ldots$
28) $\sqrt{0,0318}=0,1783\ldots$
29) $\sqrt{0,00318}=0,05639\ldots$
30) $\sqrt{0,000318}=0,01783\ldots$
31) $\sqrt{189}=13,7477\ldots$
32) $\sqrt{19}=4,358899\ldots$
33) $\sqrt{3,008954}=1,734633\ldots$
34) $\sqrt{101,765}=10,0878\ldots$
35) $\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$ und $\sqrt{2,505889}=1,583$;
36) $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$ und $\sqrt{2\frac{1}{4}}=1,5$;
37) $\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{1}{9}}=0,577352\ldots$
38) $\sqrt{5\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{21}=2,397915\ldots$
39) $\sqrt{80}=8,9442713509\ldots$

40) $\sqrt{3}=1{,}732\ldots$ und $\sqrt{3{,}748096}=1{,}936$;

41) $\sqrt{825}=28{,}7228132152\ldots$

42) $\sqrt{815}=28{,}548204672\ldots$

43) $\sqrt{2{,}56}=1{,}6$ und $\sqrt{2{,}48850625}=1{,}5775$;

44) $\sqrt{6{,}5536}=2{,}56$ und $\sqrt{2{,}509056}=1{,}584$;

45) $\sqrt{13140625}=3625$;

46) $\sqrt{1314497536}=36256$;

47) $\sqrt{10\frac{3}{10}}=3{,}20936\ldots$ und $\sqrt{2{,}4964}=1{,}58$;

48) $\sqrt{\frac{4}{7}}=\frac{1}{7}\sqrt{28}=0{,}7559289\ldots$

49) $\sqrt[3]{1728}=12$;

50) $\sqrt[3]{39304}=34$;

×51) $\sqrt[3]{41063625}=345$;

52) $\sqrt[3]{249095649088}=6292$;

53) $\sqrt[3]{47658422665216}=36256$;

54) $\sqrt[3]{4{,}096}=1{,}6$;

55) $\sqrt[3]{3{,}375}=1{,}5$;

56) $\sqrt[3]{3{,}966822287}=1{,}583$;

57) $\sqrt[3]{3{,}944312}=1{,}58$;

58) $\sqrt[3]{0{,}095711845}=0{,}457\ldots$

59) $\sqrt[3]{3{,}095711845}=1{,}457\ldots$

60) $\sqrt[3]{3{,}086011371}=1{,}455\ldots$

61) $\sqrt[3]{3{,}974344704}=1{,}584$;

62) $\sqrt[3]{3{,}869893}=1{,}57$;

63) $\sqrt[3]{3{,}925618609375}=1{,}5775$;

64) $\sqrt[3]{0{,}000613041887375}=0{,}08495$;

65) $\sqrt[3]{2}=1{,}259921\ldots$

66) $\sqrt[3]{37}=3{,}332221\ldots$

67) $\sqrt[3]{3{,}7}=1{,}546686\ldots$

68) $\sqrt[3]{0{,}37}=0{,}7179\ldots$

69) $\sqrt[3]{0{,}037} = 0{,}3332221 \ldots$

70) $\sqrt[3]{0{,}0037} = 0{,}1546686 \ldots$

71) $\sqrt[3]{28\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{28{,}25} = 3{,}04559 \ldots$

72) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$;

73) $\sqrt[3]{2\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$;

74) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$;

75) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$;

76) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{18} = 0{,}87358$;

77) $\sqrt[3]{18\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{56}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{504} = \sqrt[3]{18{,}666666 \ldots} = 2{,}652 \ldots$

78) $\sqrt[3]{504} = 7{,}958 \ldots$

79) $\sqrt[3]{3\frac{3}{5}} = \sqrt[3]{\frac{18}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt[3]{450} = \sqrt[3]{3{,}6} = 1{,}532 \ldots$

80) $\sqrt[3]{450} = 7{,}663 \ldots$

81) $\sqrt[3]{\frac{512}{729}} = \frac{8}{9}$;

82) $\sqrt[3]{13\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{55}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{110} = \sqrt[3]{13{,}75} = 2{,}395709 \ldots$

83) $\sqrt[3]{880} = 9{,}582839 \ldots$

84) $\sqrt[3]{23\frac{7}{8}} = \sqrt[3]{23{,}875} = 2{,}879 \ldots$

85) $\sqrt[3]{21{,}415471433} = 2{,}777$;

86) $\sqrt[3]{312079{,}650687} = 67{,}83$;

87) $\sqrt[3]{0{,}923441335272} = 0{,}9738$;

88) $\sqrt[3]{98{,}227427544} = 4{,}614$;

89) $\sqrt[3]{110} = 4{,}791418 \ldots$

90) $\sqrt[3]{4\frac{2}{27}} = \sqrt[3]{4{,}07407407 \ldots} = 1{,}597139 \ldots$

Schlußfragen.

1) Wie wird die Quadrat-Wurzel und die Kubik-Wurzel aus einem gemeinen Bruche gefunden?

2) Wie aus einer gemischten Zahl z. B. $7\frac{2}{3}$, $8\frac{3}{4}$ etc. etc.? —

3) Wie wird die Quadrat- und die Kubik-Wurzel aus einem Decimalbruche gezogen?

4) Wie näherungsweise oder genau aus einem Decimalbruch oder aus einer ganzen Zahl? —

Arithmetik.

Neuntes Kapitel.

Von dem Quadrat- und Kubik-Wurzel-Ausziehen aus algebraischen Summen.
Von den allgemeinen und auch von den imaginären Quadrat-Wurzeln.

§. 158. Bemerkung.

Setzt man in der Formel

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

erstlich $a=3x$ und $b=-4y$, so erhält man

$$a^2=9x^2, \qquad 2ab=-24xy, \qquad b^2=16y^2$$

und $$(3x-4y)^2=9x^2-24xy+16y^2.$$

Soll also umgekehrt $\sqrt{9x^2-24xy+16y^2}$ gefunden werden, so nehme man die Quadrat-Wurzel aus dem ersten Theil $9x^2$, nehmlich $\sqrt{9x^2}=3x$, und setze solche statt a in der Formel, bestimme a^2 oder $9x^2$, ziehe solches von dem gegebenen Radikanden $9x^2-24xy+16y^2$ ab; bestimme $2a=6x$ und dividire damit in den 2ten Theil $-24xy$ des Restes und man wird $-4y$ als zweiten Theil der Wurzel erhalten, was also statt b zu setzen ist. — Man berechne nun noch $2ab+b^2$, für $a=3x$, $b=-4y$, und ziehe dieses $-24xy+16y^2$ von dem obigen Reste $-24xy+16y^2$ ab; —

und bleibt dann Null, so ist $3x-4y$ die genaue Wurzel aus $9x^2-24xy+16y^2$.

Derselbe Weg, welcher uns die Quadrat-Wurzeln aus gegebenen numerischen Zahlen finden ließ, führt uns also auch zu dem Quadrat-Wurzel-Ausziehn aus einer algebraischen Summe.

Beispiel. 1. Aus $\frac{4}{9}y^2-\frac{20}{3}yz+25z^2$ die Quadrat-Wurzel zu ziehen. — Man hat

Radikand	Wurzel
$\frac{4}{9}y^2-\frac{20}{3}yz+25z^2$	$\frac{2}{3}y=a$
$a^2=\frac{4}{9}y^2$	
$2a=\frac{4}{3}y \mid -\frac{20}{3}yz+25z^2$	$-5z=b$
$2a+b=\frac{4}{3}y-5z \mid -\frac{20}{3}yz+25z^2$	

also $\frac{2}{3}y-5z$ die gesuchte Wurzel.

Beispiel. 2. $\sqrt{\frac{9}{25}a^2+\frac{12}{15}ac+\frac{4}{9}b^2}$ zu finden

Radikand	Wurzel
$\frac{9}{25}-a^2+\frac{12}{15}ac+\frac{4}{9}b^2$	$\frac{3}{5}a+\frac{2}{3}b$
$\frac{9}{25}a^2$	
$\frac{6}{5}a \mid \frac{12}{15}ac+\frac{4}{9}b^2$	
$\frac{12}{15}ac+\frac{4}{9}b^2$	

§. 159. Bemerkung.

Hätte man das Trinomium $2x-y+3z$, so konnte man $a=2x-y$ und $b=3z$ setzen und erhielte dann:

$$a^2=(2x-y)^2=4x^2-4xy+y^2$$
$$2ab=2(2x-y)3z=12xz-6yz$$
$$b^2=(3z)^2=9z^2$$

$$(2x-y+3z)^2=4x^2-4xy+y^2+12xz-6yz+9z^2.$$

Soll nun umgekehrt die Quadrat-Wurzel wieder gefunden werden aus diesem Resultat, so wird man leicht folgendes Schema sich bilden:

Radikand	Wurzel
$4x^2-4xy+y^2+12xz-6yz+9z^2$	$2x=a$
$a^2=4x^2$	
$2a=4x \mid -4xy+y^2+12xz-6yz+9z^2$	$-y=b$
$2ab+b^2= \mid -4xy+y^2$	
$a=2x-y,\ 2a=4x-2y \mid 12xz-6yz+9z^2$	$3z=b$
$2ab+b^2= \mid 12xz-6yz+9z^2$	

also $2x-y+3z$ die gesuchte Wurzel.

Dieſelbe Aufgabe auch ſo:

Radikand	Wurzel
$9z^2+4x^2+y^2-4xy+12xz-6yz$	$3z=a$
$a^2=9z^2$	
$2a=6z \mid 4x^2+y^2-4xy+12xz-6yz$	$\frac{12xz}{6z}=2x=b$
$2ab+b^2= \mid 4x^2 \quad 12xz$	
$a=3z+2x,\ 2a=6z+4x \mid y^2-4xy-6yz$	$\frac{-6yz}{6z}=-y=b$
$2ab+b^2= \mid y^2-4xy-6yz$	

alſo $3z+2x-y$ die geſuchte Wurzel, wie oben auch.

Uebungs-Beiſpiele. Man ſoll die algebraiſchen Summen finden, welche mit ſich ſelbſt multiplicirt

1) $4a^2-12ab+9b^2$ oder

2) $16x^2+\frac{40xy}{z}+\frac{25y^2}{z^2}$ oder

3) $25x^2\pm2+\frac{1}{25x^2}$ oder

4) $a+b\pm2\sqrt{ab}$ oder

5) $\sqrt[3]{a^2}\pm2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ oder

6) $a^2+2ab+b^2-2ac-2bc+c^2+2ad+2bd-2cd+d^2$ oder

7) $a^2+2ab+b^2-2ac-2bc+c^2$ oder

8) $a^2-2ab+b^2-2ac+2bc+c^2+2ad-2bd-2cd+d^2-2af+2bf$
$+2cf-2df+f^2$, geben.

§. 160. Bemerkung.

Nimmt man die Formel

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

und ſetzt in ihr $2x$ ſtatt a, $-3y$ ſtatt b, ſo erhält man $a+b=2x-3y$ und

$$a^3=8x^3$$
$$3a^2b=-36x^2y$$
$$3ab^2=54xy^2$$
$$b^3=-27y^3$$
$$(2x-3y)^3=8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3.$$

Will man umgekehrt aus

$$8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$$

wiederum die Kubik-Wurzel ziehen, ſo wird man ein dem (§. 152.) für das numeriſche Kubik-Wurzel-Ausziehen, den

angeführten Gründen zu Folge, ähnliches praktisches Verfahren statt finden lassen können, nehmlich:

Radikand $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$	$2x=a$
$a^3=8x^3$	
$3a^2=12x^2 \mid -36x^2y+54xy^2-27y^3$	$\frac{-36x^2y}{12x^2}=-3y=b$
	$3a^2b=-36x^2y$
	$3ab^2=+54xy^2$
	$b^3=-27y^3$
$-36x^2y+54xy^2-27y^3$	$-36x^2y+54xy^2-27y^3$

also ist $2x-3y$ die gesuchte Kubik-Wurzel.

Beispiel. $\sqrt[3]{\frac{1}{8}x^3-3x^2y+24xy^2-64y^3}$ zu finden.

Radikand $\frac{1}{8}x^3-3x^2y+24xy^2-64y^3$	$\frac{1}{2}x=a$
$a^3=\frac{1}{8}x^3$	
$3a^2=\frac{3}{4}x^2 \mid -3x^2y+24xy^2-64y^3$	$\frac{-3x^2y}{\frac{3}{4}x^2}=-4y=b$
	$3a^2b=-3x^2y$
	$3ab^2=+24xy^2$
	$b^3=-64y^3$
$-3x^2y+24xy^2-64y^3$	$-3x^2y+24xy^2-64y^3$

also $\frac{1}{2}x-4y$ die gesuchte Kubik-Wurzel.

§. 161. Bemerkung.

Will man das Trinomium $2x-y-2z$ zur dritten Potenz erheben, so muß man in der Formel

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$2x-y$ statt a und $-2z$ statt b setzen, und erhält:

$$a^3=(2x-y)^3=8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$$
$$3a^2b=3(2x-y)^2(-2z)=-24x^2z+24xyz-6y^2z$$
$$3ab^2=3(2x-y)(-2z)^2=+24xz^2-12yz^2$$
$$b^3=(-2z)^3=-8z^3$$

$$(2x-y-3z)^3=8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3-24x^2z+24xyz-6y^2z+24xz^2-12yz^2-8z^3.$$

Soll nun umgekehrt aus diesem letztern Ausdruck rechts die Kubik-Wurzel gezogen werden, so wird man z. B. von $-8z^3$ die Kubik-Wurzel nehmen $(=-2z)$ und dieses

$-2z$ statt a setzen, $a^3 = -8z^3$ berechnen und von dem Radikanden subtrahiren, so daß übrig bleibt

$$8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3 - 24x^2z + 24xyz - 6y^2z + 24xz^2 - 12yz^2.$$

Nun wird man $3a^2 = 12z^2$ bestimmen, und damit in eines der Glieder, welches mit z^2 afficirt ist, dividiren z. B. in $24xz^2$, und $2x$ zum Quotienten erhalten, solches statt b setzen, und

$$3a^2b = 24xz^2$$
$$3ab^2 = -24x^2z$$
$$b^3 = 8x^3$$

bestimmen und die Summe $24xz^2 - 24x^2z + 8x^3$ von dem obigen Reste abermals subtrahiren, und

$-12x^2y + 6xy^2 - y^3 + 24xyz - 6y^2z - 12yz^2$ erhalten.

Nun wird $-2z + 2x$ statt a gesetzt, $3a^2 = 12z^2 - 24xz + 12x^2$ bestimmt und damit in den letzten Rest dividirt (oder nur mit $12z^2$ in eines der Glieder, was mit z^2 afficirt ist, also mit $12z^2$ in $-12yz^2$) so erhält man $-y$, und dieses $-y$ wird nun wieder statt b gesetzt, und

$$3a^2b = 3.(-2z+2x)^2.(-y) = -12yz^2 + 24xyz - 12x^2y$$
$$3ab^2 = 3.(-2z+2x).(-y)^2 = -6y^2z + 6xy^2$$
$$b^3 = (-y)^3 = -y^3$$

gefunden, und die Summe dieser 3 Theile von dem letzten Rest auf's neue subtrahirt. — Bleibt nun Null übrig, so ist $-2z + 2x - y$ oder $2x - y - 2z$ die gesuchte Kubik-Wurzel.

Anmerkung. Es mag dies ausreichen, um auch zusammengesetztere Aufgaben danach zu behandeln.

Uebungs-Beispiele. Man soll die algebraischen Summen finden, welche 3mal mit sich multiplicirt (d. h. 3mal als Faktor genommen)

1) $\frac{64}{729} - \frac{32}{81}z + \frac{20}{27}z^2 - \frac{20}{27}z^3 + \frac{5}{12}z^4 - \frac{1}{8}z^5 + \frac{1}{64}z^6$ oder

2) $a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3$ oder

3) $8a^3 - 60a^2b + 150ab^2 - 125b^3$ oder

4) $\frac{64a^6c^6}{b^{12}d^6} + \frac{48a^5c^7}{b^9d^4} + \frac{15a^4c^8}{b^6d^2} + \frac{5a^3c^9}{2b^3} + \frac{15a^2c^{10}d^2}{64} + \frac{3}{256}ab^3c^{11}d^4 + \frac{1}{4096}b^6c^{12}d^6$ geben.

§. 162. Bemerkung.

Zieht man aus $9x^2-24xy+16y^2$ nach der Methode (§. 158.) die Quadrat-Wurzel, so erhält man:

$$\begin{array}{l|l} 9x^2-24xy+16y^2 & 3x=a \\ a^2=9x^2 & \\ \hline 2a=6x \;\Big|\; -24xy+16y^2 & \frac{-24xy}{6x}=-4y=b \\ \quad\;\; -24xy+16y^2 & \end{array}$$

so daß $3x-4y$ als die gesuchte Wurzel gefunden wird; und multiplicirt man $3x-4y$ in der That mit sich selbst d. h. mit $3x-4y$, so erhält man auch wirklich obigen Ausdruck $9x^2-24xy+16y^2$ wieder.

Verwechselt man aber das erste und dritte Glied des gegebenen Ausdrucks, d. h. schreibt man ihn so: $16y^2-24xy+9x^2$, und zieht man nun die Quadrat-Wurzel aus, nach derselben Methode (§. 158.), so erhält man:

$$\begin{array}{l|l} 16y^2-24xy+9x^2 & 4y=a \\ a^2=16y^2 & \\ \hline 2a=8y \;\Big|\; -24xy+9x^2 & \frac{-24xy}{8y}=-3x=b \\ \quad\;\; -24xy+9x^2 & \end{array}$$

und es wird also jetzt $4y-3x$ als die gesuchte Wurzel gefunden; und in der That giebt $4y-3x$ mit $4y-3x$ multiplicirt, den Radikanden $16y^2-24xy+9x^2$ oder $9x^2-24xy+16y^2$ wieder.

Man findet also das erstemal $3x-4y$, das anderemal $4y-3x$; und obgleich beide Resultate nicht einander gleich sind, so giebt doch jeder mit sich selbst multiplicirt denselben Ausdruck $9x^2-24xy+16y^2$. Welcher von beiden ist nun die wahre Wurzel? — —

§. 163. Zusatz.

Unter der Voraussetzung, daß $9x^2-24xy+16y^2$ eine absolute (positive) Zahl ist, ist nach (§. 64.) $\sqrt{9x^2-24xy+16y^2}$ allemal selbst eine absolute (positive) Zahl, und es wird also von den beiden gefundenen Aus-

drücken $3x-4y$ und $4y-3x$ nur derjenige die wahre Wurzel seyn, welcher zugleich positiv ist.

Nun ist aber $3x-4y=-(4y-3x)$ (§. 15. n. 7.)
und auch $4y-3x=-(3x-4y)$,

so daß also, wenn einer der beiden Ausdrücke positiv ist, der andere dann nothwendig negativ seyn muß. Aber welcher von beiden der positive, welcher der negative seyn wird, kann, so lange x und y noch ganz beliebige Werthe annehmen können, nicht bestimmt werden, weil für gewisse Werthe von x und y, $3x>4y$, für andere Werthe von x und y aber $3x<4y$ werden kann, so daß dann für die erstgedachten Werthe von x und y, $3x-4y$ positiv und $4y-3x$ negativ seyn werden, während für die anderen Werthe von x und y von denselben beiden Ausdrücken $3x-4y$ und $4y-3x$ der erstere negativ, der zweite aber positiv werden muß.

Man wird daher in den Rechnungen alle beide für die Wurzel gefundene Ausdrücke (welche beide so $\pm(3x-4y)$ oder so $\pm(4y-3x)$ in einen zusammengefaßt werden können) so lange als die wahre Wurzel aus $9x^2-24xy+16y^2$ beibehalten müssen, bis in den besondern Fällen der Anwendung, da wo die Buchstaben x, y bestimmte Werthe erhalten, für diese bestimmten Werthe erst entschieden werden kann, welcher der beiden Ausdrücke der absolute (positive) ist.

Note. Für $x=5$ und $y=2$ ist z. B. $9x^2=225$, $24xy=240$, $16y^2=64$, also $9x^2-24xy+16y^2=49$. — Ferner ist $3x=15$, $4y=8$, also $\pm(3x-4y)=\pm(15-8)=\pm7$, und davon das (+) Zeichen zu nehmen, das (−) Zeichen aber wegzuwerfen, so daß für diesen Fall, d. h. für diese Werthe von x und y, $+(3x-4y)$ oder $3x-4y$ als die wahre Wurzel aus $9x^2-24xy+16y^2$ anzusehen ist.

Für $x=2$ dagegen und $y=5$, ist $9x^2=36$, $24xy=240$ und $16y^2=400$, also $9x^2-24xy+16y^2=196$. — Ferner ist $3x=6$, $4y=20$, also $\pm(3x-4y)=\pm(6-20)=\pm(-14)$; und hier muß also das (+) Zeichen weggeworfen, das (−) Zeichen dagegen beibehalten werden, weil $-(-14)=+14=14$, die positive Zahl liefert. Die wahre Wurzel aus $9x^2-24xy+16y^2$ ist also in diesem andern Falle, d. h. für diese anderen Werthe von x und von y, nicht $+(3x-4y)$, sondern $-(3x-4y)$ oder $4y-3x$.

Auch sieht man wohl, daß dieser, Anfangs sonderbar scheinende Umstand, daher rührt, weil $(+A)^2=A^2$ und auch $(-A)^2=A^2$ ist.

Wird daher z. B. $2x-3y-4z+5v$ als Quadrat-Wurzel aus einem gegebenen Ausdrucke gefunden, so wird allemal auch $-(2x-3y-4z+5v)$ d. h. $-2x+3y+4z-5v$ als Quadrat-Wurzel aus demselben Ausdrucke gefunden werden können, so daß man allemal den doppelsinnigen Werth $\pm(2x-3y-4z+5v)$ als die gesuchte Quadrat-Wurzel in der Rechnung so lange beibehält, bis entschieden werden kann, welcher von beiden Werthen der positive seyn wird.

§. 164. Erklärung.

Aber eben weil wir bei dem allgemeinen Arbeiten für vorkommende Quadrat-Wurzeln einen doppelsinnigen Werth setzen müssen, so mag es bequemer seyn, wenn wir von nun an die Quadrat-Wurzel überhaupt etwas allgemeiner auffassen, und unter $\sqrt{a}$ uns überhaupt jeden Ausdruck denken, dem die Eigenschaft zukommt, daß wenn er mit sich selber multiplicirt wird, dann a wieder herauskommt, während a noch ganz allgemein gedacht ist, so daß a selbst noch sowohl positiv als auch negativ seyn kann; und diese Wurzel mag dann die allgemeine Quadrat-Wurzel heißen.

§. 165. Zusatz.

Von nun an müssen wir also die $\sqrt{a}$ als zweideutig ansehen, so daß sie einen Werth z, aber auch einen andern $-z$ noch vorstellen kann, weil, wenn $z^2=a$ ist, auch $(-z)^2=a$ seyn wird.

Und drückt man die beiden im allgemeinen unter $\sqrt{a}$ gedachten Werthe durch $+\sqrt{a}$ und $-\sqrt{a}$, also zusammen durch $\pm\sqrt{a}$ aus, so hat man den (großen und wichtigen) Vortheil, daß in $+\sqrt{a}$ und in $-\sqrt{a}$, das Zeichen $\sqrt{a}$ selbst, als jedesmal einen und denselben Werth habend angesehen werden kann.

Note. Sey $a=9$, so ist $\sqrt{9}$ von nun an zweideutig, und kann den Werth $+3$, aber auch den Werth -3 vorstellen, so daß in jedem besondern Falle allemal noch besonders untersucht werden muß, welcher von beiden jetzt gerade unter $\sqrt{9}$ verstanden werde. — Drücken wir aber beide Werthe durch $+\sqrt{9}$ und $-\sqrt{9}$ aus, so ist $\sqrt{9}$ in den letztern beiden Fällen jedesmal als einen und denselben seiner Werthe vorstellend gedacht, wenn es auch nun gleichgültig noch ist, welchen von beiden man sich vorgestellt denken will. Setzt man nehmlich

+3 oder 3 statt $\sqrt{9}$, so gehen $+\sqrt{9}$ und $-\sqrt{9}$ in +3 und −3 über, welches in der That die beiden Werthe der noch ganz allgemein aufgefaßten $\sqrt{9}$ sind. Setzt man aber in $+\sqrt{9}$ und $-\sqrt{9}$ jedesmal den andern Werth −3 statt $\sqrt{9}$, so gehen $+\sqrt{9}$ und $-\sqrt{9}$ in $+(-3)$ und $-(-3)$ d. h. in −3 und +3 über, welches wiederum dieselben beiden Werthe sind.

§. 166. Zusatz.

Was aber früher im 3ten Kapitel von den Quadrat-Wurzeln gelehrt worden ist, für den Fall, daß die Radikanden und dann die Wurzeln selbst absolute (positive) Zahlen sind, gilt natürlich noch, wenn man auch die Radikanden und die Wurzeln, dem (§. 164.) gemäß, ganz allgemein auffaßt, sobald man nur jede Quadrat-Wurzel (d. h. jeden Ausdruck der ein Wurzelzeichen ($\sqrt{}$) an seiner Stirne trägt), wenn auch als ein zweideutiges, doch jedesmal einen und denselben seiner Werthe vorstellendes Zeichen betrachtet *).

Daß aber jede Quadrat-Wurzel, wenn sie mehremale vorkommt, auch jedesmal einen und denselben ihrer Werthe repräsentire, darauf hat man in dem Augenblick zu sehen, wo solche allgemeine Quadrat-Wurzeln in jeder besondern Untersuchung zum erstenmale entstehen; und dies geschieht leicht allemal dadurch, daß man statt des an sich schon zweideutigen Zeichens $\sqrt{a}$ lieber die beiden verschiedenen Zeichen $+\sqrt{a}$ und $-\sqrt{a}$ setzt, welche dann in $\pm\sqrt{a}$ zusammengefaßt werden können, und wo dann $\sqrt{a}$ als jedesmal einen und denselben seiner beiden Werthe vorstellend gedacht ist, wenn es auch noch in unsrer Willkühr bleibt, welchen von beiden wir statt $\sqrt{a}$ selbst noch setzen wollen **).

---

*) Diese letzte Bedingung ist gar wichtig. Alle Schwierigkeiten, die sich dem Anfänger und zuweilen auch dem Geübtern hinsichtlich des Operirens mit so genannten imaginären Wurzeln entgegenzustellen pflegen, rühren bloß daher, daß man diesen wichtigen Punkt der Zweideutigkeit dieser Wurzeln übersieht.

**) Bei den höhern Wurzeln kommen ähnliche Betrachtungen vor; dort ist es aber nicht so leicht, die Mehrdeutigkeit der Zeichen z. B.

§. 167. Erklärung.

Denkt man sich in einer allgemeinen Wurzel $\sqrt{a}$, wofür man $\pm\sqrt{a}$ setzen kann, statt a selbst eine negative Zahl z. B. $-b$ gesetzt, so nennt man die Wurzel $\sqrt{-b}$ oder $\pm\sqrt{-b}$ dann eine imaginäre Wurzel, in so ferne weder eine positive noch eine negative Zahl existirt, welche ihr gleich seyn könnte. — Die imaginäre Wurzel $\sqrt{-b}$ ist also ein Ausdruck für sich, dem die Eigenschaft zukommt, daß $(\sqrt{-b})^2 = -b$ ist.

Ueberhaupt nennt man die Null und die positiven und negativen Zahlen und alle besonderen Ausdrücke, welche der Null oder einer positiven oder einer negativen Zahl gleich sind, reelle Ausdrücke; alle andern Ausdrücke dagegen, welche nicht einer positiven oder einer negativen Zahl und auch nicht der Null gleich seyn können, imaginäre Ausdrücke.

Note. Es ist offenbar $\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1$, wenn wir nur unter $\sqrt{-1}$, so oft es vorkommt, jedesmal einen und denselben Werth der Wurzel uns denken, wie wir solches hier in diesem Elementarwerke ein für allemal thun. — Eben so ist $\sqrt{-3}.\sqrt{-4} = \pm\sqrt{12}$ (§. 66. n. 1.). Also ist das Produkt $\sqrt{-1}.\sqrt{-1}$ ein reeller Ausdruck, eben so wie das Produkt $\sqrt{-3}.\sqrt{-4}$; dagegen sind die einzelnen Faktoren dieser Produkte $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$, wenn man sie allein betrachtet, imaginäre Ausdrücke. — So ist ferner $\frac{1}{\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}$, weil $-\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = -(-1) = 1$ wieder ist; folglich ist $\frac{1}{\sqrt{-1}}$ (so wie $-\sqrt{-1}$ und $\sqrt{-1}$ selbst) ein imaginärer Ausdruck.

$\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[m]{a}$, auf vorzusetzende Faktoren (wie hier auf $+1$ und -1) zu werfen, so daß es wohl für höhere analytische Untersuchungen im Allgemeinen räthlicher seyn dürfte, um vor irrigen Resultaten sich zu sichern, die Vorsichtsregel eintreten zu lassen, welche in dem „Lehrbuche der Arithm. Algebr. Analysis" und wiederum in den „Aufsätzen aus dem Gebiete der höhern Mathematik 1823." dringend empfohlen werden mußte.

§. 168. Zusatz.

Jede imaginäre Wurzel z. B. $\sqrt{-b}$, kann man auf $\sqrt{-1}$ zurückführen. Es ist nehmlich

$$-b = b.(-1),$$

folglich $\sqrt{-b} = \sqrt{b}.\sqrt{-1}$ (§. 66. n. 1.), wo man aber $\sqrt{b}$ selbst als noch zweideutig ansehen muß.

Note. So ist z. B. $\sqrt{-3} = \sqrt{3}.\sqrt{-1}$; $\sqrt{-4} = \sqrt{4}.\sqrt{-1}$, dahero

$$\sqrt{-3}.\sqrt{-4} = \sqrt{3}.\sqrt{4}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = \sqrt{12}.(-1),$$

wo aber auch $\sqrt{12}$ als zweideutig anzusehen ist, so daß man besser dafür $\pm\sqrt{12}$ schreiben würde, um in jedem besonderen Falle noch entscheiden zu können, ob $+\sqrt{12}$ oder $-\sqrt{12}$ dafür zu nehmen seyn dürfte.

§. 169. Zusatz.

Da übrigens die imaginären Quadrat-Wurzeln nur besondere Fälle sind der allgemeinen, und da nach (§. 166.) für die allgemeinen Quadrat-Wurzeln alle Sätze des 3ten Kapitels gelten, welche das Operiren mit Wurzeln überhaupt lehren, so gelten dieselben Formeln nothwendig auch für die imaginären Wurzeln, so daß hierüber nichts neues mehr hinzuzufügen ist. — Nur die Zweideutigkeit der allgemeinen, und somit auch der imaginären Quadrat-Wurzel muß wohl beachtet werden, so daß man nicht einen bestimmten Werth setze, wenn vielleicht gerade der andere Werth zu setzen war, oder wenn man noch nicht wissen kann, welcher von beiden gerade der zu setzende ist.

Note. Hat man z. B. $\sqrt{-4}.\sqrt{-9}$, so kann man dafür setzen nach (§. 66. n. 1.) $\sqrt{(-4).(-9)}$ d. h. $\sqrt{36}$; — für diese $\sqrt{36}$ kann man nun $+6$ oder auch -6 setzen. Man setze aber so lange alle beide Werthe ± 6 dafür, und nicht einen von beiden, bis in dem besondern Falle, wo diese Wurzeln vorkommen, entschieden worden ist, welcher von beiden gerade zu setzen seyn dürfte. — Betrachtet man dieselbe Aufgabe auch anders, so nehmlich, daß man erst

$$\sqrt{-4} = \sqrt{(-1).4} = \sqrt{4}.\sqrt{-1}$$

und $$\sqrt{-9} = \sqrt{(-1).9} = \sqrt{9}.\sqrt{-1}$$ nimmt,

so kann man, will die Zweideutigkeit von $\sqrt{-4}$ nicht auf $\sqrt{-1}$

haften bleiben *), statt $\sqrt{4}$ doch nicht geradezu 2 setzen, sondern man muß ± 2 dafür nehmen. Dasselbe gilt in der andern Gleichung von $\sqrt{9}$, so daß man hat

$$\sqrt{-4} = \pm 2\sqrt{-1},$$
$$\sqrt{-9} = \pm 3\sqrt{-1};$$

und nun $\sqrt{-4}.\sqrt{-9} = \pm 6.(-1) = \mp 6,$

so daß doch wieder, gerade wie auf dem obigen Wege, das zweideutige Zeichen ± 6 als Resultat sich ergiebt, und in gewissen Fällen der Anwendung vielleicht $+6$, in andern dagegen vielleicht -6 dafür zu setzen seyn dürfte.

Anmerkung. Wir können uns nicht enthalten, hier noch einen Satz einzuschalten. Sind nehmlich m, n, p und q als reelle Zahlen angenommen, und die Gleichung gegeben

$$m + n\sqrt{-1} = p + q\sqrt{-1},$$

so muß nothwendig einzeln $m = p$ und $n = q$ seyn. — Denn wäre n nicht $= q$, so würde man doch auf beiden Seiten der gegebenen Gleichung $p + n\sqrt{-1}$ subtrahiren können, und erhalten $m - p = (q - n)\sqrt{-1}$; und wenn man hier durch $q - n$ (was nicht Null seyn soll) dividirt auf beiden Seiten, auch $\frac{m-p}{q-n} = \sqrt{-1}$, was nie möglich ist.

---

*) Es darf aber die Zweideutigkeit von $\sqrt{-4}$ nicht auf $\sqrt{-1}$ haften bleiben, damit eben in den für $\sqrt{-4}$ und $\sqrt{-9}$ zu setzenden Ausdrücken $\pm 2\sqrt{-1}$ und $\pm 3\sqrt{-1}$, das $\sqrt{-1}$ allemal als einen und denselben Werth vorstellend angesehen werden könne, eben weil wiederum nur unter dieser Voraussetzung $\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2$ d. h. $= -1$ seyn wird. (Vergl. sorgfältig §. 164. und besonders §. 165.).

Arithmetik.

Zehntes Kapitel.

Zweite Abtheilung
der praktischen Regeln und Uebungen in der Ziffern- und Buchstaben-Rechnung. (Siehe 6tes Kap.).

XXI.

Nach (§. 66.) wird aus einem Produkte oder aus einem Quotienten die mte Wurzel genommen, wenn man sie im erstern Falle aus jedem der Faktoren nimmt, im letztern Falle aus dem Dividenden sowohl wie aus dem Divisor. Und nach (§. 70.) wird die mte Wurzel aus einer Potenz genommen, wenn man den Exponenten der Potenz durch den Wurzel-Exponenten dividirt; überall absolute Wurzeln, wie sie (§. 64.) definirt sind, verstanden. Und für allgemeine Wurzeln, wie solche (§. 164.) angedeutet sind, kann man dieselben Sätze gelten lassen, wenn man nur die allgemeinen Quadrat-Wurzeln, um welche es uns hier allein vorzüglich zu thun ist, als zweideutig betrachtet und behandelt.

Hinsichtlich der Wurzeln können wir uns daher noch folgende Uebungs-Beispiele bemerken, Verwandlungen von Wurzel-Ausdrücken betreffend.

1) $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{a^1} = a^{\frac{1}{m}}$ (§. 71.) *);

2) $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$;

3) $\sqrt[m]{a^m} = a^{\frac{m}{m}} = a^1 = a$;

4) $\sqrt[m]{a^{mn}} = a^n$;

5) $\sqrt[m]{a^{-mn}} = a^{-n} = \frac{1}{a^n}$;

6) $\sqrt[m]{a^{mn}b^{-mp}} = a^n b^{-p} = \frac{b^p}{a^n}$;

7) $\sqrt[m]{a^{-mn}b^{mp}c^{-mq}d^{-mr}} = a^{-n}b^p c^{-q}d^{-r} = \frac{b^p}{a^n c^q d^r}$;

oder

8) $\sqrt[m]{\frac{b^{mp}}{a^{mn}c^{mq}d^{mr}}} = \frac{b^p}{a^n c^q d^r}$;

9) $\sqrt[3]{8a^{27}b^{-3}c^3d^{-6}} = 2a^9 b^{-1} c d^{-2} = \sqrt[3]{\frac{8a^{27}c^3}{b^3 d^6}} = \frac{2a^9 c}{bd^2}$;

10) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}a^{-3}b^6c^{-12}} = \frac{2}{3}a^{-1}b^2c^{-4} = \frac{2b^2}{3ac^4}$;

11) $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \pm\frac{3}{5}$; **)

12) $\sqrt{9a^2b^{4n}c^{-2p}} = \pm 3ab^{2n}c^{-p}$;

---

*) Jede Wurzel kann daher sogleich in eine gebrochene Potenz verwandelt und als solche behandelt werden, so daß, wenn man will, mit Wurzeln nie operirt zu werden braucht. Die Lehrsätze für das Operiren mit Wurzeln und für das Operiren mit Potenzen controlliren sich daher wechselseitig.

**) Die Gleichungen (1—10.) gelten nur, wie jede Gleichung, in dem Sinne, daß unter der Wurzel links, der rechts stehende Ausdruck gedacht wird, oder daß der Ausdruck rechts allemal einer der Werthe der Wurzel links sey. Die folgenden Gleichungen, in denen Quadrat-Wurzeln vorkommen, sind hier etwas vollständiger aufgenommen und lehren, daß jeder der beiden rechts stehenden Ausdrücke ein Werth der Quadrat-Wurzel links sey.

oder

13) $\sqrt{\frac{9a^2b^{4n}}{c^{2p}}}=\pm\frac{3ab^{2n}}{c^p}$;

14) $\sqrt{\frac{9}{25}a^{-2}b^4c^6d^{-2m+2}}=\pm\frac{3}{5}a^{-1}b^2c^3d^{-m+1}$;

15) $\sqrt{\frac{49a^{2m}b^{-2n-2}c^{4m-6}d^{-4}}{36f^2g^{-2}h^{-2p+4}}}=\pm\frac{7a^mb^{-n-1}c^{2m-3}d^{-2}}{6fg^{-1}h^{-p+2}}$

$=\sqrt{\frac{49a^{2m}c^{4m-6}g^2h^{2p-4}}{36b^{2n+2}d^4f^2}}=\pm\frac{7a^mc^{2m-3}ghp^{-2}}{6b^{n+1}d^2f}$;

16) $\sqrt[4]{\frac{2^8a^{-4}(a+b)^4(3+z)^{-8}}{81c^4d^{-12}}}=\pm\frac{2^2a^{-1}(a+b)(3+z)^{-2}}{3cd^{-3}}$

$=\sqrt[4]{\frac{2^8(a+b)^4d^{12}}{81a^4c^4(3+z)^8}}=\pm\frac{4(a+b)d^3}{3ac(3+z)^2}$;

17) $\sqrt[5]{\frac{a^{10}b^{15}c^{20}}{32d^5f^{30}g^{25}}}=\frac{a^2b^3c^4}{2df^6g^5}$;

18) $\sqrt{2^{16}\cdot a^{-4}c^2\times\frac{(a-b)^4}{9d^6}}=\pm2^8.a^{-2}c\times\frac{(a-b)^2}{3d^3}$

$=\pm\frac{2^8\cdot c(a-b)^2}{3a^2d^3}$;

19) $\sqrt{2^2.a^{-2}c^6\times\frac{9(a-b)^2}{25(a+b)^2}}=\pm2a^{-1}c^3\times\frac{3(a-b)}{5(a+b)}$

$=\pm\frac{6(a-b)c^3}{5a(a+b)}$;

u. s. w. f.

XXII.

Bei dem Multipliciren und Dividiren mit Wurzeln ist es zuweilen sehr bequem, Ausdrücke, die nicht Wurzeln sind, auf die Form einer Wurzel zu bringen (§. 65.), um die Sätze (§. 66.) bequem anwenden zu können.

So z. B. hat man

1) $\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{a^2}{a}}=\sqrt{a}$;

2) $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$;

3) $\frac{2a}{\sqrt[3]{3a}} = \frac{2\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{3a}} = \sqrt[3]{\frac{a^3}{a}} = \sqrt[3]{a^2}$;

4) $a\sqrt{a} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^3}$;

5) $a\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{a^m} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{a^m \cdot a} = \sqrt[m]{a^{m+1}}$;

6) $\frac{a}{\sqrt[m]{a}} = \frac{\sqrt[m]{a^m}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\frac{a^m}{a}} = \sqrt[m]{a^{m-1}}$;

7) $\frac{1}{3}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{9}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{\frac{2}{9}}$;

8) $\frac{3}{4}\sqrt{5} = \sqrt{\frac{3^2}{4^2}} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{\frac{45}{16}}$;

9) $\frac{2}{5}\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{(\frac{2}{5})^3} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{2^4}{5^3}} = \sqrt[3]{\frac{16}{125}}$;

10) $a\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m \cdot b}$;

11) $\frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2}} = \sqrt{\frac{a}{a^2}} = \sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$;

12) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^3}} = \sqrt[3]{\frac{a^2}{a^3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$;

13) $\frac{\sqrt{a}}{3a\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{9a^2} \cdot \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{9ab}} = \frac{1}{3\sqrt{ab}}$; u. s. w. f.

XXIII.

Fortsetzung der Uebungs-Beispiele, Rechnung mit Wurzeln betreffend. *)

1) $p\sqrt[n]{a} - q\sqrt[n]{a} = (p-q)\sqrt[n]{a}$;

2) $p\sqrt[n]{a} - q\sqrt[n]{a} + r\sqrt[n]{a} = (p-q+r) \cdot \sqrt[n]{a}$;

---

*) In den Beispielen (1—10.) tritt gar kein der Wurzel eigenthümlicher Lehrsatz in Anwendung, sondern nur die Formel (§. 45. Anmerkung.). Die Formel (11.) und die folgenden erfordern dagegen die Sätze (§. 66.). Endlich darf man nicht übersehen, daß die Verwandlungen (1—10.) nur unter der Voraussetzung statt finden, daß die Wurzeln alle einen und denselben ihrer Werthe vorstellen, so oft sie vorkommen in demselben Ausdruck.

3) $2p\sqrt{a}-3q\sqrt{a}+4r\sqrt{a}-5q\sqrt{a}=(2p-3q+4r-5q)\cdot\sqrt{a}$;

4) $2\sqrt[3]{6}-5\sqrt[3]{6}+7\sqrt[3]{6}=4\sqrt[3]{6}$;

5) $-16\sqrt{3}+9\sqrt{3}+4\sqrt{3}-\sqrt{3}=-4\sqrt{3}$;

6) $\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}+7\sqrt{2}+3\sqrt{2}=\frac{21}{2}\sqrt{2}$;

7) $5\sqrt[3]{\frac{1}{2}}-2p\sqrt[3]{\frac{1}{2}}+3q\sqrt[3]{\frac{1}{2}}+p\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=(5-p+3q)\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$;

8) $2\sqrt[3]{\frac{3}{4}}-b\sqrt[3]{\frac{3}{4}}-\frac{2a}{b}\sqrt[3]{\frac{3}{4}}-\frac{3b}{4a}\sqrt[3]{\frac{3}{4}}=\left(2-b-\frac{2a}{b}-\frac{3b}{4a}\right)\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$;

9) $4\sqrt[6]{10}-2\sqrt[5]{8}-2\sqrt[5]{8}+\frac{3}{4}\sqrt[6]{10}+\frac{7}{3}\sqrt[5]{8}=\frac{19}{4}\sqrt[6]{10}-\frac{5}{3}\sqrt[5]{8}$;

10) $2\sqrt[6]{10}-5\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5}-\frac{7}{2}\sqrt[6]{10}+\sqrt{2}=-\frac{3}{2}\sqrt[6]{10}-4\sqrt[3]{5}+\sqrt{2}$;

11) $\sqrt[3]{(a^3b-a^3c)}=\sqrt[3]{a^3(b-c)}=a\sqrt[3]{b-c}$;

12) $\sqrt{(4ab^2-9b^3)}=\sqrt{(4a-9b)b^2}=b\sqrt{4a-9b}$; *)

13) $\sqrt[4]{\left(\frac{a^9}{b^3c^5}+\frac{a^7}{b^3c^3}\right)}=\sqrt[4]{\frac{a^8}{b^4c^4}\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\right)}=\frac{a^2}{bc}\sqrt[4]{\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}}$

$=\frac{a^2}{bc}\sqrt[4]{\frac{a^2b+bc^2}{ac}}=\frac{a^2}{bc}\sqrt[4]{\frac{b}{ac}(a^2+c^2)}$;

14) $\sqrt{\left(\frac{8a^3b^5}{c^3}-\frac{16a^5b^4}{5c^5}\right)}=\sqrt{\frac{4a^2b^4}{c^4}\left(2abc-\frac{4a^3}{5c}\right)}$

$=\frac{2ab^2}{c^2}\sqrt{\left(2abc-\frac{4a^3}{5c}\right)}=\frac{4a^2b^2}{c^2}\sqrt{\frac{bc}{2a}-\frac{a}{5c}}$

$=\frac{4a^2b^2}{c^2}\sqrt{\frac{5bc^2-2a^2}{10ac}}$;

15) $\sqrt[3]{\left(\frac{8a^4b^5}{c^2}-\frac{16a^2b^7}{c^3}-\frac{24a^3b^6}{5c^4}\right)}=\frac{2ab^2}{c}\sqrt[3]{\left(\frac{ac}{b}-\frac{2b}{a}-3\cdot\frac{1}{5c}\right)}$;

16) $\sqrt{24}=\sqrt{4\cdot6}=2\sqrt{6}$;

17) $\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{6}{9}}=\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{1}{3}\sqrt{6}$;

---

*) In dieser und in den folgenden Aufgaben kommt es darauf an, den Radikanden (Ausdruck unter dem Wurzelzeichen) in ein Produkt oder in einen Quotienten zu verwandeln, so daß die Wurzel aus dem einen Faktor (oder aus dem Dividenden oder Divisor) bequem verwandelt werden kann, und dann wie in den vorhergehenden Aufgaben die Sätze (§. 66.) eintreten zu lassen.

18) $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$;

19) $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;

20) $\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{16 \cdot 2} = 2\sqrt[4]{2}$;

21) $\sqrt[4]{\frac{162}{1875}} = \sqrt[4]{\frac{81 \cdot 2}{625 \cdot 3}} = \frac{3}{5}\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$;

22) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 3^2}{3^3}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{18}$;

23) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{ab^{n-1}}{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b} = \frac{1}{b}\sqrt[n]{ab^{n-1}}$;

24) $\sqrt[3]{\frac{2}{9}} = \sqrt[3]{\frac{6}{27}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{6}$;

25) $\frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a^n}{b}} = \frac{1}{b}\sqrt[n]{a^n b^{n-1}}$ *);

26) $(a+b)\sqrt{3c} = \sqrt{(a+b)^2 3c} = \sqrt{3a^2c+6abc+3b^2c}$;

27) $(a-b)\sqrt{2c} = \sqrt{2a^2c-4abc+2b^2c}$;

28) $(a-2b)\sqrt[3]{5c} = \sqrt[3]{5c(a-2b)^3} = \sqrt[3]{5a^3c-30a^2bc+60ab^2c-40b^3c}$;

29) $\sqrt[6]{25} = \sqrt[3]{\sqrt{25}} = \sqrt[3]{\sqrt{25}} = \sqrt[3]{5}$ **);

30) $\sqrt[6]{5^4} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$;

31) $\sqrt[3]{(2\sqrt{7})} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{7} = \sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{7} = \sqrt[6]{28}$;

32) $\sqrt[n]{(a\sqrt[p]{b})} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[np]{\sqrt[p]{b}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[np]{b} = \sqrt[np]{a^p} \cdot \sqrt[np]{b}$

$= \sqrt[np]{a^p \cdot b}$;

---

*) Die Aufgaben (11 — 24) können alle aus demselben Gesichtspunkte genommen werden, wie diese 25te, wenn man in ihnen die Ausdrücke rechts als die gegebenen ansieht. Sonst gehören sie zu (XXII.).

**) Diese und die folgenden Aufgaben erfordern die Anwendung der Formeln (§. 68.).

33) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}$ *);

34) $\alpha\sqrt[n]{a} \times \beta\sqrt[n]{b} = \alpha\beta . \sqrt[n]{ab}$;

35) $2\sqrt[6]{3} \times \sqrt[6]{72} = 2\sqrt[6]{3.72} = 2\sqrt[6]{6^3} = 2\sqrt{6}$;

36) $\alpha\sqrt{\frac{a}{c}} \times \beta\sqrt{ac} = \pm\alpha\beta a$;

37) $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n b^m}$;

38) $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[p]{c} = \sqrt[mnp]{a^{np} b^{mp} c^{mn}}$;

39) $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{2^3 5^2} = \sqrt[6]{200}$;

40) $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{5} . \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{600}$;

41) $4\sqrt{3} \times 5\sqrt{\frac{2}{3}} \times 3\sqrt{2} = 60\sqrt{16} = \pm 240$;

42) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{2^4} \times \sqrt[12]{3^6} \times \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{2^4 . 3^6 . 5^3} = \sqrt[12]{1458000}$;

43) $\sqrt{3} \times 2\sqrt[3]{4} \times 5\sqrt[6]{2} \times 3\sqrt[8]{5} = 30\sqrt[24]{3^{12} . 4^8 . 2^4 . 5^3}$

$= 30\sqrt[24]{69657034752000}$;

44) $\sqrt[5]{4} \times \sqrt[10]{3} \times \sqrt[15]{6} = \sqrt[30]{4^6 . 3^3 . 6^2} = \sqrt[30]{3981312}$;

45) $\sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt[4]{\frac{3}{4}} \times \sqrt[6]{\frac{1}{2}} \times \sqrt[8]{2} = \sqrt[24]{(\frac{2}{3})^{12} . (\frac{3}{4})^6 . (\frac{1}{2})^4 . 2^3}$

$= \sqrt[24]{\frac{2^{12} . 3^6 . 2^3}{3^{12} . 4^6 . 2^4}} = \sqrt[24]{\frac{1}{2 . 3^6}} = \sqrt[24]{\frac{1}{1458}} = \frac{1}{\sqrt[24]{1458}}$;

46) $\alpha\sqrt[n]{a} \times \beta\sqrt[p]{b} \times \sqrt[np]{c} = \alpha\beta\sqrt[np]{a^p . b^n . c}$;

47) $\sqrt[12]{\frac{a}{bc}} \times \sqrt[8]{\frac{a^m}{b}} = \sqrt[24]{\frac{a^{2+3m}}{b^5 c^2}}$;

---

*) Zu diesen und den folgenden Verwandlungen gebraucht man die Sätze (§. §. 66. 68. 69.) auch wenn man will (§. 70.), in so ferne das Arbeiten mit Wurzeln ein Arbeiten mit Potenzen werden soll.

48) $\frac{ac}{b^3d^5}\sqrt[3]{\frac{bcd}{m}}\times\sqrt[6]{\frac{b^{10}.d^7.m}{a^2c^5}}=\frac{ac}{b^3d^5}\sqrt[6]{\frac{b^{12}.c^2.d^9.m}{m^2a^2c^5}}$

$=\frac{a}{bd^4}\sqrt[6]{\frac{c^3d^3}{ma^2}}=\frac{a}{bd^3}\sqrt[6]{\frac{c^3}{ma^2d^3}}=\frac{1}{bd^3}\sqrt[6]{\frac{a^4c^3}{md^3}}$;

49) $(\sqrt{3}+3\sqrt{5}-5\sqrt{2})\times 3\sqrt{5}=3\sqrt{15}+45-15\sqrt{10}$ *);

50) $(2\sqrt{5}-3\sqrt[3]{4}+\sqrt{3})\times 2\sqrt[3]{2}=4\sqrt[6]{5^3.2^2}-6\sqrt[3]{8}+2\sqrt[6]{3^3.2^2}$

$=4\sqrt[6]{500}-12+2\sqrt[6]{108}$;

51) $(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})=9-5=4$;

52) $(3+2\sqrt{5})(3-\sqrt{5})=9+3\sqrt{5}-10=-1+3\sqrt{5}$;

53) $(5+2\sqrt{3})(8-4\sqrt{3})=16-4\sqrt{3}$;

54) $(1+8\sqrt{7})(3-5\sqrt{7})=19\sqrt{7}-277$;

55) $(11-2\sqrt{5})(9-3\sqrt{5})=129-51\sqrt{5}$;

56) $(-1+\sqrt{3})(-1-\sqrt{3})=-2$;

57) $(-1+2\sqrt{3})(-1-5\sqrt{3})=-29+3\sqrt{3}$;

58) $(7-3\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})=4$;

59) $(9+7\sqrt{11})(8-3\sqrt{11})=-159+29\sqrt{11}$;

60) $(8-3\sqrt{7})(11-2\sqrt{7})=130-49\sqrt{7}$;

61) $(\sqrt{3}+2\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2})=2+3\sqrt{6}$;

62) $(5\sqrt{11}+2\sqrt{5})(7\sqrt{11}-5\sqrt{5})=335-11\sqrt{55}$;

63) $(9\sqrt{6}-2\sqrt{3})(8\sqrt{6}-3\sqrt{3})=450-43\sqrt{18}$;

64) $(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\sqrt{2})(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\sqrt{2})=\frac{17}{6}-\frac{59}{72}\sqrt{2}$;

65) $(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\sqrt{5})(\frac{9}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{5})=\frac{81}{24}-\frac{25}{48}\sqrt{5}$;

66) $(2\sqrt{7}-\frac{3\sqrt{6}}{2})(\frac{3\sqrt{7}}{2}-\sqrt{6})=30-\frac{17}{4}\sqrt{42}$;

67) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2=(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})=5-2\sqrt{6}$;

68) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^3=(5-2\sqrt{6})(\sqrt{2}-\sqrt{3})=11\sqrt{2}-9\sqrt{3}$;

69) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{5})=\sqrt{21}-\sqrt{15}-\sqrt{14}+\sqrt{10}$;

70) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{7}+\sqrt{2})=\sqrt{21}-\sqrt{14}+\sqrt{6}-2$;

71) $(3-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{5})=12-8\sqrt{3}+6\sqrt{5}-4\sqrt{15}$;

72) $(5\sqrt{3}-7\sqrt{6})(2\sqrt{8}-3)=10\sqrt{24}-14\sqrt{48}-15\sqrt{3}+21\sqrt{6}$

$=41\sqrt{6}-71\sqrt{3}$;

---

*) Diese und alle die folgenden Nummern gelten nur unter der Voraussetzung, die hier immer gemacht wird, daß jede Wurzel z. B. $\sqrt{5}$, wenn sie mehremale vorkommt, allemal einen und denselben ihrer Werthe vorstelle, und zwar jedesmal den absoluten.

73) $(2\sqrt{\frac{1}{2}}-3\sqrt{\frac{1}{5}})(5\sqrt{\frac{3}{4}}+3\sqrt{\frac{2}{3}})=10\sqrt{\frac{3}{8}}-15\sqrt{\frac{3}{20}}+6\sqrt{\frac{1}{3}}-9\sqrt{\frac{2}{15}}$
$=(\sqrt{2}-\frac{3}{5}\sqrt{5})(\frac{5}{2}\sqrt{3}+\sqrt{6})=5\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{15}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}+6\sqrt{\frac{1}{5}}-9\sqrt{\frac{2}{15}}$
$=\frac{5}{2}\sqrt{6}-\frac{3}{2}\sqrt{15}+2\sqrt{3}-\frac{3}{5}\sqrt{30}$;

74) $(2\sqrt{6}-3\sqrt{5})(4\sqrt{3}-\sqrt{10})=8\sqrt{18}-12\sqrt{15}-2\sqrt{60}+3\sqrt{50}$
$=39\sqrt{2}-16\sqrt{15}$;

75) $(\sqrt{12}-2\sqrt{7})(2+\sqrt{21})=2\sqrt{12}-4\sqrt{7}+\sqrt{12.21}-2\sqrt{7.21}$
$=-10\sqrt{3}+2\sqrt{7}$;

76) $(3\sqrt{5}+2\sqrt{6}-2)(2\sqrt{5}+18\sqrt{6})=246+58\sqrt{30}-4\sqrt{5}-36\sqrt{6}$;

77) $(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2})(\sqrt{72}-5\sqrt{20}-2\sqrt{2})$
$=(-3\sqrt{2}+3\sqrt{5})(4\sqrt{2}-10\sqrt{5})=-174+42\sqrt{10}$;

78) $(\sqrt[3]{5}-2\sqrt[3]{6})(3\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{36})=12+3\sqrt[3]{20}-6\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{180}$;

79) $(5\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{16})(2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{4})=44-4\sqrt[3]{32}-15\sqrt[3]{16}$;

80) $(2\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})(2+\sqrt[3]{9})=4\sqrt{3}+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{18}+6\sqrt[6]{3}$;

81) $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-b$;

82) $(\alpha\sqrt{a}-\beta\sqrt{b})(\alpha\sqrt{a}+\beta\sqrt{b})=\alpha^2a-\beta^2b$;

83) $(\alpha\sqrt{a}-\beta\sqrt{b})(\gamma\sqrt{a}+\delta\sqrt{b})=\alpha\gamma a-\beta\delta b+(\alpha\delta-\beta\gamma)\sqrt{ab}$;

84) $(a+\sqrt{x})(b-\sqrt{y})=ab+b\sqrt{x}-a\sqrt{y}-\sqrt{xy}$;

85) $\left(\sqrt{\frac{ad^2}{c^3}}+\sqrt{\frac{a^2}{b}}\right).(\sqrt{ac}+\sqrt{b^3})=\left(\frac{d}{c}\sqrt{\frac{a}{c}}+a\sqrt{\frac{1}{b}}\right)$
$\times(\sqrt{ac}+b\sqrt{b})=\frac{d}{c}.a+a\sqrt{\frac{ac}{b}}+\frac{bd}{c}\sqrt{\frac{ab}{c}}+ab=ab+\frac{ad}{c}$
$+\left(\frac{ac}{b}+\frac{bd}{c}\right)\sqrt{\frac{ab}{c}}=ab+\frac{ad}{c}+\left(a+\frac{b^2d}{c^2}\right)\sqrt{\frac{ac}{b}}$;

Es ist nehmlich $\frac{ac}{b}=\frac{1}{b^2}.abc=\frac{a^2c^2}{abc}=a^2c^2.\frac{1}{abc}=\frac{a^2c^2}{b^2}.\frac{b}{ac}$,

also

86) $\sqrt{\frac{ac}{b}}=\frac{1}{b}\sqrt{abc}=\frac{c}{b}\sqrt{\frac{ab}{c}}=\frac{ac}{b}\sqrt{\frac{b}{ac}}=ac\sqrt{\frac{1}{abc}}$;

87) $\left(\sqrt{\frac{ac^2}{a+b}}+\sqrt{\frac{1}{b}}\right)\left(\frac{c}{d}\sqrt{(a+b)a}-\sqrt{.\frac{b^5}{c^2}}\right)$
$=\left(c.\sqrt{\frac{a}{a+b}}+\sqrt{\frac{1}{b}}\right).\left(\frac{c(a+b)}{d}\sqrt{\frac{a}{a+b}}-\frac{b^3}{c}\sqrt{\frac{1}{b}}\right)$
$=\left(\frac{c}{a+b}\sqrt{(a+b)a}+\frac{1}{b}\sqrt{b}\right).\left(\frac{c}{d}\sqrt{(a+b)a}-\frac{b^2}{c}\sqrt{b}\right)$
$=\frac{ac^2}{d}-\frac{b^2}{c}+\left(\frac{c}{bd}-\frac{b^2}{a+b}\right)\sqrt{(a+b)ab}$;

88) $(\sqrt[3]{a}+c\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a}-c\sqrt[3]{b})=a-c^2\sqrt[3]{b^2}$;

89) $(2\sqrt[3]{a}+3c\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a}+4\sqrt[3]{b})=2a+12c\sqrt[3]{b^2}+(3c+8)\sqrt[6]{a^3b^2}$;

90) $(\alpha\sqrt[4]{a}+\beta\sqrt[4]{b})(\gamma\sqrt[4]{a}-\delta\sqrt[4]{b})=\alpha\gamma\sqrt{a}-\beta\delta\sqrt{b}+(\beta\gamma-\alpha\delta)\sqrt[4]{ab}$;

91) $(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c})^2=(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c})(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c})$

$=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-2\sqrt[4]{ab}+2\sqrt[4]{ac}-2\sqrt[4]{bc}$;

92) $\sqrt{3+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{2}}=\sqrt{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}=\sqrt{7}$;

93) $\sqrt{3+5\sqrt{2}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{2}}=\sqrt{-5+19\sqrt{2}}$;

94) $\sqrt{a+\sqrt{b}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{a^2-b}$;

95) $\sqrt{a+c\sqrt{b}}\cdot\sqrt{d-f\sqrt{b}}=\sqrt{ad-bcf+(cd-af)\sqrt{b}}$;

96) $\sqrt[m]{a+c\sqrt{b}}\cdot\sqrt[m]{a-c\sqrt{b}}=\sqrt[m]{a^2-bc^2}$;

97) $\sqrt[m]{a-c\sqrt{b}}\cdot\sqrt[m]{d+f\sqrt{b}}=\sqrt[m]{ad-bcf+(af-cd)\sqrt{b}}$;

98) $\sqrt{a-c\sqrt{b}}\cdot\sqrt[3]{a+c\sqrt{b}}=\sqrt[6]{(a-c\sqrt{b})^3}\cdot\sqrt[6]{(a+c\sqrt{b})^2}$

$=\sqrt[6]{(a-c\sqrt{b})^3\cdot(a+c\sqrt{b})^2}=\sqrt[6]{(a^2-bc^2)^2(a-c\sqrt{b})}$

$=\sqrt[3]{a^2-bc^2}\cdot\sqrt[6]{a-c\sqrt{b}}$;

99) $\sqrt[4]{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{6}}=\sqrt[4]{147+60\sqrt{6}}$;

100) $3\sqrt[4]{2+4\sqrt[3]{3}}\times 4\sqrt[4]{6+2\sqrt[3]{9}}=12\sqrt[4]{36+4\sqrt[3]{9}+24\sqrt[3]{3}}$;

101) $5\sqrt{2}\times 3\sqrt{4+6\sqrt{2}}=15\sqrt{8+12\sqrt{2}}=30\sqrt{2+3\sqrt{2}}$;

102) $\alpha\sqrt[m]{a}:\beta\sqrt[m]{b}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$;

103) $a:\sqrt{b}=\sqrt{a^2}:\sqrt{b}=\sqrt{\frac{a^2}{b}}$;

104) $a:\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{\frac{a^m}{b}}$ und $(\sqrt[m]{a}):b=\sqrt[m]{\frac{a}{b^m}}$;

105) $a:\sqrt{a}=\sqrt{a^2}:\sqrt{a}=\sqrt{a}$;

106) $a : \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^3} : \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^2}$;

107) $2ab^2c^3 : 4\sqrt[3]{a^3bc^5d} = 2ab^2c^3 : 4ac\sqrt[3]{bc^2d} = \frac{1}{2}b^2c^2 : \sqrt[3]{bc^2d}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b^5c^4}{d}};$$

108) $\sqrt[5]{ab^{n-1}c^2} : \sqrt[5]{\frac{a^3b^2}{c^{n-1}d}} = \sqrt[5]{\frac{b^{n-3}c^{n+1}d}{a^2}}$;

109) $\sqrt[n]{\frac{f^3g^2}{dx^5}} : \sqrt[n]{\frac{fg}{dx}} = \sqrt[n]{\frac{f^2g}{x^4}}$;

110) $\sqrt{abc} : \sqrt[3]{a^2bc} = \sqrt[6]{a^3b^3c^3} : \sqrt[6]{a^4b^2c^2} = \sqrt[6]{\frac{bc}{a}}$;

111) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}} : \sqrt[4]{\frac{a}{b}} = \sqrt[4]{\frac{a}{b}} : \sqrt[4]{\frac{a^2}{b^2}} = \sqrt[4]{\frac{b}{a}}$;

112) $4\sqrt[3]{12} : 2\sqrt{3} = 4\sqrt[6]{12^2} : 2\sqrt[6]{3^3} = 2\sqrt[6]{\frac{12^2}{3^3}} = 2\sqrt[6]{\frac{16}{9}}$;

113) $\sqrt{8} : 2 = \sqrt{8} : \sqrt{4} = \sqrt{2}$;

114) $\sqrt{8} : 3 = 2\sqrt{2} : 3 = \frac{2}{3}\sqrt{2}$;

115) $\sqrt[5]{64} : 2 = \sqrt[5]{64} : \sqrt[5]{2^5} = \sqrt[5]{2}$;

116) $\sqrt[2n]{\frac{a^mb}{c^2d}} : \sqrt[3n]{\frac{a^{m-1}c^3}{d^5}} = \sqrt[6n]{\frac{a^{m+2}b^3d^7}{c^{12}}}$;

117) $c\sqrt{a^2-x^2} : d\sqrt{a+x} = \frac{c}{d}\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a+x}} = \frac{c}{d}\sqrt{a-x}$;

118) $\sqrt{ab^2-b^2c} : \sqrt{a-c} = b\sqrt{a-c} : \sqrt{a-c} = b$;

119) $\sqrt{a^2-x^2} : (a-x) = \sqrt{a^2-x^2} : \sqrt{(a-x)^2} = \sqrt{\frac{a^2-x^2}{(a-x)^2}}$

$$= \sqrt{\frac{a+x}{a-x}};$$

120) $(\sqrt{72}+\sqrt{32}-4) : \sqrt{8} = \sqrt{9}+\sqrt{4}-\sqrt{2} = 5-\sqrt{2}$;
oder auch $= (6\sqrt{2}+4\sqrt{2}-4) : 2\sqrt{2} = (10\sqrt{2}-4) : 2\sqrt{2}$

121) $(3\sqrt{15}-\sqrt{20}+\sqrt{10}-7) : 2\sqrt{5} = \frac{3}{2}\sqrt{3}-1+\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{7}{2}\sqrt{\frac{9}{5}}$;

122) $(2\sqrt{32}+3\sqrt{2}+4):4\sqrt{8}=\frac{1}{2}\sqrt{4}+\frac{3}{4}\sqrt{\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$
$=(11\sqrt{2}+4):8\sqrt{2}=\frac{11}{8}+\frac{1}{2}\sqrt{2}$;

123) $(6+2\sqrt{3}-\sqrt[3]{18}):\frac{1}{2}\sqrt{6}=2\sqrt{6}+2\sqrt{2}-2\sqrt[6]{\frac{1}{2}}=2\sqrt{6}+2\sqrt{2}-\sqrt[6]{96}$;

124) $\sqrt{ab+\sqrt{af}}:\sqrt{a}=\sqrt{b+\sqrt{\frac{f}{a}}}$.

XXIV.

Es ist, wie man weis:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2;$$

also auch $(A+\sqrt{B})(A-\sqrt{B})=A^2-B;$

und $(\sqrt{A}+\sqrt{B})(\sqrt{A}-\sqrt{B})=A-B.$

Ist daher der Nenner (Divisor) eines Bruches (Quotienten) $A\pm\sqrt{B}$, so multiplicire man Zähler und Nenner des Bruches mit $A\mp\sqrt{B}$, und der neue Nenner wird dann A^2-B werden, d. h. keine Wurzel mehr enthalten. Und ist der Nenner eines Bruches $\sqrt{A}\pm\sqrt{B}$, so multiplicire man Zähler und Nenner mit $\sqrt{A}\mp\sqrt{B}$, und der neue Nenner wird $A-B$ werden, also ebenfalls keine Wurzel mehr enthalten. Und ist der Nenner $A\pm C\sqrt{B}$ oder $D\sqrt{A}\pm C\sqrt{B}$, so multiplicire man Zähler und Nenner im ersten Falle mit $A\mp C\sqrt{B}$ und im andern Falle mit $D\sqrt{A}\mp C\sqrt{B}$ und jedesmal wird der neue Nenner keine Wurzel mehr enthalten. — Und ist der Nenner $\sqrt{A}+\sqrt{B}\pm\sqrt{C}$, so kann man es versuchen und Zähler und Nenner mit $\sqrt{A}+\sqrt{B}\mp\sqrt{C}$ multipliciren, und man wird zum neuen Nenner

$(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2-C$ d. h. $(A+B-C)+2\sqrt{AB}$

erhalten. Multiplicirt man nachgehends nochmal Zähler und Nenner mit $(A+B-C)-2\sqrt{AB}$, so erhält man zum neuen Nenner $(A+B-C)^2-4AB$, welcher keine Wurzel mehr enthält. — U. s. w. f.

Diesen Andeutungen zu Folge sind nachstehende Verwandlungen zu bilden:

1) $1:(\sqrt{3}+2)=2-\sqrt{3}$;

2) $3:(1+\sqrt{2})=3\sqrt{2}-3$;

3) $12:(5-\sqrt{21})=3(5+\sqrt{21})=15+3\sqrt{21}$;

4) $7:(\sqrt{8}-2)=\frac{7(\sqrt{8}+2)}{4}=\frac{7}{2}(\sqrt{2}+1)=\frac{7}{2}\sqrt{2}+\frac{7}{2}$;

5) $\sqrt{3}:(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})=\frac{2\sqrt{15}+3\sqrt{6}}{2}=\sqrt{15}+\frac{3}{2}\sqrt{6}$;

6) $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{5}{6}}:(\sqrt{\frac{1}{2}}-2)=-\frac{\sqrt{15}+2\sqrt{30}}{28}$;

7) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}:(\sqrt{2}+3\sqrt{\frac{1}{2}})=\frac{1}{10}$, auch $=\frac{1}{4}\sqrt{2}:\frac{5}{2}\sqrt{2}$;

8) $(1+\sqrt{2}):(2-\sqrt{2})=2+\frac{3}{2}\sqrt{2}$;

9) $(5-7\sqrt{3}):(1+\sqrt{3})=6\sqrt{3}-13$;

10) $(\sqrt{3}+\sqrt{2}):(\sqrt{3}-\sqrt{2})=5+2\sqrt{6}$;

11) $(3\sqrt{5}-2\sqrt{2}):(2\sqrt{5}-\sqrt{18})=9+\frac{5}{2}\sqrt{10}$;

12) $(6\sqrt{7}-3\sqrt{3}):(\sqrt{5}-\sqrt{2})=6\sqrt{35}+6\sqrt{14}-3\sqrt{15}-3\sqrt{6}$;

13) $1:(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})=\frac{\sqrt{30}}{12}+\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{6}$;

14) $7:(\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{3})=\frac{7(\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{5-2\sqrt{6}}$

$=7(5+2\sqrt{6})(\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3})=\frac{7(\sqrt{10}-\sqrt{2}+\sqrt{3})}{9-4\sqrt{5}}$

$=7(9+4\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2}+\sqrt{3})=35\sqrt{10}+77\sqrt{2}+63\sqrt{3}+28\sqrt{15}$;

15) $\sqrt{2}:(1+2\sqrt{2}-\sqrt{5})=\frac{3}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{4}\sqrt{10}-\frac{1}{2}$;

16) $(3+4\sqrt{3}):(\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{5})=\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{5}$;

17) $(156+12\sqrt{11}):(6+14\sqrt{2}-2\sqrt{11})=7\sqrt{2}+\sqrt{11}-3$;

18) $(2\sqrt{6}+3\sqrt{10}):(3\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})=\frac{7}{10}\sqrt{30}+\frac{27}{10}\sqrt{5}-\frac{3}{2}\sqrt{3}-3\sqrt{2}$;

19) $\sqrt{a}:(b+\sqrt{c})=\frac{b\sqrt{a}-\sqrt{ac}}{b^2-c}$;

20) $\sqrt{a}:(\sqrt{b}+\sqrt{c})=\frac{\sqrt{ab}-\sqrt{ac}}{b-c}$;

21) $(c\sqrt{a}+d\sqrt{b}):(f\sqrt{h}+g\sqrt{l})=\frac{cf\sqrt{ah}+df\sqrt{bh}-cg\sqrt{al}-dg\sqrt{bl}}{f^2h-g^2l}$;

22) $[(f^2-hg^2-m)\sqrt{m}-2gm\sqrt{h}]:(f+g\sqrt{h}+\sqrt{m})=f\sqrt{m}-g\sqrt{hm}-m$;

23) $1:\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}=\sqrt[n]{\frac{1}{a+\sqrt{b}}}=\sqrt[n]{\frac{a-\sqrt{b}}{a^2-b}}$;

24) $\sqrt[n]{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\sqrt[n]{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\sqrt[n]{\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a-b}}$;

25) $1:(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})=(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}):(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

$$=\frac{(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}=\frac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}-\sqrt[4]{b^3}}{a-b};$$

26) $(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}):(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})=\frac{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})^2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

$$=\frac{a+b+2\sqrt{ab}+2\sqrt[4]{a^3b}+2\sqrt[4]{ab^3}}{a-b}.$$

XXV.

Für die Verwandlung der Wurzeln in Bruch-Potenzen und für das Operiren mit letztern bemerke man noch folgende Uebungs-Beispiele:

1) $\frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}=\frac{1}{a^{n:m}}=a^{-\frac{n}{m}}$;

2) $\sqrt[m]{a^nb^pc^q}=a^{\frac{n}{m}}.b^{\frac{p}{m}}.c^{\frac{q}{m}}=(a^nb^pc^q)^{\frac{1}{m}}$;

3) $\sqrt[m]{\frac{a^nb^p}{c^qd^rf^s}}=a^{\frac{n}{m}}\,b^{\frac{p}{m}}\,c^{-\frac{q}{m}}\,d^{-\frac{r}{m}}\,f^{-\frac{s}{m}}$;

4) $c\sqrt[4]{a^3}+\frac{d}{\sqrt{a^2}}=ca^{\frac{3}{4}}+da^{-\frac{2}{4}}$;

5) $\sqrt[5]{a^2bc}=a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{1}{5}}c^{\frac{1}{5}}=(a^2bc)^{\frac{1}{5}}$;

6) $\sqrt[6]{\frac{a^5b^7}{c^{12}}}=a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{7}{6}}c^{-2}$;

7) $\frac{\sqrt{c+d}}{\sqrt[3]{c^5}}=(c+d)^{\frac{1}{2}}.c^{-\frac{5}{3}}$;

8) $\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt[3]{a}\sqrt{a+x}}=\frac{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}(a+x)^{\frac{1}{3}}}$;

9) $\frac{\sqrt[3]{(a+b)^7c^4}}{\sqrt[5]{f^2}\times\sqrt[6]{g^2}}=(a+b)^{\frac{7}{3}}c^{\frac{4}{3}}f^{-\frac{2}{5}}g^{-\frac{1}{3}}=\frac{(a+b)^{\frac{7}{3}}c^{\frac{4}{3}}}{f^{\frac{2}{5}}g^{\frac{1}{3}}}$;

10) $\sqrt[n]{a}.\sqrt[m]{b}=a^{\frac{1}{n}}.b^{\frac{1}{m}}=(a^m b^n)^{\frac{1}{mn}}=\sqrt[mn]{a^m b^n}$;

11) $\sqrt[m]{a^n}.\sqrt[q]{a^p}=a^{\frac{n}{m}}.a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{nq+mp}{mq}}=\sqrt[mq]{a^{nq+mp}}$;

12) $a^{-\frac{m}{n}}.a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{np-mq}{nq}}=\sqrt[nq]{a^{np-mq}}$;

13) $a^{-\frac{p}{q}}.a^{-\frac{m}{n}}=a^{-\frac{mq+np}{nq}}=\frac{1}{\sqrt[nq]{a^{mq+np}}}$;

14) $a^{\frac{3}{4}}.a^{\frac{5}{3}}=a^{\frac{29}{12}}=a^2.a^{\frac{5}{12}}=a^2\sqrt[12]{a^5}$;

15) $a^{-\frac{1}{2}}.a^{\frac{7}{4}}=a^{\frac{5}{4}}=a\sqrt[4]{a}$;

16) $a^{-\frac{3}{4}}.a^{-\frac{7}{8}}=a^{-\frac{13}{8}}=\frac{1}{a\sqrt[8]{a^5}}$;

17) $a^{-\frac{3}{4}}b^{-2}\times a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{2}}c=a^{\frac{1}{12}}b^{-\frac{3}{2}}c=\frac{c}{b}\sqrt[12]{\frac{a}{b^6}}$;

18) $\frac{a}{b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{4}}}\times\frac{a^{\frac{7}{8}}b}{c^{-\frac{1}{2}}}=a^{\frac{15}{8}}b^{\frac{1}{2}}c^{-\frac{1}{4}}=a^2\sqrt[8]{\frac{b^4}{ac^2}}$;

19) $\sqrt[5]{a^{12}}.\sqrt[7]{a^3}.\sqrt[6]{a^4}=a^{\frac{12}{5}}.a^{\frac{3}{7}}.a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{367}{105}}=a^3\sqrt[105]{a^{52}}$;

20) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^2}}.\sqrt[6]{\sqrt[4]{a^9}}=(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{5}}.(a^{\frac{9}{4}})^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{2}{15}}.a^{\frac{3}{8}}=a^{\frac{61}{120}}=a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{120}}=\sqrt{a}\times\sqrt[120]{a}$;

21) $\sqrt[5]{\frac{(c^2-y^2)^3}{(a+x)^8}}\times\sqrt[6]{\frac{(c^2-y^2)^2}{a+x}}=(c^2-y^2)^{\frac{3}{5}+\frac{1}{3}}(a+x)^{-\frac{8}{5}-\frac{1}{6}}$

$=(c^2-y^2)^{\frac{17}{20}}(a+x)^{-\frac{53}{30}}=\frac{\sqrt[20]{(c^2-y^2)^{17}}}{\sqrt[30]{(a+x)^{53}}}=\frac{\sqrt[20]{(c^2-y^2)^{17}}}{(a+x)\sqrt[30]{(a+x)^{23}}}=$

$=\frac{(c^2-y^2)\sqrt[30]{(a+x)^7}}{(a+x)^2\sqrt[20]{(c^2-y^2)^3}}=\frac{(c^2-y^2)}{(a+x)^2}\sqrt[60]{\frac{(a+x)^{14}}{(c^2-y^2)^9}}$;

22) $\frac{b}{\sqrt{a}}.\sqrt[3]{ac}.\frac{\sqrt[4]{c^3}}{\sqrt{b}}=ba^{-\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}\times c^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{2}}=a^{-\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{13}{12}}=c\sqrt[12]{\frac{b^6c}{a^2}}$;

23) $(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[5]{b^2})(\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[5]{b^2})=(a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{2}{5}})(a^{\frac{3}{4}}-b^{\frac{2}{5}})=a^{\frac{6}{4}}-b^{\frac{4}{5}}=a\sqrt{a}-\sqrt[5]{b^4}$

$$=a\sqrt{a}-b\sqrt[5]{\frac{1}{b}};$$

24) $\left(5\sqrt[4]{a^7}-\frac{6ab}{\sqrt[4]{a}}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{a}-\frac{7b}{\sqrt[3]{a^2}}\right)=(5a^{\frac{7}{4}}-6a^{\frac{3}{4}}b)(a^{\frac{1}{3}}-7a^{-\frac{2}{3}}b)$

$$=5a^{\frac{25}{12}}-41a^{\frac{13}{12}}b+42a^{\frac{1}{12}}b^2=(5a^2-41ab+42b^2)\sqrt[12]{a};$$

25) $\left(\sqrt[5]{ab^3}+3\sqrt[5]{\frac{b^8}{a^4}}\right)\left(\sqrt{ab}+\frac{2}{b^2}\sqrt{\frac{b}{a}}\right)=(a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{3}{5}}+3a^{-\frac{4}{5}}b^{\frac{8}{5}})$

$$\times(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+2a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{2}})=\left(ab+\frac{2}{b}+3b^2+\frac{6}{a}\right)\sqrt[10]{\frac{b}{a^3}};$$

26) $\left(\sqrt[6]{\frac{1}{a^3b^2}}-2\sqrt[3]{\frac{b^2c^3}{a\sqrt{a}}}\right)\left(\sqrt[5]{a^2}-\frac{b}{\sqrt[5]{a^3}}\right)=(a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}}-2a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}c)$

$$\times(a^{\frac{2}{5}}-a^{-\frac{3}{5}}b)=\left(1-2bc-\frac{b}{a}+\frac{2b^2c}{a}\right)\sqrt[30]{\frac{1}{a^3b^{10}}};$$

27) $\left(\frac{b}{c}\sqrt[5]{\frac{ad}{f}}-cd\sqrt[3]{\frac{ac}{bg}}\right)\times\left(\sqrt[5]{\frac{ab^5d}{c^5f}}+\sqrt[3]{\frac{ac^4d^3}{bg}}\right)$

$$=\left[\frac{(ad)^{\frac{1}{5}}b}{cf^{\frac{1}{5}}}-\frac{(ac)^{\frac{1}{3}}cd}{(bg)^{\frac{1}{3}}}\right]\cdot\left[\frac{(ad)^{\frac{1}{5}}b}{cf^{\frac{1}{5}}}+\frac{(ac)^{\frac{1}{3}}cd}{(bg)^{\frac{1}{3}}}\right]=\frac{(ad)^{\frac{2}{5}}b^2}{c^2f^{\frac{2}{5}}}-\frac{(ac)^{\frac{2}{3}}c^2d^2}{(bg)^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{b^2}{c^2}\sqrt[5]{\frac{a^2d^2}{f^2}}-c^2d^2\sqrt[3]{\frac{a^2c^2}{b^2g^2}};$$

28) $a^{\frac{m}{n}}:a^{-\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}=\sqrt[nq]{a^{mq+np}};$

29) $a^{-\frac{m}{n}}:a^{\frac{p}{q}}=a^{-\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)}=\frac{1}{\sqrt[nq]{a^{mq+np}}};$

30) $a^{\frac{3}{4}}c:a^{\frac{5}{6}}d=\frac{a^{-\frac{1}{12}}c}{d}=\frac{c}{d\sqrt[12]{a}};$

31) $a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{1}{2}}:a^{-\frac{7}{5}}b^{-\frac{1}{2}}c=a^2b^{\frac{3}{4}}c^{-1}=\frac{a^2\sqrt[4]{b^3}}{c};$

32) $h : \frac{a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{4}}}{c d^{\frac{1}{2}}} = \frac{chd^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{4}}} = \frac{ch\sqrt{d}}{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{b}} = \frac{ch\sqrt{d}}{\sqrt[12]{a^4 b^3}}$;

33) $\frac{a^{-\frac{9}{2}} b^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{1}{6}} d^3} : \frac{a^{-\frac{29}{4}} d^{\frac{11}{3}}}{b^{\frac{8}{5}} c} = \frac{a^{\frac{11}{4}} b^{\frac{34}{15}} c}{c^{\frac{1}{6}} d^{\frac{29}{2}}} = \frac{a^3 b^2 c}{d^7} \sqrt[60]{\frac{b^{16} d^{20}}{a^{15} c^{10}}}$

$$= \frac{a^3 b^2 c}{d^7} \sqrt[12]{\frac{d^4}{a^3 c^2}} \cdot \sqrt[15]{b^4};$$

34) $(\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{b^3}) : (\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}) = [(\sqrt[4]{a})^3 - (\sqrt[4]{b})^3] : (\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})$

$$= (\sqrt[4]{a})^2 + \sqrt[4]{ab} + (\sqrt[4]{b})^2 = \sqrt{a} + \sqrt[4]{ab} + \sqrt{b}$$

oder $= (a^{\frac{3}{4}} - b^{\frac{3}{4}}) : (a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}) = a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}$;

35) $(a^3 - 2\sqrt[4]{a^2 b^3} - a^2 \sqrt[6]{a^3 b^2} + 2b\sqrt[12]{b}) : (\sqrt{a} - \sqrt[3]{b})$

$$= a^{\frac{5}{2}} - 2b^{\frac{3}{4}} = a^2\sqrt{a} - 2\sqrt[4]{b^3};$$

36) $(\sqrt[12]{a^{10} b^9} - c\sqrt[10]{a^7} \cdot \sqrt[6]{b^5} - \frac{3}{2}a\sqrt[4]{b^3} + \frac{3abc}{2}\sqrt[30]{\frac{1}{a^4 b^5}})$

$$: (\sqrt{ab} - \tfrac{3}{2}\sqrt[6]{a^4 b^3}) = a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{1}{5}} b^{\frac{1}{3}} c = \sqrt[12]{a^4 b^3} - c\sqrt[15]{a^3 b^5}$$ *);

37) $(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = \sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p}$;

38) $(a^{-\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\right)^p} = a^{-\frac{mp}{nq}} = \frac{1}{\sqrt[nq]{a^{mp}}}$;

39) $(a^{\frac{m}{n}})^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p}} = a^{-\frac{mp}{nq}}$;

40) $(a^{-\frac{m}{n}})^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{(1 : \sqrt[n]{a^m})^p}} = a^{\frac{mp}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{mp}}$;

---

*) Man kann auch alle diese Uebungs-Beispiele dadurch vervielfältigen, daß man, wo multiplicirt ist, das erhaltene Produkt wiederum durch den einen und dann auch durch den andern der Faktoren dividirt, und wo dividirt ist, den erhaltenen Quotienten wieder mit dem Divisor multiplicirt.

41) $(a^{\frac{3}{4}}\,b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{4}}\,b^{\frac{2}{9}} = \sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[9]{b^2} = a^{\frac{9}{36}}\,b^{\frac{8}{36}} = \sqrt[36]{a^9 b^8}$;

42) $(a^2 b^{-\frac{1}{2}}\,c^{\frac{2}{5}})^{-\frac{1}{4}} = a^{-\frac{2}{4}}\,b^{\frac{1}{8}}\,c^{-\frac{1}{10}} = \sqrt[40]{\frac{b^5}{a^{20}c^4}}$;

43) $((a^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{5}})^{-\frac{1}{6}} = a^{-\frac{1}{20}} = \frac{1}{\sqrt[20]{a}} = \sqrt[20]{\frac{1}{a}}$;

44) $\sqrt[6]{a^3 b\sqrt[5]{a^3 bc}} = a^{\frac{15}{6}}\,b^{\frac{5}{6}} \times a^{\frac{1}{2}}\,b^{\frac{1}{6}}\,c^{\frac{1}{6}} = a^3 b\sqrt[6]{c}$;

45) $\left[\frac{c^2 d}{(a+b)^{\frac{3}{2}}}\right]^{-\frac{1}{3}} = \frac{c^{-\frac{2}{3}}\,d^{-\frac{1}{3}}}{(a+b)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt[3]{c^2 d}} = \sqrt[6]{\frac{(a+b)^3}{c^4 d^2}}$;

46) $\sqrt[4]{\left(\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt[3]{ab}}\right)^3} = (a^{\frac{2}{3}}\,b^{\frac{1}{6}})^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{2}}\,b^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{a^4 b}$;

47) $\sqrt[4]{\frac{\sqrt{c-d}\cdot\sqrt[3]{(a+x^2)^4}}{c^6 d^{5m}}} = \left[\frac{(c-d)^{\frac{1}{2}}(a+x^2)^{\frac{4}{3}}}{c^6 d^{5m}}\right]^{\frac{1}{4}}$

$$= \frac{(c-d)^{\frac{1}{8}}(a+x^2)^{\frac{1}{3}}}{c^{\frac{3}{2}}\,d^{\frac{5m}{4}}} = \frac{1}{cd^m}\sqrt[24]{\frac{(c-d)^3(a+x^2)^8}{c^{12}d^{6m}}}.$$

Anmerkung. Wir wissen aus (§. §. 63. 64.), daß jede Wurzel $\sqrt[m]{a}$ z. B. allemal eine absolute (d. h. ganze oder gebrochene positive) Zahl vorstellt und nur eine einzige, so oft der Radikand a (d. h. der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen) selbst eine solche absolute Zahl ist. — In allen diesen Beispielen, welche das Operiren mit Wurzeln berücksichtigen, wurde aber letztere Bedingung vorausgesetzt, damit alle vorkommenden Wurzeln wirklich einen und auch nur einen einzigen Werth haben und die Sätze der Wurzeln des dritten Kapitels ohne weitere Vorsicht angewandt werden konnten. Und da bei den gebrochenen Potenzen z. B. $a^{\frac{m}{n}}$, in so ferne sie Wurzeln z. B. $\sqrt[m]{a^n}$ vorstellen, dieselbe Voraussetzung gemacht werden muß in Bezug auf den Dignanden a der Potenz, wenn die Potenz selbst allemal einen und auch nur einen einzigen Werth haben soll, so muß man sich die hier in den Beispielen vorkommenden Potenzen ebenfalls so denken.

Note. Wenn man freilich in der Analysis weiter vordringt, so findet man, daß man mit Wurzeln und Potenzen zu arbeiten gezwungen ist, deren Radikanden oder Dignanden ganz allgemein sind, so daß man noch gar nicht weiß, ob sie positive oder negative Zahlen seyn werden oder imaginäre oder vielleicht noch eine neue Gattung besonderer Ausdrücke, die wir zur Zeit noch gar nicht bemerkt haben. Allein für diesen Fall ist es auch nothwendig, näher noch zu bestimmen, wie man sich solche allgemeine Wurzeln und Potenzen zu denken habe, wenn man nicht Gefahr laufen will, unrichtige Resultate zu erhalten. Für den Augenblick begnügen wir uns mit unserem Text.

XXVI.

Kommen unter den Wurzel-Ausdrücken, welche verwandelt werden sollen, auch noch Wurzeln aus algebraischen Summen vor, so muß man noch (§. §. 158—161.) in Anwendung bringen.

1) $\sqrt{(x^2+ax+\frac{a^2}{4})}=x+\frac{a}{2}$;

2) $\sqrt{(x^2-ax+\frac{a^2}{4})}=x-\frac{a}{2}$;

3) $\sqrt{(4x^2-4x+1)}=2x-1$;

4) $\sqrt{(a^2x^4-4abx^2+4b^2)}=ax^2-2b$;

5) $\sqrt{(x^6-37x^3+(\frac{37}{2})^2)}=x^3-\frac{37}{2}$;

6) $\sqrt{(\frac{25a^2b^6}{4c^8}+\frac{35ab^3}{c}+49c^6)}=\frac{5ab^3}{2c^4}+7c^3$;

7) $\sqrt{(\frac{a^2}{4b^2}-\frac{4a}{3c}+\frac{16b^2}{9c^2})}=\frac{a}{2b}-\frac{4b}{3c}$;

8) $\sqrt{(x^8-17x^4+2\frac{89}{4})}=x^4-\frac{17}{2}$;

9) $\sqrt{(4a^2-12ab+9b^2)}=2a-3b$;

10) $\sqrt{(16x^2+\frac{40xy}{z}+\frac{25y^2}{z^2})}=4x+\frac{5y}{z}$;

11) $\sqrt{(25x^2\pm 2+\frac{1}{25x^2})}=5x\pm\frac{1}{5x}$;

12) $\sqrt{(a+b\pm 2\sqrt{ab})}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$;

13) $\sqrt{(\sqrt[3]{a^2}\pm 2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}=\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}$;

14) $\sqrt{(9a^2-6ab+30ac+6ad+b^2-10bc-2bd+25c^2+10cd+d^2)}$
$=3a-b+5c+d$;

15) $\sqrt{(\frac{9}{4}x^2+\frac{4}{9}y^2+16z^2-2xy+12xz-\frac{16}{3}yz)}=\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}y+4z$;

16) $\sqrt{(\frac{9}{4}+6x-17x^2-28x^3+49x^4)}=\frac{3}{2}+2x-7x^2$;

17) $\sqrt{(9x^4-3ax^3+6bx^3+\frac{a^2x^2}{4}-abx^2+b^2x^2)}=3x^2+(\frac{a}{2}-b)x$;

18) $\sqrt{(4a^{4m}-12a^{3m}b^{p}+9a^{2m}b^{2p})}=2a^{2m}-3a^{m}b^{p}$;

19) $\sqrt{(e^{2x}\pm 2+e^{-2x})}=e^{x}\pm e^{-x}$;

20) $\sqrt{(\frac{4}{9}a^2x^4-\frac{4}{5}abx^3z+\frac{8}{3}a^2bx^2z^2+b^2x^2z^2-4ab^2xz^3+4a^2b^2z^4)}$
$=\frac{2}{3}ax^2-bxz+2abz^2$;

21) $\sqrt{\frac{a^2+4ab+4b^2}{4x^2-4x+1}}=\frac{a+2b}{2x-1}$;

22) $\sqrt{\frac{a^2b^2-2ab^3+b^4}{a^{2m}-6a^{m}x+9x^2}}=\frac{ab-b^2}{a^{m}-3x}$;

23) $\sqrt{\left(\frac{4a^{2m-2}b^4}{9c^{4p}}+\frac{16a^2b^{2n-4}}{d^{2p-2}}+\frac{b^{2n}}{9c^6d^4}-\frac{16a^{m}b^{n}}{3c^{2p}d^{p-1}}-\right.}$
$\left.-\frac{4a^{m-1}b^{n+2}}{9c^{2p+3}d^2}+\frac{8ab^{2n-2}}{3c^3d^{p+1}}\right)$
$=\frac{2a^{m-1}b^2}{3c^{2p}}-\frac{4ab^{n-2}}{d^{p-1}}-\frac{b^{n}}{3c^3d^2}$;

24) $\sqrt{(5a^2x-10abx+5b^2x)}=(a-b)\sqrt{5x}$ *);

25) $\sqrt{(12ax^2-12axy+3ay^2)}=(2x-y)\sqrt{3a}$;

26) $\sqrt{\left(\frac{a^3cd^2}{4b^4}-\frac{5a^2c^3d^4}{12b^2}+\frac{a^4d^2}{8b^3c}\right)}=\frac{ad}{2b}\sqrt{\left(\frac{ac}{b^2}-\frac{5c^3d^2}{3}+\frac{a^2}{2bc}\right)}$;

27) $\sqrt{\frac{a^3b-4a^2b^2+4ab^3}{c^2d^2}}=\frac{a-2b}{cd}\sqrt{ab}$;

28) $\sqrt{\frac{xy^2}{4a^2b-8ab^2+4b^3}}=\frac{y}{2(a-b)}\sqrt{\frac{x}{b}}$;

29) $\sqrt{\frac{3a^3y-6a^2xy-12ax^2y+24x^3y}{45bc^2d-30bcd^2+5bd^3}}=\frac{a-2x}{3c-d}\sqrt{\frac{3y(a+2x)}{5bd}}$;

30) $\frac{2x-3y}{2x+3y}\sqrt{\frac{5a^4b^3}{4x^2-12xy+9y^2}}=\frac{a^2b}{2x+3y}\sqrt{5b}$;

31) $(x^2+1)\sqrt{\frac{4ab^3}{x^4-1}}=\sqrt{\frac{(x^2+1)^2\cdot 4ab^3}{(x^2+1)(x^2-1)}}=\frac{2b}{x^2-1}\cdot\sqrt{ab(x^4-1)}$;

32) $\sqrt[3]{(8x^3-4x^2+2x-1)}=2x-1$;

33) $\sqrt[3]{(8a^3-4a^2b+2ab^2-b^3)}=2a-b$;

34) $\sqrt[3]{(8a^3-60a^2y+150ay^2-125y^3)}=2a-5y$;

---

*) In diesem und in den folgenden Beispielen ist der Radikand erst in ein Produkt zu verwandeln und dann nach (§. 66.) aus jedem der Faktoren die Wurzel zu nehmen.

35) $\sqrt[3]{(8a^5-60a^4y+150a^3y^2-125a^2y^3)}=(2a-5y)\sqrt[3]{a^2}$;

36) $\sqrt[3]{(8a^6-60a^5y+150a^4y^2-125a^3y^3)}=2a^2-5ay$;

37) $\sqrt[3]{(27-27e^{2x}+9e^{4x}-e^{6x})}=3-e^{2x}$;

38) $\sqrt[3]{(8-6x^{3p-1}+\frac{3}{2}x^{6p-2}-\frac{1}{8}x^{9p-3})}=2-\frac{1}{2}x^{3p-1}$;

39) $\sqrt[3]{\left(\frac{8a^3c^3}{27b^3}x^7-\frac{4a^2c}{3b}x^6+2\frac{ab}{c}x^5-\frac{b^3}{c^3}x^4\right)}=\left(\frac{2ac}{3b}x^2-\frac{b}{c}x\right)\sqrt[3]{x}$;

40) $\sqrt[3]{(a^3-3a^2b+3a^2c+3ab^2-6abc+3ac^2-b^3+3b^2c-3bc^2+c^3)}$
$=a-b+c$;

41) $\sqrt[3]{\left(\frac{a^3x^3}{b^6c^3}+\frac{3a^2cx^4}{b^4d}-\frac{3a^3x^2}{b^4c^2}+\frac{3ac^5x^5}{b^2d^2}-\frac{6a^2c^2x^3}{b^2d}+\frac{3a^3x}{b^2c}\right.}$
$\left.+\frac{c^9x^6}{d^3}-\frac{3ac^6x^4}{d^2}+\frac{3a^2c^3x^2}{d}-a^3\right)=\frac{ax}{b^2c}+\frac{c^3x^2}{d}-a$;

42) $\sqrt[3]{\left(\frac{8a^3(a-b)^{3m-3}}{27b^3c^6}-\frac{27x^3}{8}-\frac{b^3}{a^6c^3}-\frac{2a^2(a-b)^{2m-2}x}{b^2c^4}\right.}$
$-\frac{4(a-b)^{2m-2}}{3bc^3}+\frac{9a(a-b)^{m-1}x^2}{2bc^2}-\frac{27bx^2}{4a^2c}+\frac{2b(a-b)^{m-1}}{a^3c^4}$
$\left.-\frac{9b^2x}{2a^4c^2}+\frac{6a(a-b)^{m-1}x}{a^2c^3}\right)=\frac{2a(a-b)^{m-1}}{3bc^2}-\frac{3x}{2}-\frac{b}{a^2c}$;

43) $\sqrt[3]{\frac{2x^3z-6x^2yz+6xy^2z-2y^3z}{(8x^3-4x^2+2x-1)b}}=\frac{x-y}{x-1}\sqrt[3]{\frac{2z}{b}}$;

44) $\sqrt[3]{\left(\frac{8a^3b^4}{c^2}-\frac{16a^4b^3}{c^3}\right)}=\frac{2ab}{c}\sqrt[3]{(bc-2a)}$;

45) $\sqrt[3]{(a^3+6a^2b-3a^2c+12ab^2-12abc+3ac^2+8b^3-12b^2c+6bc^2-c^3)}$
$=(a+2b-c)$;

46) $\sqrt[3]{\left(\frac{8a^3b^3}{c^{3m}}-60a^5b^2c^m-36\frac{a^3b^4}{c^{2m}}+\frac{6ab^3}{c^{2m}}+150a^7bc^{5m}\right.}$
$+180a^5b^3c^{2m}-30a^3b^2c^{2m}+\frac{54a^3b^5}{c^m}-\frac{18ab^4}{c^m}+\frac{3b^3}{2ac^m}$
$\left.-125a^9c^{9m}-225a^7b^2c^{6m}+\frac{75}{2}a^5bc^{6m}-135a^5b^4c^{3m}+\right.$

$$+45a^3b^3c^{3m}-\tfrac{15}{4}ab^2c^{3m}-27a^3b^6+\tfrac{27}{2}ab^5-\frac{9b^4}{4a}+\frac{b^3}{8a^3}\Big)$$

$$=\frac{2ab}{c^m}-5a^3c^{3m}-3ab^2+\frac{b}{2a}.$$

XXVII.

Wir haben (§. 168.) gesehen, wie sich jede imaginäre Wurzel z. B. $\sqrt{-4}$ oder $\sqrt{-5}$ allemal auf $\sqrt{-1}$ zurückführen läßt, indem man $-4=(-1).4$ oder $-5=(-1).5$ nimmt und dann (§. 66.) anwendet, so daß man $\sqrt{-4}=\pm 2\sqrt{-1}$ und $\sqrt{-5}=\sqrt{5}.\sqrt{-1}$ findet, während $\sqrt{5}$ zweideutig ist und eine positive oder auch eine negative Zahl bedeutet, so daß wir

$\sqrt{-5}=\pm\sqrt{5}.\sqrt{-1}$ schreiben müssen, so oft wir unter der reellen Wurzel $\sqrt{5}$ ihren absoluten Werth uns denken wollen. — Ferner wissen wir, daß für diese imaginären Wurzeln alle die Formeln der Wurzeln des 3ten Kapitels angewandt werden dürfen, gerade wie für die allgemeinen Wurzeln und wie für die (§. 64.) definirten absoluten Wurzeln, wenn man nur nicht vergißt, daß jede imaginäre Wurzel, eben so wie eine allgemeine, zweideutig ist, und diese Zweideutigkeit so lange beibehält, bis erst in jedem besondern Falle der Anwendung besonders entschieden ist, welcher der beiden Werthe genommen werden darf.

So mögen denn hier noch einige Uebungs-Beispiele Platz finden:

1) $\sqrt{-36}=\pm 6\sqrt{-1}$;

2) $\sqrt{-18}=\pm 3\sqrt{2}.\sqrt{-1}$ *);

---

*) Wir schreiben deshalb hier, wie in der Folge immer das (±) Zeichen vor, damit $\sqrt{2}$ und jede solche reelle Wurzel jedesmal ihren absoluten Werth vorstellen könne. Diese Einrichtung gewährt dann die Bequemlichkeit, daß man $\sqrt{2}$ als eine absolute Zahl betrachten und behandeln kann. — Wir werfen hier aber die Zweideutigkeit z. B. von $\sqrt{-36}$ oder

3) $(a+b\sqrt{-1})+(c-d\sqrt{-1})=(a+c)+(b-d)\sqrt{-1}$;

4) $(a-b\sqrt{-1})-(c-d\sqrt{-1})=(a-c)+(d-b)\sqrt{-1}$
$=(a-c)-(b-d)\sqrt{-1}$;

5) $3\sqrt{-9}+2\sqrt{-25}-7\sqrt{-4}=$
$=\pm 9\sqrt{-1}\pm 10\sqrt{-1}\mp 14\sqrt{-1}=\pm 5\sqrt{-1}$,

wenn man überzeugt ist, daß alle obern oder alle untern Zeichen zugleich gelten, wovon man aber nur erst in dem Falle der Anwendung und dort noch schwer sich wird überzeugen können;

6) $2\sqrt{-48}+3\sqrt{-12}+5\sqrt{-8}-7\sqrt{-32}=$
$\pm 8\sqrt{3}.\sqrt{-1}\pm 6\sqrt{3}.\sqrt{-1}\pm 10\sqrt{2}.\sqrt{-1}\mp 28\sqrt{2}.\sqrt{-1}$
$=(\pm 14\sqrt{3}\mp 18\sqrt{2})\sqrt{-1}$

wenn man überzeugt seyn konnte, daß alle obern oder alle untern Zeichen zugleich gelten, was freilich jedesmal erst in dem besondern Falle der Anwendung entschieden seyn wird und selbst dort noch oft schwer zu entscheiden seyn dürfte;

7) $a\sqrt{-b}=\pm a\sqrt{b}.\sqrt{-1}$;

8) $\alpha\sqrt{-a}\times\beta.\sqrt{-b}=\mp\alpha\beta\sqrt{ab}$;

9) $(c\sqrt{-a}+d\sqrt{-b}+f).\sqrt{-a}=-ac\mp d\sqrt{ab}+f\sqrt{-a}$

in so ferne man annehmen darf, daß $\sqrt{-a}$ in dem ersten Faktor und $\sqrt{-a}$ in dem andern, jedesmal einen und denselben seiner beiden Werthe vorstellt; ob in $\mp d\sqrt{ab}$ das (+) oder das (−) Zeichen genommen werden dürfe, hängt allein erst von dem Falle der Anwendung ab, weil in der einen Anwendung das (+) Zeichen, in andern dagegen das (−) Zeichen zu nehmen seyn kann;

10) $(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})=(ac-bd)+(ad+bc)\sqrt{-1}$ *);

---

von $\sqrt{-18}$ oder überhaupt von jeder imaginären Wurzel absichtlich allemal auf das vorzusetzende $\pm$ Zeichen, oder auf die als Faktor vorzusetzende reelle Wurzel, damit $\sqrt{-1}$ durchgehends als jedesmal einen und denselben seiner Werthe vorstellend betrachtet und behandelt werden könne.

*) $\sqrt{-1}$ ist durchgehends, so oft es vorkommt, als jedesmal einen und denselben seiner Werthe vorstellend, angenommen. — Unter dieser Voraussetzung allein ist $\sqrt{-1}.\sqrt{-1}=(\sqrt{-1})^2$ also $=-1$.

11) $\frac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}}=\frac{(a+b\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})}{(c+d\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})}$

$$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)\sqrt{-1}}{c^2+d^2};$$

12) $(a+b\sqrt{-1})^2=a^2-b^2+2ab\sqrt{-1}$;

13) $(a+b\sqrt{-1})^3=a^3+3a^2b\sqrt{-1}+3a(b\sqrt{-1})^2+(b\sqrt{-1})^3$;

$$=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)\sqrt{-1}$$

14) $(\sqrt{-1})^2=-1$, $(\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1}$;

15) $(\sqrt{-1})^4=+1$, $(\sqrt{-1})^5=+\sqrt{-1}$;

16) $(\sqrt{-1})^6=-1$, $(\sqrt{-1})^7=-\sqrt{-1}$;

17) $(\sqrt{-1})^{4n}=+1$, $(\sqrt{-1})^{4n+1}=+\sqrt{-1}$;

18) $(\sqrt{-1})^{4n+2}=-1$, $(\sqrt{-1})^{4n+3}=-\sqrt{-1}$

wenn nur n eine beliebige ganze Zahl ist;

19) $(a+b\sqrt{-1})^4=(a^4-6a^2b^2+b^4)+(4a^3b-4ab^3)\sqrt{-1}$;

20) $(a-b\sqrt{-1})^4=(a^4-6a^2b^2+b^4)-(4a^3b-4ab^3)\sqrt{-1}$;

21) $(2-\sqrt{-3})(10-\sqrt{-8})=(2\mp\sqrt{3}.\sqrt{-1})(10\mp2\sqrt{2}.\sqrt{-1})$

$$=(20-2\sqrt{6})\mp(10\sqrt{3}+4\sqrt{2})\sqrt{-1}$$

wenn man sicher ist, daß (während alle reellen Wurzeln ihre absoluten Werthe vorstellen) in den beiden gegebenen Faktoren die obern oder die untern ($\pm$) Zeichen zugleich statt finden; im Gegentheil würde man dasselbe Produkt

$$=20\pm\sqrt{24}-10\sqrt{-3}-2\sqrt{-8}$$

nehmen und hier die Zweideutigkeit der Wurzeln beibehalten müssen;

22) $(3-\sqrt{-5})(4-2\sqrt{-5})=2-10\sqrt{-5}=2\mp10\sqrt{5}.\sqrt{-1}$

wenn $\sqrt{-5}$ jedesmal denselben Werth vorstellt;

23) $(2-5\sqrt{-3})(7-4\sqrt{-3})=-46-43\sqrt{-3}=-46\mp43\sqrt{3}.\sqrt{-1}$

wenn $\sqrt{-3}$ jedesmal denselben seiner Werthe vorstellt;

24) $(1-\sqrt{-1})^2=-2\sqrt{-1}$;

25) $(7-\sqrt{-\frac{1}{2}})(1-\sqrt{-\frac{1}{2}})=\frac{13}{2}-8\sqrt{-\frac{1}{2}}=\frac{13}{2}-\sqrt{-32}$

$$=\tfrac{13}{2}\mp4\sqrt{2}.\sqrt{-1};$$

26) $(\sqrt{2}-3\sqrt{-5})(\sqrt{7}-\sqrt{-3})=\sqrt{14}+3\sqrt{15}-3\sqrt{-35}-\sqrt{-6}$

wenn alle Wurzeln noch zweideutig sind, aber

$$=\sqrt{14}\mp3\sqrt{15}-3\sqrt{-35}-\sqrt{-6}$$

wenn alle reellen Wurzeln ihre absoluten Werthe vorstellen. — Dagegen unter der letztern Voraussetzung

$$(\sqrt{2}-3\sqrt{5}.\sqrt{-1})(\sqrt{7}-\sqrt{3}.\sqrt{-1})=\sqrt{14}-3\sqrt{15}$$
$$-(3\sqrt{35}+\sqrt{6})\sqrt{-1}$$

27) $(2\sqrt{-3}-5\sqrt{-4}-7\sqrt{-2})(\sqrt{-7}-2\sqrt{-1})$
$=\pm 2\sqrt{21}\pm 5\sqrt{28}\pm 7\sqrt{14}\pm 4\sqrt{3}\mp 20\mp 14\sqrt{2}$

28) $(2\sqrt{3}.\sqrt{-1}-10\sqrt{-1}-7\sqrt{2}.\sqrt{-1})(\sqrt{7}.\sqrt{-1}-2\sqrt{-1})$
$=-(2\sqrt{3}-10-7\sqrt{2})(\sqrt{7}-2)$
$=-2\sqrt{21}+10\sqrt{7}+7\sqrt{14}+4\sqrt{3}-20-14\sqrt{2}$

wenn hier alle vorkommenden reellen Wurzeln allemal ihren absoluten Werth vorstellen. *)

29) $\frac{a\sqrt{-1}}{b\sqrt{-1}}=\frac{a}{b}$;

30) $\frac{1}{\sqrt{-1}}=-\sqrt{-1}$;

31) $\frac{a}{b\sqrt{-1}}=-\frac{a}{b}\sqrt{-1}$;

32) $\frac{a}{\sqrt{a}.\sqrt{-1}}=\mp\sqrt{a}.\sqrt{-1}$

oder $=-\sqrt{a}.\sqrt{-1}$, wenn a eine absolute Zahl und $\sqrt{a}$ durchgehends ihren absoluten Werth vorstellt;

33) $\frac{6}{1+\sqrt{2}.\sqrt{-1}}=\frac{6(1-\sqrt{2}.\sqrt{-1})}{3}=2-2\sqrt{2}.\sqrt{-1}$

wenn $\sqrt{2}$ durchgehends ihren absoluten Werth bedeutet;
dagegen

34) $\frac{6}{1+\sqrt{-2}}=\frac{6(1-\sqrt{-2})}{(1+\sqrt{-2})(1-\sqrt{-2})}=2-2\sqrt{-2}$,

wenn $\sqrt{-2}$ durchgehends denselben ihrer beiden Werthe vorstellt;

---

*) Wenn man also unter den beiden Faktoren des Beispiels (n. 27.) dieselben vorgestellt denkt, welche im Beispiel (n. 28.) unter der Voraussetzung stehen, daß die reellen Wurzeln jedesmal ihren absoluten Werth vorstellen, so sind die in dem Resultat der (n. 27.) unbestimmt gelassenen Zeichen dahin zu bestimmen, daß man durchgehends die obern nimmt und die reellen Wurzeln durchgehends durch ihre absoluten Werthe ersetzt.

35) $$\frac{\sqrt{-12}+\sqrt{-6}+\sqrt{-9}}{\sqrt{-3}}=\pm 2\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$$

aber

36) $$\frac{2\sqrt{3}.\sqrt{-1}+\sqrt{6}.\sqrt{-1}+3\sqrt{-1}}{\sqrt{3}.\sqrt{-1}}=2+\sqrt{2}+\sqrt{3},$$

wenn alle reellen Wurzeln ihre absoluten Werthe vorstellen *);

37) $$\frac{3\sqrt{-4}-2\sqrt{-12}+\sqrt{6}-9}{-3\sqrt{-2}}=\mp\sqrt{2}\pm\tfrac{2}{3}\sqrt{6}+\left(\pm\tfrac{1}{3}\sqrt{3}\mp\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{-1};$$

dagegen

38) $$\frac{6\sqrt{-1}-4\sqrt{3}.\sqrt{-1}+\sqrt{6}-9}{-3\sqrt{2}.\sqrt{-1}}$$

$$=-\sqrt{2}+\tfrac{2}{3}\sqrt{6}+\left(\tfrac{1}{3}\sqrt{3}-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{-1},$$

sobald alle reellen Wurzeln ihre absoluten Werthe vorstellen;

39) $$\frac{1}{3-2\sqrt{-3}}=\frac{3+2\sqrt{-3}}{21}=\frac{3\pm 2\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{21}.$$

Anmerkung. In den verschiedenen Lehrbüchern und Beispielsammlungen wird das Operiren mit imaginären Wurzeln gewöhnlich dem Begriffe der allgemeinen, und daher auch der imaginären Wurzel nicht entsprechend und in so ferne unrichtig gelehrt. Es ist daher dem Anfänger, besonders demjenigen, welcher in der Analysis weiter vordringen will, nicht genugsam zu empfehlen, was von (§. 162.) ab über die allgemeinen, und somit für die imaginären Quadrat-Wurzeln, gesagt worden ist, sorgfältig zu wiederholen und zu beherzigen, d. h. die Zweideutigkeit der Quadrat-Wurzeln allemal wohl im Auge zu behalten und sich nicht für einen der beiden Werthe geradezu und eher zu entscheiden, als noch nicht genau ausgemittelt worden ist, welcher durch die Wurzel selbst gerade vorgestellt wird. Kommt dagegen nur $\sqrt{-1}$ vor und zwar jedesmal so, daß

---

*) Vergleicht man die beiden Nummern (35 und 36.), so wird man die Verschiedenheit der rechts hervorgehenden Resultate sogleich darin begründet finden, daß unter den gemachten Voraussetzungen $\sqrt{-12}$ eben so gut durch $+2\sqrt{3}.\sqrt{-1}$ als auch durch $-2\sqrt{3}.\sqrt{-1}$, mithin durch $\pm 2\sqrt{3}.\sqrt{-1}$ ersetzt werden muß, daß also auch die Ausdrücke links (in 35 und 36.) ebenfalls nicht genau dieselben sind.

man wissen kann, wie solche $\sqrt{-1}$ jedesmal einen und denselben ihrer beiden Werthe vorstelle, so hat das Arbeiten mit diesen imaginären Wurzeln auch nicht die geringste Schwierigkeit, und ohne alle Zweideutigkeit müssen sich die Resultate augenblicklich ergeben. Für diese Fälle, die in der höhern Analysis am häufigsten (ja vielleicht allein nur) vorkommen, mögen nun noch einige Beispiele folgen:

40) $\left(\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right)^2=-\frac{e^{2x\sqrt{-1}}-2+e^{-2x\sqrt{-1}}}{4}$;

41) $\left(\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right)^2+\left(\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}\right)^2=1$;

42) $\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\cdot\frac{e^{y\sqrt{-1}}+e^{-y\sqrt{-1}}}{2}\pm\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$
$\cdot\frac{e^{y\sqrt{-1}}-e^{-y\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}=\frac{e^{(x\pm y)\sqrt{-1}}-e^{-(x\pm y)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$;

43) $\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}\cdot\frac{e^{y\sqrt{-1}}+e^{-y\sqrt{-1}}}{2}+\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$
$\cdot\frac{e^{y\sqrt{-1}}-e^{-y\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}=\frac{e^{(x\pm y)\sqrt{-1}}+e^{-(x\pm y)\sqrt{-1}}}{2}$;

44) $(a+b\sqrt{-1})^m=a^m-m_2.a^{m-2}b^2+m_4.a^{m-4}b^4-$etc.
$\pm(m.a^{m-1}b-m_3.a^{m-3}b^3+m_5.a^{m-5}b^5-$etc.$)\sqrt{-1}$
wenn $m_p=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots m-(p-1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ p}$ ist, für jede ganze Zahl welche statt p gesetzt werden mag;

45) $\frac{(a+b\sqrt{-1})^m+(a-b\sqrt{-1})^m}{2}$
$=a^m-m_2.a^{m-2}b^2+m_4.a^{m-4}b^4-$etc.

46) $\frac{(a+b\sqrt{-1})^m-(a-b\sqrt{-1})^m}{2\sqrt{-1}}$
$=m.a^{m-1}b-m_3.a^{m-3}b^3+m_5.a^{m-5}b^5-$etc.
wenn nur in den beiden letzten Nummern m eine absolute ganze Zahl ist. *)

*) Für m eine andere als absolute ganze Zahl gelten dieselben Formeln nur unter gewissen Einschränkungen. Wer sich über alles dieses gründ-

47) $\frac{a+b\sqrt{-1}}{a-b\sqrt{-1}} = \frac{(a+b\sqrt{-1})^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2+2ab\sqrt{-1}}{a^2+b^2}$;

48) $\left(\frac{1}{a-b\sqrt{-1}} - \frac{1}{a+b\sqrt{-1}}\right)\sqrt{-1} = -\frac{2b}{a^2+b^2}$;

49) $\frac{1}{a-b\sqrt{-1}} + \frac{1}{a+b\sqrt{-1}} = \frac{2a}{a^2+b^2}$;

50) $\frac{1}{a\pm b\sqrt{-1}} = \frac{a\mp b\sqrt{-1}}{a^2+b^2}$;

51) $\frac{a+b\sqrt{-1}}{a-b\sqrt{-1}} + \frac{a-b\sqrt{-1}}{a+b\sqrt{-1}} = \frac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2}$;

52) $\frac{a+b\sqrt{-1}}{a-b\sqrt{-1}} - \frac{a-b\sqrt{-1}}{a+b\sqrt{-1}} = \frac{4ab}{a^2+b^2}\sqrt{-1}$;

53) $\frac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}} + \frac{a-b\sqrt{-1}}{c-d\sqrt{-1}} = 2\cdot\frac{ac+bd}{c^2+d^2}$;

54) $\frac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}} - \frac{a-b\sqrt{-1}}{c-d\sqrt{-1}} = 2\cdot\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\sqrt{-1}$.

XXVIII.

Für das Verwandeln der Quadrat-Wurzeln hat man auch noch die leicht zu erweisenden Formeln:

I. $\sqrt{A\pm\sqrt{B}} = \sqrt{\left(\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}\right)}$*);

II. $\sqrt{A\pm B\sqrt{-1}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2}} \pm \sqrt{-\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2}}\cdot\sqrt{-1}$.

---

licher belehrt sehen will, wird das „Lehrbuch der Arithm. Alg. und Analys." Berlin 1822, so wie die „Aufsätze aus dem Gebiete der höhern Mathematik." Berlin 1823 mit Sorgfalt nachlesen und studiren müssen.

*) Indem man nehmlich rechts quadrirt (mit 2 potenzirt) ergiebt sich allemal der Radikand (Ausdruck unter dem Wurzel-Zeichen) links. Also ist der Ausdruck rechts jedesmal ein Werth der Wurzel links.

Danach ergeben sich aber leicht folgende Verwandlungen als Uebungs-Beispiele:

1) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\pm(\sqrt{3}-\sqrt{2})$;

2) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\pm(2-\sqrt{3}\sqrt{2})$;

3) $\sqrt{\frac{49}{16}-\frac{3}{4}\sqrt{5}}=\pm(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\sqrt{5})$;

4) $\sqrt{\frac{39}{4}+3\sqrt{3}}=\pm(3+\frac{1}{2}\sqrt{3})$;

5) $\sqrt{\frac{37}{4}+3\sqrt{7}}=\pm(\frac{3}{2}+\sqrt{7})$;

6) $\sqrt{79-20\sqrt{3}}=\pm(-2+5\sqrt{3})$;

7) $\sqrt{\sqrt{27}+2\sqrt{6}}=\pm(\sqrt[4]{12}+\sqrt[4]{3})$;

8) $\sqrt{4\sqrt{2}-2\sqrt{6}}=\pm(\sqrt[4]{18}-\sqrt[4]{2}$;

9) $\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\pm(\sqrt{5}+\sqrt{3})$;

10) $\sqrt{14-4\sqrt{6}}=\pm(2\sqrt{3}-\sqrt{2})$;

11) $\sqrt{3\sqrt{2}-4}=\pm(\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{2})$,

indem man $3\sqrt{2}$ statt A und 16 statt B setzt. Setzte man -4 statt A und 18 statt B, so erhielte man nach derselben Formel (I.):

12) $\sqrt{3\sqrt{2}-4}=\sqrt{-2+\frac{1}{2}\sqrt{-2}}+\sqrt{-2-\frac{1}{2}\sqrt{-2}}$;

aber nach (II.) ist:

13) $\sqrt{-2+\frac{1}{2}\sqrt{-2}}$ oder $\sqrt{-2+\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{-1}}=\sqrt{-1+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}$
$+\sqrt{1+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{-1}$;

14) $\sqrt{-2-\frac{1}{2}\sqrt{-2}}$ oder $\sqrt{-2-\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{-1}}=\sqrt{-1+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}$
$-\sqrt{1+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{-1}$;

also, wenn man letztere beiden addirt:

15) $\sqrt{-2+\frac{1}{2}\sqrt{-2}}+\sqrt{-2-\frac{1}{2}\sqrt{-2}}=2\sqrt{-1+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}$
$=\sqrt{-4+6\sqrt{\frac{1}{2}}}=\sqrt{-4+3\sqrt{2}}$;

welches wiederum die Gleichung (12.) ist;

16) $\sqrt{a^2+b\pm2a\sqrt{b}}=\pm(a\pm\sqrt{b})$;

17) $\sqrt{ac^2+bd^2-2cd\sqrt{ab}}=\pm(c\sqrt{a}-d\sqrt{b})$;

18) $\sqrt{-2a+2\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{-a+b}+\sqrt{-a-b}$;

19) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}-1$;

20) $\sqrt{a+ab-2a\sqrt{b}}=(1-\sqrt{b})\sqrt{a}$;

21) $\sqrt{(b-\frac{a}{2})^2+\sqrt{ab(4b^2-8ab+a^2)}}=\sqrt{ab}$
$+\sqrt{b^2-2ab+\frac{a^2}{4}}$;

22) $\sqrt{b-8\sqrt{-a^4+a^3\sqrt{b}+4\sqrt{-a^2b+ab\sqrt{b}}}}$
$=2a-\sqrt{b}-2\sqrt{-a^2+a\sqrt{b}}$;

23) $\sqrt{\frac{3a}{b}+\sqrt{(\frac{12a^3c^2}{bd^2}-\frac{4a^4c^4}{d^4})}}=\frac{ac}{d}+\sqrt{\frac{3a}{b}-\frac{a^2c^2}{d^2}}$;

24) $\sqrt{5-12\sqrt{-1}}=\pm(3-2\sqrt{-1})$;

25) $\sqrt{-8-6\sqrt{-1}}=\pm(-1+3\sqrt{-1})$;

26) $\sqrt[4]{-1}=\sqrt{0+\sqrt{-1}}=\pm(\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{-1})$;

27) $\sqrt{-\sqrt{-1}}=\sqrt{0-\sqrt{-1}}=\pm(\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{-1})$;

28) $\sqrt{7+6\sqrt{-2}}=\sqrt{7+6\sqrt{2}.\sqrt{-1}}=\pm(3+\sqrt{2}.\sqrt{-1})$;

29) $\sqrt{-2-2\sqrt{-15}}=\pm(\sqrt{3}-\sqrt{5}.\sqrt{-1})$;

30) $\sqrt{2+\sqrt{-3}}=\sqrt{1+\frac{1}{2}\sqrt{7}}+\sqrt{-1+\frac{1}{2}\sqrt{7}}.\sqrt{-1}$;

31) $\sqrt{\frac{2c^2}{d^2}\sqrt{-1}}=\pm\left(\frac{c}{d}(1+\sqrt{-1})\right)$;

32) $\sqrt{8\sqrt{-1}}=\pm(2+2\sqrt{-1})$;

33) $\sqrt{\frac{a^2d}{b^2}-\frac{b^2}{a^2}-2\sqrt{-d}}=\pm\left(\frac{a}{b}\sqrt{d}-\frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)$;

34) $\sqrt{\frac{a^2c}{b^2}-cd+\frac{ac\sqrt{4d}}{b}.\sqrt{-1}}=\pm\sqrt{c}.\left(\frac{a}{b}+\sqrt{-d}\right)$.

XXIX.

Wenn wir bisher in den einzelnen Nummern besondere Arten der Verwandlungen kennen lehrten, so mögen nachste-

hende Uebungs-Beispiele sich über alle einzelnen Arten gleichmäßig erstrecken. *)

1) $dx+f.\frac{ax-c}{b}=dx+\frac{afx-cf}{b}=\frac{(bd+af)x-cf}{b}$;

2) $a.\frac{bh+cf}{bd+af}-c=\frac{abh-bcd}{bd+af}=b.\frac{ah-cd}{bd+af}$;

3) $(2a+\frac{u-a}{d}d)\left(\frac{\frac{u-a}{d}+1}{2}\right)=(u+a).\frac{u-a+d}{2d}$;

4) $3f.\frac{5c-3by}{2a}-4gy=\frac{15cf-(9bf+8ag)y}{2a}$;

5) $5c-3b.\frac{15cf-6ad}{9bf+8ag}=\frac{40acg+18abd}{9bf+8ag}$;

6) $\frac{x}{b}-\frac{a}{b^2}+\frac{a^2}{b^3}.\frac{b}{a+bx}=\frac{x^2}{a+bx}$;

7) $-\frac{a}{b}(a+bx)^{-2}+\frac{1}{b}.\frac{1}{a+bx}=\frac{x}{(a+bx)^2}$;

8) $\frac{1}{1+x}+\frac{1-x}{(1+x)^2}=\frac{2}{(1+x)^2}$;

9) $(\frac{1}{3}(a+bx)-a)\frac{(a+bx)^{-\frac{1}{2}}}{b}+\frac{2\sqrt{a+bx}}{3b}=\frac{x}{\sqrt{a+bx}}$;

10) $[\frac{1}{3}(a+bx)^2-\frac{2}{3}a(a+bx)+a^2].\frac{1}{b^2\sqrt{a+bx}}$
$+(\frac{2}{5}b(a+bx)-\frac{2}{3}ab)\frac{2\sqrt{a+bx}}{b^3}=\frac{x^2}{\sqrt{a+bx}}$;

11) $-\frac{(a+bx)^{-\frac{1}{2}}b}{2ax}+\frac{\sqrt{a+bx}}{ax^2}-\frac{b}{2a}.\frac{1}{x\sqrt{a+bx}}=\frac{1}{x^2\sqrt{a+bx}}$;

12) $\left(-\frac{1}{2ax^2}+\frac{3b}{4a^2x}\right).\frac{(a+bx)^{-\frac{1}{2}}.b}{2}+\left(\frac{1}{ax^3}-\frac{3b}{4a^2x^2}\right)\sqrt{a+bx}$
$+\frac{3b^2}{8a^2}\frac{1}{x\sqrt{a+bx}}=\frac{1}{x^3\sqrt{a+bx}}$;

---

*) Solche Verwandlungen nennt man Reduktionen, so oft der neue Ausdruck als der einfachere betrachtet wird.

13) $$\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

14) $$\sqrt{1-\frac{x^2}{(x-y)^2}}=\frac{\sqrt{y^2-2xy}}{x-y};$$

15) $$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}};$$

16) $$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}=\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}};$$

17) $$\frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{(1-x^2\sqrt{1-x^2}};$$

18) $$\frac{2x^3}{(2+x)^{\frac{8}{3}}}-\frac{4x^2}{(2+x)^{\frac{5}{3}}}+\frac{2x}{(2+x)^{\frac{2}{3}}}=\frac{8x}{(2+x)^2\sqrt[3]{(2+x)^2}};$$

19) $$\frac{x^2}{(a+x)^{\frac{8}{3}}}-\frac{2x}{(a+x)^{\frac{5}{3}}}+\frac{1}{(a+x)^{\frac{2}{3}}}=\frac{a^2}{(a+x)^2\sqrt[3]{(a+x)^2}};$$

20) $$\frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}=\frac{a^2-b}{a^2+b-2a\sqrt{b}}=\frac{a^2+b+2a\sqrt{b}}{a^2-b};$$

21) $$\frac{\frac{2a}{b}-\frac{3c}{d}}{\frac{4p}{q}-\frac{3b}{d}}=\frac{(2ad-3bc)q}{(4dp-3bq)b};$$

22) $$\frac{\frac{2a}{b}-\frac{3c}{d}}{\frac{4p}{q}-\frac{3c}{d}}-1=\frac{2(aq-2bp)d}{(4dp-3cq)b}$$

$$=\frac{\frac{2ad}{3bc}-1}{\frac{4dp}{3cq}-1}-1=\frac{\frac{2ad}{3bc}-\frac{4dp}{3cq}}{\frac{4dp}{3cq}-1}=2d\,\frac{\frac{aq}{b}-2p}{4dp-3cq};$$

23) $$\frac{1+\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

24) $\dfrac{p}{\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}}=\sqrt[3]{\dfrac{p^3}{27(-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3})}}$

$=\sqrt[3]{\dfrac{p^3(-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3})}{27\cdot[\frac{1}{4}q^2-(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)]}}=\sqrt[3]{+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$;

25) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}=\dfrac{a^3-b^3}{a^4-b^4}$ *);

26) $\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}=\dfrac{a^3+b^3}{a^4-b^4}$ **);

27) $(aa_1+bb_1)^2+(ab_1-a_1b)^2=(a^2+b^2)(a_1^2+b_1^2)$;

28) $(aa_1+bb_1)^2+(ab_1-a_1b)^2-a_1^2c^2-b_1^2c^2=(a^2+b^2-c^2)(a_1^2+b_1^2)$;

29) $(aa_1+bb_1+cc_1)^2+(ab_1-a_1b)^2+(ac_1-a_1c)^2+(bc_1-b_1c)^2$
$=(a^2+b^2+c^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2)$;

30) $(a^2+Ab^2)(a_1^2+Ab_1^2)=(aa_1+Abb_1)^2+A(ab_1-a_1b)^2$
$=(aa_1-Abb_1)^2+A(ab_1+a_1b)^2$;

31) $(ab_1-a_1b)(ab_2-a_2b)+(bc_1-b_1c)(bc_2-b_2c)+(a_1c-ac_1)(a_2c-ac_2)$
$=(a^2+b^2+c^2)(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)-(aa_1+bb_1+cc_1)(aa_2+bb_2+cc_2)$;

32) $\sqrt{6\sqrt{28}}=\sqrt{12\sqrt{7}}=2\sqrt{3\sqrt{7}}=2\sqrt[4]{63}$;

33) $3\sqrt{48\sqrt{7}}=12\sqrt{3\sqrt{7}}=12\sqrt[4]{63}$;

34) $4\sqrt{15\sqrt{27}}=4\sqrt{45\sqrt{3}}=12\sqrt[4]{75}$;

35) $2\sqrt{5\sqrt{48}}=4\sqrt[4]{75}$;

36) $3\sqrt[3]{8+16\sqrt{5}}-2\sqrt[3]{1+\sqrt{20}}=4\sqrt[3]{1+2\sqrt{5}}$;

37) $(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3})^3=1$;

38) $(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3})^3=1$;

39) $(-1+\sqrt{5})^2=6-2\sqrt{5}$;

40) $(-1+\sqrt{5})^3=-16+8\sqrt{5}$;

41) $(-1+\sqrt{5})^4=56-24\sqrt{5}$;

42) $(-1+\sqrt{5})^5=-176+80\sqrt{5}$;

---

*) Zähler und Nenner mit a—b multiplicirt.

**) Zähler und Nenner mit a+b multiplicirt.

43) $(\sqrt{-10-2\sqrt{5}})^4 = 120+40\sqrt{5}$;

44) $[\frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}+\sqrt{-10+2\sqrt{5}})]^5 = 1$;

45) $[\frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}-\sqrt{-10+2\sqrt{5}})]^5 = 1$;

46) $[\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}+\sqrt{-10-2\sqrt{5}})]^5 = 1$;

47) $[\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}-\sqrt{-10-2\sqrt{5}})]^5 = 1$;

48) $$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}} = \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x};$$

49) $$\frac{b}{\sqrt[n]{[a-\sqrt{a^2-b^n}]}} = \sqrt[n]{a+\sqrt{a^2-b^n}};$$

50) $$\sqrt{a+\sqrt{-b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{-b}} = \sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2+b}};$$

51) $$\sqrt{\frac{abc+1}{b}+2\sqrt{\frac{ac}{b}}} + \sqrt{\frac{abc+1}{b}-2\sqrt{\frac{ac}{b}}} = 2\sqrt{ac}.$$

Arithmetik.

Eilftes Kapitel.

Von den Gleichungen überhaupt. Von den arithmetischen und geometrischen Proportionen insbesondere.

§. 170. Lehrsatz.

In jeder Gleichung zwischen zwei algebraischen Summen kann man beliebige Glieder auf der einen Seite weglassen und sie, mit dem entgegengesetzten (+ oder —) Zeichen versehen, auf die andere Seite hinschreiben in beliebiger Ordnung, und, was herauskommt, ist dann abermals eine richtige Gleichung.

Ist z. B. gegeben

$$a-b-c+d-f=-m+n-p,$$

so ist auch $a-b-c+d-f+m+p=n,$

oder $d-f+m=n-p-a+b+c,$

oder $m=n-p-a+b+c-d+f,$

oder $m-n+p+a-c+d-f=b,$

oder $m-n+p+a-b-c=-d+f,$

oder $m-n-b=-d+f-p-a+c;$ u. s. w. f.

Beweis. Denn jedes Glied, als additive oder subtraktive Zahl betrachtet (§. §. 17. 18.), welches man von

der einen Seite wegläßt, ist von dieser Seite subtrahirt. — Subtrahirt man nun dasselbe Glied auch von der andern Seite, d. h. schreibt man es mit dem entgegengesetzten (+ oder —) Zeichen versehen auf die andere Seite hin (§. 20.), so ist dasselbe Glied auf beiden Seiten subtrahirt, und deshalb die Resultate wieder einander gleich.

Note. Hat man also z. B.

so folgt

$$8-3+7=9+5-2,$$
$$8-3+7-9+2=5;$$
$$8-3=5-7+9-2;$$
$$8-3-5+2=9-7;$$
$$8+7-3-5+2=9;$$ u. s. w. f.

Anmerkung. Man betrachtet aber jede Gleichung als eine Gleichung zwischen zwei algebraischen Summen, weil, wenn eine der beiden Seiten auch keine solche seyn sollte, man den Ausdruck doch als ein Glied einer solchen Summe betrachten kann, deren folgende Glieder 0 und weggelassen sind. — So z. B. in der Gleichung

$$\frac{a}{b-x}-\frac{c-d}{x}=\frac{p\sqrt[n]{a}}{q}$$

ist der Ausdruck links des (=) Zeichens eine zweigliedrige algebraische Summe; und den Ausdruck rechts $\frac{p\sqrt[n]{a}}{q}$ betrachtet man als eine (eingliedrige) algebraische Summe deren übrigen Glieder 0 und deshalb weggelassen sind.

Eine solche Verallgemeinerung der Ansicht vermindert aber die Zahl der praktischen Regeln und ist daher in der Praxis selbst sehr erwünscht.

Die Glieder der gleichen algebraischen Summen nennt man auch die Glieder der Gleichung.

§. 171. Zusatz.

Man kann aus demselben Grunde in einer Gleichung auch alle Glieder auf der einen Seite weglassen und auf die andere Seite hinsetzen, mit dem entgegengesetzten (+ oder —) Zeichen versehen, wenn man nur 0 (Null) an die Stelle der erstern Seite schreibt. — Z. B. wenn man hat

$$a - b - c + d = -p + q - r,$$

so kann man daraus ableiten

$$a - b - c + d + p - q + r = 0$$

auch $0 = -a + b + c - d - p + q - r$; u. s. w. f.

§. 172. Lehrsatz.

Wenn man alle Glieder einer Gleichung auf jeder Seite der Gleichung mit einem und demselben Ausdruck multiplicirt oder dividirt und die entstehenden Resultate durch dieselben (+ oder −) Zeichen mit einander verbindet, durch welche die Glieder der gegebenen Gleichung selbst mit einander verbunden sind, so hat man abermals eine richtige Gleichung. — Hat man z. B.

$$a - b - c + d = m - n + p - q$$

und man dividirt oder multiplicirt so jedes Glied mit x, so erhält man:

$$\frac{a}{x} - \frac{b}{x} - \frac{c}{x} + \frac{d}{x} = \frac{m}{x} - \frac{n}{x} + \frac{p}{x} - \frac{q}{x}$$

und $ax - bx - cx + dx = mx - nx + px - qx.$

Beweis. Denn, wenn man so verfährt, so hat man die beiden gleichen algebraischen Summen, welche die Seiten der Gleichung bilden (nach §. 45.) mit einem und demselben Ausdruck multiplicirt oder dividirt, und so müssen auch die neu entstehenden algebraischen Summen einander gleich seyn.

Anmerkung. Im Falle man so jede Seite der Gleichung multiplicirt oder dividirt, sagt man: die Gleichung werde multiplicirt oder dividirt.

§. 173. Zusatz.

Man kann sich aber dieses Lehrsatzes bedienen, um aus einer gegebenen Gleichung die Brüche wegzuschaffen, die sie enthält, d. h. um aus einer gegebenen Gleichung, deren Glieder Brüche enthalten, eine andere Gleichung abzuleiten, welche keine Brüche mehr hat. — Man darf zu dem Ende nur die

gegebene Gleichung mit dem Nenner des wegzuschaffenden Bruches multipliciren, und, wenn alle Brüche auf einmal wegfallen sollen, mit dem General-Nenner (Kap. 6. VI.), indem man nach (§. 172.) verfährt und dabei die Formeln (§. §. 26. 35.) besonders aber (§. 35. n. 5.) in Anwendung bringt.

Beispiel. Hat man z. B. die Gleichung gegeben:

1) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x-1=\frac{42x}{5}-\frac{3x}{8}-18\frac{3}{4}$,

so ist der General-Nenner nach (§. 93.)=120; und wenn mit 120 die Gleichung multiplicirt wird, so erhält man nach (§. 35. n. 5.) und (§. 172.)

2) $60x-40x+30x-120=1008x-45x-2250$,

welche neue Gleichung richtig seyn muß, wenn die gegebene richtig war, während sie keinen Bruch mehr enthält.

Man konnte auch die gegebene Gleichung (1.) zuerst bloß mit 2 multipliciren, und erhielt:

3) $x-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x-2=\frac{84x}{5}-\frac{3x}{4}-37\frac{1}{2}$.

Diese wieder mit 4 multiplicirt giebt:

4) $4x-\frac{8}{3}x+2x-8=\frac{336x}{5}-3x-150$.

Diese noch mit 3 multiplicirt, wird hervorbringen:

5) $12x-8x+6x-24=\frac{1008x}{5}-9x-450$.

Und wenn man diese zuletzt noch mit 5 multiplicirt, so erhält man:

6) $60x-40x+30x-120x=1008x-45x-2250$,

welche Gleichung (6.) dieselbe ist, wie die oben sogleich gefundene Gleichung (2.).

Uebungs-Beispiele. Man soll aus nachstehenden Gleichungen die Brüche wegschaffen:

1) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; 2) $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{p}{q}$; 3) $\frac{m}{n}-\frac{p}{2q}+\frac{r}{4n}=0$;

4) $a-\frac{b-2c}{x}=d-\frac{3f-4g}{2x}$;

5) $\frac{a-x}{24}-\frac{2b-3x}{12}+\frac{c-2x}{16}-3\frac{3}{4}=\frac{7x-3}{8}-2x-1+\frac{4x-3}{6}$;

6) $\frac{a}{2x}-\frac{b}{4x}+3c-\frac{5d}{6x}-\frac{3}{4}=\frac{7a}{x}-\frac{8b-3c}{8x}-\frac{2c-3d}{3x}-d$;

7) $7a-2b-\frac{7c-2d}{3x}-\frac{p}{q}=\frac{3}{4}-7a-\frac{7b}{6x}+\frac{2a-3b}{4x}-\frac{c-d}{x}$;

8) $\frac{a-2b}{4-x}-\frac{2c+3d}{5-2x}=\frac{4c-3a}{8-2x}-3$.

Aus diesen Gleichungen, wenn man die Brüche wegschafft, gehen aber hervor der Nummer nach:

1) $ad=bc$; 2) $adq-bcq=bdp$; 3) $4mq-2np+rq=0$;

4) $2ax-(2b-4c)=2dx-(3f-4g)$

oder $2ax-2b+4c=2dx-3f+4g$;

5) $2a-2x-(8b-12x)+(3c-6x)-180=42x-18-96x-48$
$+(32x-24)$

oder $2a-2x-8b+12x+3c-6x-180=42x-18-96x-48+32x-24$;

6) $12a-6b+72cx-20d-18x=168a-(24b-9c)-(16c-24d)-24dx$

oder $12a-6b+72cx-20d-18x=168a-24b+9c-16c+24d-24dx$;

7) $84aqx-24bqx-28cq+8dq-12px=9qx-84aqx-14bq$
$+6aq-9bq-12cq+12dq$.

Von der Gleichung (8.) ist der General-Nenner $2(4-x)(5-2x)$, also wenn man damit multiplicirt:

8) $2(a-2b)(5-2x)-2(4-x)(2c+3d)=(4c-3a)(5-2x)$
$-3.2.(4-x)(5-2x)$

oder $10a-20b-4ax+8bx-16c-24d+4cx+6dx=$
$20c-15a-8cx+6ax-120+78x-12x^2$.

Anmerkung 1. In allen diesen Gleichungen, in den gegebenen als auch in den neuen abgeleiteten, also vor oder nach der Multiplikation, kann man aber auch noch allemal den Lehrsatz (§. 170.) anwenden, und beliebige Glieder von der Linken zur Rechten, und zugleich auch beliebige Glieder von der Rechten zur Linken bringen, indem man sie nur auf der einen Seite wegläßt und auf die andere hinschreibt mit dem entgegengesetzten (+ oder −) Zeichen versehen. — Auch kann man in jeder dieser Gleichungen, also vor und nach der Multiplikation, beliebige Glieder der algebraischen Summen, die links oder rechts stehen, und die sich bequem in ein Glied vereinigen lassen, zusammennehmen, und man wird so immer neue und neue Gleichungen erhalten, immer verschieden von der gegebenen Gleichung, die aber doch jedesmal richtige Gleichungen seyn müssen, wenn nur die gegebene selbst richtig ist.

Anmerkung 2. Bei diesem Wegschaffen der Brüche ist es praktisch sehr vortheilhaft, daß man vorher jedesmal so viel wie möglich Glieder

in ein einziges zusammenfasse, weil man desto weniger zu multipliciren haben wird, je weniger Glieder in der Gleichung selbst vorkommen. —

Nimmt man z. B. die vorliegende Gleichung (n. 8.) nehmlich:

$$1)\quad \frac{a-2b}{4-x}-\frac{2c+3d}{5-2x}=\frac{4c-3a}{8-2x}-3,$$

so bemerkt man leicht, daß man nur Zähler und Nenner des ersten Gliedes $\frac{a-2b}{4-x}$ mit 2 zu multipliciren braucht, um einen neuen Bruch $\frac{2a-4b}{8-2x}$ zu erhalten, welcher erstlich dem fraglichen gleich ist, aber mit dem ersten Gliede $\frac{4c-3a}{8-2x}$ auf der andern Seite der Gleichung einerlei Nenner hat. Schafft man daher in der Gleichung das Glied $\frac{4c-3a}{8-2x}$ links herüber und vereinigt es sogleich mit dem Gliede $\frac{a-2b}{4-x}$, so erhält man:

$$2)\quad \frac{5a-4b-4c}{8-2x}-\frac{2c+3d}{5-2x}=-3$$

und schafft man nun aus dieser Gleichung erst die Brüche weg, sie mit $(8-2x)(5-2x)$ oder $40-26x+4x^2$ multiplicirend, so erhält man jetzt sogleich:

$$3)\quad 25a-20b-20c-10ax+8bx+8cx-16c-24d+4cx+6dx = -120+78x-12x^2;$$

aus welcher die Brüche ganz herausgefallen sind und welche nothwendig noch richtig ist, sobald nur die Gleichung (n. 1.) als eine richtige angenommen wird.

In den folgenden Gleichungen wird, wenn man versucht aus ihnen die Brüche wegzuschaffen, die Gelegenheit, diese praktische Bemerkung in Anwendung zu bringen, sich mehrfach darbieten:

$$1)\quad \frac{2}{3x}-\frac{7}{x}-25=\frac{8}{2x}+\frac{7-x}{3x}-5+3x;$$

$$2)\quad \frac{4-3x}{2x-3}+x-\frac{2-4x}{4x-6}=\frac{7}{x}-2x+\frac{8-5x}{3x}.$$

Ferner wird man diesen praktischen Vortheil namentlich auch in den Uebungs-Beispielen (4—7.) des (§. 173.) in Anwendung bringen können.

§. 174. Zusatz.

So wie man aber Brüche wegschafft, indem man beide Seiten der Gleichung mit dem Nenner des wegzuschaffenden Bruches multiplicirt (oder mit dem General-Nenner, wenn mehre Brüche zugleich und auf einmal weggeschafft

werden sollen) eben so kann man Wurzeln aus einer Gleichung wegschaffen, indem man mit dem Wurzel-Exponenten potenzirt, nur muß hier die Wurzel (oder das Glied welches die wegzuschaffende Wurzel als Faktor oder als Divisor enthält) ganz allein auf einer Seite stehen, wenn die Wurzel wegfallen soll.

Hat man z. B. die Gleichung:

$$1)\quad \frac{2x}{3}-b-\frac{2\sqrt[3]{b+x}}{3a}=a-b,$$

so leite man daraus nach (§. 170.) erst ab:

$$2)\quad -\frac{2\sqrt[3]{b+x}}{3a}=a-\frac{2x}{3}$$

und diese nun kubirt (mit 3 potenzirt), giebt:

$$3)\quad -\frac{8b+8x}{27a^3}=a^3-2a^2x+\tfrac{4}{3}ax^2-\tfrac{8}{27}x^3,$$

welche Gleichung keine Wurzel mehr enthält, aus welcher aber auf demselben Wege jetzt auch noch eine 2te Wurzel weggeschafft werden könnte, wenn sie noch eine solche enthielte.

Anmerkung 1. Hätte man z. B. die Gleichung:

$$1)\quad a-\sqrt{x}=b$$

und wollte man hier geradezu mit 2 potenziren, so erhielte man

$$2)\quad (a-\sqrt{x})^2=b^2$$

oder $$3)\quad a^2-2a\sqrt{x}+x=b^2$$

und man sieht, wie nun die Wurzel $\sqrt{x}$ nicht weggefallen ist. Hätte man dagegen in (1.) das Glied a zuerst hinübergebracht und die Gleichung

$$4)\quad -\sqrt{x}=b-a$$

erhalten und diese nun quadrirt (mit 2 potenzirt), so würde man augenblicklich erhalten haben:

$$5)\quad x=(b-a)^2$$

oder $$6)\quad x=b^2-2ab+a^2.$$

Anmerkung 2. Wäre die Gleichung gegeben gewesen:

$$1)\quad a=b\sqrt{x}+c\sqrt[3]{a+x},$$

so mußte man zuerst $\sqrt[3]{a+x}$ wegschaffen, dadurch, daß man das andere Glied $b\sqrt{x}$ zuerst links herüberbringt (§. 170.) und dann kubirt (mit 3 potenzirt.). Man erhält dann:

2) $a-b\sqrt{x}=c\sqrt[3]{a+x}$

und 3) $(a-b\sqrt{x})^3=c^3(a+x)$

oder 4) $a^3-3a^2b\sqrt{x}+3ab^2x-b^3x\sqrt{x}=c^3(a+x)$

oder 5) $a^3+3ab^2x-(3a^2b+b^3x)\sqrt{x}=c^3(a+x)$.

Und um nun hieraus noch die $\sqrt{x}$ wegzuschaffen, bringt man die übrigen Glieder links hinüber, um

6) $-(3a^2b+b^3x)\sqrt{x}=c^3(a+x)-a^3-3ab^2x$

zu erhalten, und quadrirt nun noch beide Seiten, welches giebt:

7) $(3a^2b+b^3x)^2.x=[c^3(a+x)-a^3-3ab^2x]^2$

oder 8) $9a^4b^2x+6a^2b^4x^2+b^6x^3=c^6(a^2+2ax+x^2)+a^6+6a^4b^2x$
$+9a^2b^4x^2-2c^3(a+x)(a^3+3ab^2x)$,

aus welcher Gleichung auch noch die Klammern wegfallen können, wenn man (§. 45.) anwendet.

Anmerkung 3. Ohne uns jedoch hier länger mit diesen allgemeinen Sätzen zu befassen, wollen wir solche lieber zunächst auf diejenigen Gleichungen anwenden, welche unter dem Namen der Zahlen-Proportionen vorkommen.

§. 175. Erklärung.

Eine Gleichung zwischen zwei Differenzen z. B.

$$a-b=c-d,$$

nennt man zuweilen auch eine arithmetische Proportion, während man unter geometrischer (Zahlen)-Proportion oder Proportion schlechtweg, allemal eine Gleichung zwischen zwei Quotienten z. B.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \text{oder} \quad a:b=c:d$$

versteht. — Die Differenzen $a-b$ und $c-d$ nennt man dann wohl auch arithmetische Verhältnisse, so wie die Quotienten $a:b$ und $c:d$ auch geometrische (Zahlen)-Verhältnisse genannt werden. Die Minuenden und die Subtrahenden a, b, c, d in den arithmetischen Verhältnissen, und die Dividenden und die Divisoren a, b, c, d

in den geometrischen Verhältnissen, nennt man auch die Glieder der Proportion. *)

Sind in einer Proportion die mittlern Glieder einander gleich z. B. in

$$a - b = b - c$$

oder in

$$a : b = b : c,$$

so heißt sie eine stetige Proportion, und b heißt dann die mittlere Proportional-Zahl zwischen a und c; so wie c die dritte Proportional-Zahl zu a und b.

§. 176. Lehrsatz.

In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äußern Glieder gleich der Summe der mittlern Glieder. — Ist nehmlich

$$a - b = c - d,$$

so ist allemal

$$a + d = b + c.$$

Beweis fällt nach (§. 170.) in die Augen.

§. 177. Zusatz.

Auch folgt aus $a - b = c - d$, noch:

$$d = b + c - a$$

$$a = b + c - d$$

$$b = a + d - c$$

$$c = a + d - b.$$

§. 178. Zusatz.

Und in der stetigen arithmetischen Proportion

---

*) Die Gleichung $a:b = c:d$ oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ besteht nur aus 2 Gliedern von denen $a:b$ das eine und $c:d$ das andere ist. Wenn daher eine geometrische Zahlen-Proportion auch nichts weiter ist, als eine Gleichung, so muß man doch Glied der Proportion von dem Gliede der Gleichung wohl unterscheiden, so wie dieses der (§. 175.) selbst angiebt. — In der arithmetischen Proportion aber ist Glied der Proportion und Glied der Gleichung wiederum ein und dasselbe.

$$a-b=b-c$$

ist
$$a+c=b+b=2b$$

und
$$b=\frac{a+c}{2};$$

und diese Zahl b heißt auch das arithmetische Mittel zwischen a und c.

Anmerkung. Ueberhaupt versteht man unter dem arithmetischen Mittel zwischen z. B. 5 Zahlen a, b, c, d, e, den Quotienten $\frac{a+b+c+d+e}{5}$; u. s. w.

§. 179. Lehrsatz.

In jeder geometrischen Proportion

$$a:b=c:d$$

ist das Produkt der äußern Glieder ad gleich dem Produkte der beiden mittlern bc, d. h. aus der Gleichung

$$a:b=c:d$$

folgt
$$ad=bc.$$

Beweis ergiebt sich, indem man aus der Gleichung $a:b=c:d$ oder $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ die Brüche wegschafft, nach (§. 173.).

§. 180. Zusatz.

Ist daher $a:b=c:d$ gegeben, so hat man nicht nur $ad=bc$, sondern auch, indem man diese letztere Gleichung auf beiden Seiten zuerst durch a, dann durch d, nachher durch c, zuletzt durch b dividirt:

$$d=\frac{bc}{a};\quad a=\frac{bc}{d};\quad b=\frac{ad}{c}\quad \text{und}\quad c=\frac{ad}{b},$$

so daß also jedes Glied der Proportion gefunden werden kann, wenn die 3 übrigen gegeben sind. — Ist aber gegeben

$$a:b=b:c,$$

so hat man

$ac=b^2$, also $b=\sqrt{ac}$; d. h. die mittlere

geometrische Proportional-Zahl zwischen zwei gegebenen Zahlen a und c wird gefunden, wenn man diese letzteren mit einander multiplicirt und dann die Quadrat-Wurzel auszieht.

Beispiele. Die 4te geometrische Proportional-Zahl

zu 2, 5, 8 ist 20,

zu 9, 7, 4 ist $3\frac{1}{9}$,

zu 16, 12, 20 ist 15;

die dritte geometrische Proportional-Zahl zu 4 und 6 ist 9, zu 2 und 5 ist $12\frac{1}{2}$, zu 9 und 6 ist 4, so 5 und 2 ist $\frac{4}{5}$; u. dergl. m.;

die mittlere geometrische Proportional-Zahl endlich zu 2 und 18 ist 6, zu 3 und 27 ist 9, zwischen 4 und 16 ist 8, zwischen 6 und 24 ist 12, zwischen 2 und $\frac{2}{2}$ ist 3, zwischen $2\frac{2}{3}$ und 6 ist 4; u. s. w.

§. 181. Zusatz.

Sind zwei Proportionen gegeben und unter einander geschrieben, z. B.

$$m:n=p:q$$

und

$$a:b=c:d$$

und sind 3 der 4 Paare unter einander stehender Glieder einander gleich, z. B. $a=m$, $c=p$ und $d=q$, so ist nothwendig auch das 4te Paar einander gleich, nehmlich auch $b=n$; weil $b=\frac{ad}{c}$ und $n=\frac{mq}{p}$ ist.

§. 182. Zusatz.

Sind 2 Produkte fg und hm einander gleich, so kann man die Gleichung $fg=hm$ leicht auf die Form einer Proportion bringen, wenn man die beiden Faktoren eines jeden der Produkte, beide zu äußeren, oder beide zu mittleren Glieder der Proportion nimmt.

Also aus $fg=hm$ folgt:

1) f:h=m:g
2) f:m=h:g
3) g:h=m:f
4) g:m=h:f
5) h:f=g:m
6) h:g=f:m
7) m:f=g:h
8) m:g=f:h.

Denn man darf nur die gegebene Gleichung fg=hm, auf beiden Seiten zuerst durch gh, dann durch mh, dann durch fm, zuletzt durch fh dividiren, und man erhält augenblicklich die Gleichungen (1.—4.), welches zugleich auch die Gleichungen (5.—8.) sind, wenn man die gleichen Quotienten auf beiden Seiten des (=) Zeichens mit einander vertauscht.

§. 183. Zusatz.

Daraus geht zu gleicher Zeit hervor, daß man in einer gegebenen geometrischen Proportion

a:b=c:d

die Glieder beliebig versetzen kann, wenn nur beide mittlere Glieder b, c, allemal mittlere bleiben oder alle beide äußere Glieder werden. — Die vorzüglich oft vorkommenden Versetzungen von

	a:b=c:d
sind:	a:c=b:d
	b:a=d:c
	d:b=c:a; u. s. w. f.

§. 184. Zusatz.

Ferner kann man die Richtigkeit einer gegebenen Proportion daran erkennen, daß man die äußern Glieder mit einander multiplicirt und die mittlern Glieder mit einander, und zusieht, ob die Produkte einander gleich werden. Werden die Produkte einander gleich, so ist die Proportion richtig.

Note. So ist z. B. die Proportion 5:6=15:18 richtig, weil 5.18=90 und auch 6.15=90. — Eben so ist die Proportion 15:6=25:10 richtig, weil 15.10=150 und auch 6.25=150; u. s. w. f. — Eben so richtig sind aber auch die Proportionen

a:b=am:bm oder a:am=b:bm,

und an:bn=am:bm oder an:am=bn:bm

weil das Produkt der äußern Glieder =abmn und eben so groß auch das Produkt der mittlern Glieder ist, in den beiden letztern Proportionen, während in den erstern beiden, das Produkt der äußern, und das der mittlern Glieder allemal abm ist.

§. 185. Zusatz.

Nennt man in Proportionen zwei homologe Stellen, je zwei solche, welche nicht beide zugleich mittlere, und auch nicht beide zugleich äußere Stellen sind, so wird man je zwei Glieder in homologen Stellen mit einem und demselben Ausdruck multipliciren, oder dividiren können, und man wird aus der gegebenen immer eine neue richtige Proportion erhalten. — Ist z. B. gegeben

$$a:b=c:d$$

so hat man auch:

$$a:b=cm:dm,$$

auch $a:cm=b:dm$

auch $an:b=cn:d$

auch $an:bn=c:d$

auch $an:bn=cm:dm$

auch $an:bm=cn:dm$

auch $$a:b=\frac{c}{n}:\frac{d}{n}$$

auch $$a:\frac{b}{n}=c:\frac{d}{n}$$

auch $$am:\frac{b}{n}=cm:\frac{d}{n}$$

auch $$\frac{a}{m}:\frac{b}{n}=\frac{c}{m}:\frac{d}{n}$$

auch $$\frac{a}{m}:\frac{b}{m}=\frac{c}{n}:\frac{d}{n}$$ u. s. w. f.;

denn immer wird, weil $ad=bc$ ist, das Produkt der äußern Glieder gleich werden dem Produkte der mittlern Glieder.

§. 186. Lehrsatz.

In jeder geometrischen Proportion

$$a:b=c:d$$

verhält sich die $\left\{\begin{matrix}\text{Summe}\\\text{Differenz}\end{matrix}\right\}$ der Vorderglieder a und c zur $\left\{\begin{matrix}\text{Summe}\\\text{Differenz}\end{matrix}\right\}$ der Hinterglieder b und d, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede. — Ist nehmlich:

$$a:b=c:d$$

so ist auch 1) $a+c:b+d=a:b=c:d$

und 2) $a-c:b-d=a:b=c:d$.

Beweis. Denn weil $a:b=c:d$, so ist auch $ad=bc$. Nun ist in der Gleichung (1.) das Produkt der äußern Glieder $=d(a+c)=ad+cd$; und das Produkt der mittlern Glieder $=c(b+d)=bc+cd$; und weil diese Produkten-Werthe $ad+cd$ und $bc+cd$ einander gleich sind, so ist die Proportion richtig (§. 184.). — Eben so erkennt man auch die Richtigkeit der Gleichung (2.).

Anmerkung. Weil man, wenn $a:b=c:d$ gegeben ist, auch $a:c=b:d$ schreiben kann, so liefert dann der vorstehende Lehrsatz, auf diese letztere Proportion $a:c=b:d$ angewandt, auch noch

$$a\pm b:c\pm d=a:c=b:d,$$

während man wiederum in dieser und in jeder der andern Proportionen die Glieder nach (§. 183.) verwechseln kann; und immer Proportionen erhalten wird, die mit der gegebenen $a:b=c:d$ zu gleicher Zeit statt haben.

§. 187. Zusatz.

Sind daher mehre Verhältnisse (Quotienten) einander gleich z. B. $a:b=c:d=e:f=g:h$, so verhält sich auch die Summe aller Vorderglieder a, c, e, g zur Summe aller Hinterglieder b, d, f, h, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede, — d. h. ist gegeben

1) $a:b=c:d=e:f=g:h$,

so ist auch

2) $a+c+e+g:b+d+f+h=a:b=c:d=$ etc. etc.

Denn es ist das Produkt der äußern Glieder

$=b(a+c+e+g)=ab+bc+be+bg$;

und das Produkt der mittlern Glieder

$=(b+d+f+h)a=ab+ad+af+ah$. — Weil aber $a:b=c:d$, so ist auch $ad=bc$; und weil $a:b=e:f$, so ist auch $af=be$; und weil noch $a:b=g:h$, so ist auch $ah=bg$; folglich ist

$$b(a+c+e+g)=a(b+d+f+h),$$

also die Proportion (2.) richtig nach (§. 184.).

§. 188. Zusatz.

Ist überhaupt noch gegeben:

$$a:b=c:d,$$

so ist allemal

$$ma+nb:pa+qb=mc+nd:pc+qd.$$ —

Denn weil $ad=bc$ ist, so findet man das Produkt $(ma+nb)(pc+qd)$ der äußern Glieder, gleich dem Produkte $(pa+qb)(mc+nd)$ der mittlern Glieder.

§. 189. Lehrsatz.

Sind zwei Proportionen gegeben und unter einander geschrieben z. B.

1) $a:b=c:d$

und

2) $m:n=p:q$,

so bilden die Produkte oder die Quotienten der unter einander stehenden Glieder allemal auf's neue richtige Proportionen; nehmlich es ist dann allemal auch

3) $am:bn=cp:dq$

und

4) $\frac{a}{m}:\frac{b}{n}=\frac{c}{p}:\frac{d}{q}$.

Beweis. Denn multiplicirt man in den beiden Gleichungen (1.) und (2.) die Ausdrücke links mit einander, und

auch die Ausdrücke rechts mit einander, so müssen die Resultate links und rechts wieder einander gleich seyn; eben so, wenn man die Gleichungen links und rechts durch einander dividirt. — Aber gerade dadurch entstehen, wenn man (§. 41.) in Anwendung bringt, die Gleichungen (3.) und (4.).

§. 190. Zusatz.

Sind gegeben die Proportionen:

1) $a:b=c:d$

2) $m:n=p:q$

3) $x:y=z:\nu$

so ist auch 4) $amx:bny=cpz:dq\nu$.

Eben so wenn noch mehr Proportionen gegeben und mit einander multiplicirt wären.

Sind aber unter den obigen Proportionen Glieder in homologen Stellen dieselben (§. 185.), so kann man sie vor der Multiplikation gegenseitig durchstreichen.

Hat man z. B. $b=\nu$ und $z=d$, so lasse man diese gegenseitig weg, und man erhält statt der Proportion (4.), sogleich diese andere

5) $amx:ny=cp:q$ (wenn $b=\nu$ und $z=d$).

Aber eben so statt (4.):

6) $amx:bny=p:d$ (wenn $c=\nu$ und $z=q$)

und 7) $mx:by=cz:dq$ (wenn $a=n$ und $p=\nu$)

u. s. w. f. — Man sieht dies augenblicklich ein, wenn man auf die Gleichung (4.) den Satz (§. 38.) in Anwendung bringt.

§. 191. Lehrsatz.

Sind 4 Zahlen in Proportion; d. h. ist

$$a:b=c:d,$$

so bilden die Quadrate (2ten Potenzen), Kubi (dritten Potenzen), überhaupt die mten Potenzen; eben so die Quadrat-Wurzeln, Kubik-Wurzeln, überhaupt die mten Wurzeln (in so ferne man sich absolute Wurzeln denkt) aus diesen 4 Gliedern, ebenfalls in Proportion, d. h. ist gegeben:

$$a:b=c:d,$$

so ist auch
$$1)\ a^2:b^2=c^2:d^2,$$
$$2)\ a^3:b^3=c^3:d^3,$$
$$3)\ a^m:b^m=c^m:d^m;$$
und
$$4)\ \sqrt[3]{a}:\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{c}:\sqrt[3]{d},$$
$$5)\ \sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{c}:\sqrt[m]{d},$$
$$6)\ \sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{c}:\sqrt[m]{d}.$$

Beweis. Denn potenzirt man die Ausdrücke $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ links und rechts in der Gleichung $a:b=c:d$, mit 2, oder mit 3, oder mit m, oder zieht man aus $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ die 2te, 3te oder mte Wurzel, so müssen die Resultate wiederum gleich seyn, wenn man bei den Wurzeln absolute Wurzeln sich denkt. Verrichtet man aber dieses Potenziren und dieses Wurzel-Ausziehen, indem man die Formeln (§. 58. und §. 66.) anwendet, so erhält man die obigen Gleichungen (1—6.).

Note. Ist z. B. gegeben:
$$6:9=8:12,$$
so ist auch $6^2:9^2=8^2:12^2$ d. h. $36:81=64:144$
und $6^3:9^3=8^3:12^3$ d. h. $216:729=512:1728.$

Und hat man gegeben:
$$64:729=4096:46656$$
so ist auch $\sqrt{64}:\sqrt{729}=\sqrt{4096}:\sqrt{46656}$ d. h. $8:27=64:216$
und auch $\sqrt[3]{64}:\sqrt[3]{729}=\sqrt[3]{4096}:\sqrt[3]{46656}$ d. h. $4:9=16:36$
und noch $\sqrt[6]{64}:\sqrt[6]{729}=\sqrt[6]{4096}:\sqrt[6]{46656}$ d. h. $2:3=4:6;$
u. s. w. f.

Schluß-Anmerkung.

Von diesen geometrischen Zahlen-Proportionen, unterscheiden wir in der Folge die geometrischen Größen-Proportionen. Man drückt nehmlich in der Folge (in der allgemeinen Größenlehre) jede Größe als eine benannte Zahl (ganze oder gebrochene aber immer absolute) aus, und be-

zieht sie alle, so viel wie möglich auf dieselbe Einheit. Sind nun 4 Grö-ßen A, B, C, D dergestalt als benannte Zahlen ausgedrückt, daß A z. B. das afache von P, B das bfache von P, eben so C das cfache von Q und D das dfache von Q ist, wo P und Q beliebige Einheiten oder Gemäße sind, a, b, c, d absolute (unbenannte) ganze oder gebrochene Zahlen, so ist das Verhältniß der Größen A zu B nichts weiter als der Quotient $\frac{a}{b}$ oder a:b (§. 5. Einl.); und das Verhältniß der Größe C zur Größe D nichts weiter als der Quotient $\frac{c}{d}$ oder c:d. — Und die 4 Größen A, B, C, D bilden eine Größen-Proportion (so wird dies in der Folge erklärt werden) wenn die Verhältnisse von A zu B und von C zu D einander gleich sind, d. h. wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ oder wenn

a:b = c:d, d. h. wenn die Maaße a, b, c, d eine Zahlen-Proportion bilden. — Indem man hienach jede Größen-Proportion auf eine Zahlen-Proportion, d. h. auf eine Gleichung zwischen zwei Quotienten reducirt, kann man die hier vorstehenden Sätze der Zahlenlehre ohne weiters anwenden, und umgekehrt kann man dann jede Zahlen-Proportion m:n = p:q, sogleich wieder in eine Größen-Proportion verwandeln, wenn man m und n, eben so p und q paarweise als benannte Zahlen betrachtet, die sich auf einerlei Einheit beziehen.

Uebersieht man endlich die ganze hier vorgetragene Lehre der Zahlen-Proportionen, so erkennt man leicht, daß sie demjenigen überflüssig ist, welcher überhaupt Gleichungen zu behandeln versteht, und welcher dann gewiß auch diese, unter allen die einfachsten behandeln wird können. — Einige Bequemlichkeit gewährt es Anfängern jedoch allemal, die Sätze der Zahlen-Proportionen im Gedächtniß zu haben, weil man dann dieselben Resultate nicht jedesmal auf's neue erst wieder zu entwickeln braucht.

Arithmetik.

Zwölftes Kapitel.

Von den Bestimmungs-Gleichungen; insbesondere von den algebraischen. Auflösung der einfachen algebraischen Gleichungen mit einem oder mit mehreren Unbekannten.

§. 192. Erklärung.

Jede Gleichung, in welcher der Buchstabe x vorkommt, heißt in Bezug auf diesen Buchstaben x eine identische, wenn sie für jeden Werth von x gelten soll; dagegen in Bezug auf denselben Buchstaben x eine Bestimmungs-Gleichung, wenn sie nicht für jeden Werth (sondern nur für einen oder höchstens einige Werthe) von x statt findet. — In so ferne in dem letztern Fall der Werth von x, für welchen die Gleichung eine richtige wird, in der Regel noch unbekannt ist, nennt man x den Unbekannten, und die Gleichung selbst dient dann gewöhnlich dazu, diesen noch unbekannten Werth von x zu finden (zu bestimmen, daher der Name Bestimmungs-Gleichung). — Eine Bestimmungs-Gleichung nennt man in Bezug auf ihren Unbekannten x aufgelöst, wenn man den Werth oder die Werthe von x gefunden hat, den oder welche dieses x in der Gleichung vorstellt.

Note. So z. B. sind die Gleichungen

$a-(a-x)=x$, $(a-x)-(b-x)=(a+x)-(b+x)$; $a:\frac{a}{bx}=bx$;

u. s. f. lauter identische Gleichungen, in Bezug auf x; eben so auch

$(x+5)-5=(x-5)+5$ oder $\frac{a-bx}{c}+x=\frac{(c-b)x}{c}+\frac{a}{c}$,

$\frac{4-3x}{2}-2x=2-\frac{7}{2}x$, u. s. w. f., weil sie alle für jeden beliebigen Werth von x gelten; — so sind alle die Gleichungen aller frühern Kapitel im Allgemeinen (mit Ausnahme des vorhergehenden, und einzelner seltener Fälle) in Bezug auf jeden der darin vorkommenden Buchstaben identische gewesen, weil sie alle (mit seltenen Ausnahmen) für jeden Werth eines jeden der Buchstaben gelten, eben weil man sich bei ihrer Aufstellung um die Bedeutung der einzelnen Buchstaben gar nicht bekümmert hat. — Dagegen ist die Gleichung $17-x=6+x$ in Bezug auf den Buchstaben x eine Bestimmungs-Gleichung, weil sie nicht für jeden Werth von x gilt, z. B. nicht für $x=1$; denn dafür hätte man links 16, rechts aber 7; also nicht gleiche Ausdrücke. — Die Gleichung $17-x=6+x$ gilt also nur für einen (oder einige) Werth(e) von x, nnd dient eben dazu, um den Werth zu finden, den dieses x in der Gleichung vorstellen muß, wenn sie selbst eine richtige Gleichung werden soll. Man erhält aber aus:

$17-x=6+x$,

zunächst nach (§. 170.) $17=6+2x$,

dann $17-6=2x=11$,

zuletzt, links und rechts durch 2 dividirend, $x=\frac{11}{2}$, so daß also $\frac{11}{2}$ der vorher noch unbekannte Werth von x ist, der allein statt x gesetzt, die gegebene Gleichung als eine richtige Gleichung herstellen wird. — Der Buchstabe x heißt daher der Unbekannte, und indem man aus $17-x=6+x$ die Gleichung $x=\frac{11}{2}$ ableitete, hat man die Gleichung $17-x=6+x$ nach dem Unbekannten x aufgelöst.

§. 193. Zusatz.

Man theilt aber die Bestimmungs-Gleichungen nach x ein, in algebraische und in transcendente. — Zu den algebraischen Gleichungen rechnet man alle diejenigen, welche unter der Voraussetzung, daß x der Unbekannte ist, zuletzt auf eine von den Formen:

1) $bx=a$

oder 2) $cx^2+bx=a$

oder 3) $dx^3+cx^2+bx=a$

oder 4) $ex^4+dx^3+cx^2+bx=a$

oder überhaupt

5) $qx^\mu+px^{\mu-1}+hx^{\mu-2}+\ldots+cx^2+bx=a$

gebracht werden können; während jede andere Bestimmungs-Gleichung z. B. $a^x = b$, und dergl. m. eine transcendente Gleichung genannt wird, in Bezug auf diesen Unbekannten x.

Die algebraischen Gleichungen theilt man wieder ein, in einfache (wenn sie die obige Form (1.) annehmen können), in quadratische (wenn sie auf die Form (2.) zu bringen sind), in kubische (wenn sie die Form (3.) annehmen dürfen), in biquadratische (wenn sie von der Form (4.) sind), endlich überhaupt in höhere, (wenn sie irgend eine der Formen (2—5.) erhalten können); und man sagt „die höhere Gleichung sey vom 2ten, 3ten, 4ten oder μten Grade, je nachdem sie die Form (2.) oder (3.) oder (4.) oder (5.) hat, oder doch auf eine dieser Formen gebracht werden kann." —

In jeder dieser algebraischen Gleichungen nennt man

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \text{etc.}\quad m,\ n,\ p,\ q$$

die Coefficienten der Gleichung, und jeder derselben, wenn er nur nicht zur höchsten Potenz von x gehört, kann auch 0 (Null) seyn, so daß die Glieder selbst ganz herausfallen, wenn nur die höchste Potenz von x, welche den Grad der Gleichung bestimmt, nicht herausfällt.

Note. Von der Gleichung z. B.

$$\frac{4}{x} - a + \frac{b}{5-x} = c - \frac{c}{4x}$$

kann man eigentlich so gerade zu nicht behaupten, ob sie nach x zu den algebraischen oder zu den transcendenten Gleichungen gehöre. Schafft man aber nach (§. 173.) die Brüche weg, indem man die Gleichung mit dem General-Nenner $4x(5-x)$ multiplicirt, so erhält man:

$$80 - 16x - 20ax + 4ax^2 + 4bx = 20cx - 4cx^2 - 5c + cx;$$

und wenn man hier alle Glieder rechts herüberschafft (§. 170.), welche x enthalten, die übrigen alle hinüber, und wenn man zugleich diejenigen zusammennimmt, welche dieselbe Potenz von x zum Faktor haben, so erhält man:

$$4(a+c)x^2 + (4b - 20a - 21c - 16)x = -5c - 80$$

und jetzt ist die Gleichung auf die Form (2.) gebracht, wird also zu den quadratischen, oder höhern Gleichungen des 2ten Grades gerechnet.

Anmerkung. Uebrigens beschäftigen wir uns hier meist und hauptsächlich nur mit den algebraischen Gleichungen, und werden bloß in dem der

Lehre der Logarithmen gewidmeten Kapitel noch einige wenige sogenannte logarithmische Gleichungen, welche zu den transcendenten gehören und welche in den elementaren Anwendungen vorkommen, berücksichtigen.

§. 194. Zusatz.

Eine algebraische Gleichung heißt nach ihrem Unbekannten x geordnet, wenn sie bereits so umgewandelt ist, daß sie eine der Formen (§. 193.) angenommen hat. — Also erst, nachdem die Gleichung geordnet ist, kann man entscheiden, von welchem Grade sie seyn werde.

Um aber eine algebraische Gleichung zu ordnen, muß man 1) die Brüche wegschaffen nach (§. 173.), 2) wenn der Unbekannte unter der Wurzel vorkommt, suchen, diese Wurzel durch Potenziren (auf beiden Seiten) wegzuschaffen, (weil $\sqrt[m]{x}$ mit m potenzirt allemal x selbst giebt), (nach §. 174.), 3) alle Klammern, innerhalb welcher der Unbekannte vorkommt, dadurch wegschaffen, daß man die angezeigten Multiplikationen, Potenzirungen, Additionen und Subtraktionen und dergl. wirklich verrichtet, so nehmlich, daß man zuletzt allemal links und rechts bloß Glieder hat von der Form A oder Bx oder Cx^2, u. s. w. f., 4) diese Glieder, welche x enthalten, alle auf die eine Seite schaffen und zusammennehmen, die übrigen aber, die nicht x enthalten, auf die andere Seite bringen und ebenfalls möglichst zusammennehmen. Auf diesem Wege wird man zuletzt allemal eine der Formen (1—5. §. 193.) erhalten; d. h. die Gleichung selbst geordnet haben.

Anmerkung. Ehe man die Brüche wegschafft nach (§. 173.), schon die Glieder der gegebenen Gleichung möglichst zu vereinigen, ist eine Regel der Praxis, weil man dadurch den Vortheil sich verschafft, bei dem Multipliciren (mit den einzelnen Nennern oder mit dem General-Nenner) desto weniger Glieder multipliciren zu dürfen. So ließ sich aus der Gleichung (Note zu §. 193.)

$$\frac{4}{x} - a + \frac{b}{5-x} = c - \frac{c}{4x}$$

erst diese andere

$$\frac{4}{x} + \frac{c}{4x} - (a+c) + \frac{b}{5-x} = 0$$

oder $$\frac{16+c}{4x}-(a+c)+\frac{b}{5-x}=0$$

ableiten, und nun letztere erst mit $4x(5-x)$ oder $20x-4x^2$ multipliciren; dann erhielt man:

$$5(16+c)-(16+c)x-20(a+c)x+4(a+c)x^2+4bx=0$$

oder $$4(a+c)x^2+(4b-20a-21c-16)x=-5(16+c)$$

die geordnete Gleichung, dieselbe welche dort auch erhalten worden. (Vergl. Anmerk. zu §. 173. wo dieselbe Bemerkung schon gemacht wurde).

§. 195. Zusatz.

Findet man nun, nachdem die Gleichung nach x geordnet ist, daß sie zu den einfachen Gleichungen (Gleichungen des 1ten Grades) gehört, d. h. die Form

$$Ax=B$$

angenommen hat, so darf man nur noch durch A auf beiden Seiten dividiren, um $x=\frac{B}{A}$ zu erhalten, welches die Auflösung der gegebenen Gleichung dann ist.

Beispiel 1. Die Gleichung

$-2.\frac{29-5y}{7}+\frac{7}{3}y=3$ nach y aufzulösen, d. h. den Werth suchen, den y in dieser Gleichung vorstellt.

Schafft man zuerst die Brüche weg, mit 7.3 oder 21 multiplicirend, so erhält man:

$$-2.3.(29-5y)+7.7.y=3.7.3,$$

oder $$-174+30y+49y=63,$$

oder $$79.y=63+174=237;$$

und die Gleichung $79y=237$ ist nun die geordnete. Durch 79 wegdividirend auf beiden Seiten, erhält man nun die Auflösung

$$y=\frac{237}{79}=3.$$

In der gegebenen Gleichung stellt also y den Werth 3 vor, und nur dieser Werth, statt y gesetzt, macht die gegebene Gleichung zu einer richtigen.

Beispiel 2. Die Gleichung

$$mx-n.\frac{c+bx}{a}=p-q.\frac{m-nx}{4ab}$$

aufzulösen. —

Schafft man hier zuerst die Brüche weg, mit 4ab die Gleichung multiplicirend, so erhält man:

$$4abmx-4bcn-4b^2nx=4abp-mq+nqx$$

und dann $$(4abm-4b^2n-nq)x=4abp-mq+4bcn$$

und hieraus $$x=\frac{4abp-mq+4bcn}{4abm-4b^2n-nq}.$$

Beispiel 3. Die Gleichung

$$\frac{4}{5-2z}=\frac{7}{4z-5}$$

aufzulösen.

Weil diese Gleichung zu derjenigen Gattung gehört, die man auch Proportionen nennt (eine Gleichung zwischen zwei Quotienten), so kann man hier, um die Brüche wegzuschaffen, entweder mit dem General-Nenner $(5-2z)(4z-5)$ auf beiden Seiten multipliciren, oder kürzer den bekannten Satz der Proportionen (§. 179.) anwenden, und erhält im letztern Falle sogleich

$$4(4z-5)=7(5-2z)$$

oder $$16z-20=35-14z$$

oder $$30z=55$$

und $$z=\tfrac{55}{30}=\tfrac{11}{6}=1\tfrac{5}{6}.$$

Beispiel 4. Die Gleichung

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{b+x}$$

aufzulösen.

Durch Wegschaffung der Brüche erhält man

$$a(b+x)=bx \quad \text{oder} \quad ab+ax=bx$$

oder $$ab=(b-a)x \quad \text{oder} \quad \frac{ab}{b-a}=x.$$

Weil aber die Gleichung zu denen gehört, die man auch Proportionen nennt und gewöhnlicher so schreibt:

$$a:x=b:b+x$$

so konnte man den bereits bekannten Satz der Proportionen (§. 186.) mit einiger leicht einzusehender Veränderung anwenden, und erhielt sogleich

$$b-a:(b+x)-x=a:x$$

d. h. $$b-a:b=a:x$$

woraus nach (§. 180.) $$x=\frac{ab}{b-a}$$ folgt *).

---

*) Aus diesen Beispielen ersieht man vielleicht am besten 1) daß eine Lehre der Zahlen-Proportionen dem überflüssig ist, welcher Gleichungen zu behandeln versteht, weil unter allen Gleichungen auch die Zahlen-Propor-

Beispiel 5. $\frac{\frac{2}{5}x+5}{2x+6}-\frac{x-2}{5x-15}=\frac{12x-7}{6x^2-54}$ aufzulösen. —

Weil $2x+6=2(x+3)$, $5x-15=5(x-3)$ und $6x^2-54=6.(x^2-9)$ $=6(x-3)(x+3)$ ist; so ist hier der General-Nenner $30.(x-3)(x+3)$ oder $30x^2-270$, und damit multiplicirend erhält man:

$$15(x-3)(\tfrac{2}{5}x+5)-6(x+3)(x-2)=5(12x-7)$$

oder $$6x^2-57x-225-6x^2-6x+36=60x-35$$

oder $$-154=123x \text{ und } -\tfrac{154}{123}=x.$$

Uebungs-Beispiele über die Auflösung einfacher Gleichungen mit einem Unbekannten.

1) Aus $4\frac{1}{2}-\frac{9x}{2}-x=\frac{3x}{4}-7x-\frac{2x}{5}+\frac{4}{3}x-5$

folgt $x=51\frac{9}{11}$.

2) Aus $\frac{ax}{b}-cx-d=a-\frac{bx}{a}-\frac{5x}{2a}+\frac{x}{3b}$

folgt $x=\frac{6a^2b+6abd}{6a^2-6abc+6b^2+15b-2a}=\frac{6ab(a+d)}{6a^2-6abc+6b^2-2a+15b}$.

3) Aus $\frac{3x}{52}+\frac{60-2x}{19}=2$

folgt $x=24\frac{16}{47}$.

4) Aus $\frac{52}{3x}+\frac{19}{60-2x}=\frac{2}{x}$.

folgt $x=78\frac{6}{7}$.

5) Aus $\frac{3-2x}{1-2x}-\frac{5-2x}{7-2x}=1-\frac{4x^2-2}{7-16x+4x^2}$

folgt $x=-\frac{7}{8}$.

6) Aus $32\frac{1}{10}x+176\frac{3}{4}-x=19\frac{1}{3}x+7345-\frac{2x}{3}$

folgt $x=576\frac{39}{74}\frac{2}{6}$.

7) Aus $\frac{7,53x}{18}+100=\frac{2x}{5}+3,86-\frac{x}{6}$

folgt $x=-519,67567\ldots$

---

tionen mit begriffen sind; 2) daß aber die für Zahlen-Proportionen ein für allemal entwickelten Lehrsätze wohl dazu dienen können, in solchen Gleichungen die Resultate schneller zu erhalten, als wenn man die Gleichung selbst auf's neue von vorne herein behandelt.

8) Aus $\frac{f^2x}{cg}-\frac{a^2}{f}+cx=\frac{hx}{g}-c+(a+c)x$

folgt $x=\frac{(a^2-cf)cg}{(f^2-ch-acg)f}$.

9) Aus $\frac{2x}{2-x}-\frac{2+6x}{2-3x}=2-\frac{1-2x}{2-x}$

folgt $x=3\frac{1}{3}$.

10) Aus $\frac{cx}{c-dx}-\frac{c+bcx}{a-bx}=c-\frac{d-cx}{c-dx}$

folgt $x=\frac{(a+1)c^2-ad}{[(a+1)c-b]d}$.

11) Aus $\frac{d}{c-dx}-c\frac{1+bx}{a-bx}=c$

folgt $x=\frac{(a+1)c^2-ad}{[(a+1)c-b]d}$ und $d=\frac{(a+1)c^2}{[(a+1)c-b]x+a}$ *).

12) Aus $u=a+(n-1)d$

folgt $a=u-(n-1)d$; $d=\frac{u-a}{n-1}$; $n=\frac{u-a+d}{d}$.

13) Aus $s=\frac{(a+u)}{2}n$

folgt $n=\frac{2s}{a+u}$ und $a=\frac{2s-nu}{n}$ und $u=\frac{2s-na}{n}$.

14) Aus $s=[2a+(n-1)d]\frac{n}{2}$

folgt $n=\frac{2s}{2a+(n-1)d}$ und $d=\frac{2s-2an}{n(n-1)}$ und $a=\frac{2s-n(n-1)d}{2n}$

und nach n geordnet nimmt die Gleichung die Form an

$$n^2+(2a-d)n=2s$$

und ist also nach n eine quadratische Gleichung, deren Auflösung erst weiter unten gelehrt wird.

15) Aus $13{,}2.x-\frac{3x}{4}+7{,}6953=\frac{x}{5}+7834{,}5$

folgt $x=638{,}92283....$

16) Aus $\frac{5}{6}ab+\frac{4}{5}ac-\frac{2}{3}cx=\frac{3}{4}ac+2ab-6cx$

folgt $x=\frac{(70b-3c)a}{320c}$.

---

*) So gut man nehmlich fragen kann, welchen Ausdruck muß x vorstellen, damit die Gleichung (11.) eine richtige wird, eben so gut kann man auch fragen, welchen Ausdruck muß d vorstellen, damit die Gleichung richtig werde (für alle möglichen Werthe der übrigen Buchstaben.).

17) Aus $\frac{bx}{2b-a}-\frac{(3bc+ad)x}{2ab(a+b)}-\frac{5ab}{3c-d}=\frac{(3bc-ad)x}{2ab(a-b)}-\frac{5a(2b-a)}{a^2-b^2}$

folgt $x=\frac{5a(2b-a)}{3c-d}$.

18) Aus $\sqrt{a-bx}=c$

folgt $x=\frac{a-c^2}{b}$ und $b=\frac{a-c^2}{x}$ und $a=bx+c^2$.

19) Aus $\sqrt[m]{a-bx}=\sqrt[m]{cx-d}$ folgt $x=\frac{a+d}{b+c}$.

20) Aus $\sqrt[m]{x}=a$ folgt $x=a^m$.

21) Aus $(a+x)(b+x)-a(b+c)=\frac{a^2c}{b}+x^2$

folgt $x=\frac{ac}{b}$.

22) Aus $\sqrt[3]{a^2+c}=\sqrt[4]{\frac{a^2+c}{d(x+g)}}$ folgt $x=\frac{1}{d\sqrt[3]{a^2+c}}-g$.

23) Aus $\frac{16}{7}x=\frac{1}{2}x+412\frac{1}{2}+\frac{3}{5}x-316\frac{1}{2}$ folgt $x=80\frac{80}{83}$.

24) Aus $8\frac{3}{4}-\frac{3x}{7}-\frac{5}{6}-2x+\frac{12x}{5}+13-\frac{x}{4}=0$

folgt $x=75\frac{10}{117}$.

25) Aus $c-ax=d-bx$ folgt $x=\frac{c-d}{a-b}=\frac{d-c}{b-a}$

und $a=\frac{c-d+bx}{x}$ und $b=\frac{d-c+ax}{x}$.

26) Aus $-x=a+\frac{bc}{d}-\frac{cfx}{de}$ folgt $x=\frac{(ad+bc)e}{cf-de}$.

27) Aus $-\frac{x}{a}-1+\frac{dx}{c}+3ab=0$ folgt $x=\frac{ac(1-3ab)}{ad-c}$.

28) Aus $\frac{ace}{d}+\frac{(a+b)^2x}{a}+bx=ae+3bx$ folgt $x=\frac{a^2e(d-c)}{(a^2+b^2)d}$.

29) Aus $\frac{a-3x}{4a}-\frac{7a+5x}{6b}+3+\frac{9x}{4}=-\frac{x}{ab}-\frac{5x}{6b}$

folgt $x=\frac{39ab-14a^2}{-27ab+9b-12}$.

30) Aus $\sqrt[m]{a-x}=\sqrt[2m]{x^2-5ax+b^2}$ folgt $x=\frac{b^2-a^2}{3a}$.

31) Aus $\frac{afx^2}{b}+cx-\frac{ax}{b}\sqrt{f^2x^2+d^2}=0$ folgt $x=\frac{a^2d^2-b^2c^2}{2abcf}$

oder $x=\frac{(ad-bc)(ad+bc)}{2abcf}$.

32) Aus $k\sqrt[3]{cx+dx+f}=h\sqrt[3]{ax+b}$

folgt $x=\frac{bh^3-fk^3}{(c+d)k^3-ah^3}=\frac{fk^3-bh^3}{ah^3-(c+d)k^3}$.

33) Aus $(a-x)(b-x)-a(b+c)=\frac{a^2c}{b}+x^2$

folgt $x=-\frac{ac}{b}$.

34) Aus $-\frac{3abc}{a-b}+\frac{a^2b^2}{(a-b)^3}-\frac{(2a-b)b^2x}{a(a-b)^2}=\frac{bx}{a}-3cx$

folgt $x=\frac{ab}{a-b}$.

35) Aus $\frac{3a+5x}{a-c}+\frac{2a+x}{d}=\frac{a+f}{a-c}+dx$

folgt $x=\frac{2a(a-c)+d(2a-f)}{(a-c)(d^2-1)-5d}$.

36) Aus $0=\frac{7x^n}{1+x}+\frac{x^n-6x^{n+1}}{1-x}+\frac{3x^n+6x^{n+2}}{x^2-1}$

folgt $x=\frac{11}{12}$.

37) Aus $\frac{cx^m}{a-bx}=\frac{fx^m}{d-ex}$ folgt $x=\frac{af-cd}{bf-ce}=\frac{cd-af}{ce-bf}$.

38) Aus $-\frac{a(d^2+x^2)}{dx}=ac-\frac{ax}{d}$ folgt $x=-\frac{d}{c}$.

39) Aus $c=a+\frac{m(a+x)}{3a-x}$ folgt $x=\frac{a(3c-3a-m)}{c+m-a}$.

40) Aus $cd-\frac{a^2x}{b-c}+bx+ac=0$ folgt $x=\frac{c(a+d)(b-c)}{a^2-b(b-c)}$.

41) Aus $\frac{x-3a}{x}=5-\frac{6}{x}$ folgt $x=\frac{-3a+6}{4}$.

42) Aus $\frac{1}{x}=bc+d+\frac{ab}{x}$ folgt $x=\frac{1-ab}{bc+d}$.

43) Aus $2a^2b^2c-ab^2x-2ab^3c-abc^2d+3a^3x=(3a^2b-b^3)x-b^2c^2d$

folgt $x=\frac{bc^2d-2ab^2c}{3a^2-b^2}$.

44) Aus $x+y=axy$ folgt $x=\frac{y}{ay-1}$, $y=\frac{x}{ax-1}$.

45) Aus $ax-ay=xy$ folgt $x=\frac{ay}{a-y}$, $y=\frac{ax}{a+x}$.

46) Aus $x-z=bxyz$ folgt $x=\frac{z}{1-byz}$, $z=\frac{x}{1+bxy}$

und $y=\frac{x-z}{bxz}$.

47) Aus $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a$ folgt $x=\frac{y}{ay-1}$, $y=\frac{x}{ax-1}$.

48) Aus $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=a$ folgt $x=\frac{y}{ay+1}$, $y=\frac{x}{1-ax}$.

§. 196. Erklärung.

Eine Gleichung kann auch mehre Unbekannte x, y, etc. etc. enthalten, wenn man sie nehmlich nur für gewisse Werthe dieser Buchstaben will gelten lassen, für solche Werthe z. B., welche statt x, y, etc. etc. gesetzt, auch noch eine zweite, oder auch noch eine dritte Gleichung etc. etc. zur identischen machen. — Eine solche Gleichung mit mehren Unbekannten heißt abermals eine algebraische, wenn sie in Bezug auf jeden einzelnen der Unbekannten nach (§. 193.) eine algebraische seyn würde; sie heißt zugleich auch eine einfache, wenn sie in Bezug auf jeden einzelnen der Unbekannten eine einfache (Gleichung des 1ten Grades) ist.

§. 197. Zusatz.

Die allgemeine Form der einfachen Gleichungen mit 2, 3, 4, u. s. w. Unbekannten x, y oder x, y, z, oder x, y, z, v, oder u. s. w. f. ist folgende:

1) $ax+by=c$
2) $ax+by+cz=d$
3) $ax+by+cz+dv=e$ u. s. w. f.

auf welche Form also jede einfache Gleichung mit mehren Unbekannten muß gebracht werden können, in welchem Falle die Gleichung selbst wiederum geordnet genannt wird.

Anmerkung. Die Gleichungen mit 2, 3, u. s. w. Unbekannten und von der 2ten Ordnung haben dagegen die Form:

1) $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey=f$

2) $ax^2+bxy+cy^2+dxz+eyz+fz^2+gx+hy+kz=l$

u. s. w. f.; wo in (n. 1.) x und y, in (n. 2.) dagegen x, y und z, die Unbekannten vorstellen.

Eine Gleichung der 3ten Ordnung mit 2 Unbekannten, würde dagegen die Form haben:

$$ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3+ex^2+fxy+gy^2+hx+ky=l$$

und diese Gleichung würde immer eine Gleichung der 3ten Ordnung genannt werden, auch wenn mehre der Coefficienten a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, Null würden, diese Glieder also ganz wegfallen sollten, wenn nur nicht alle Glieder von der höchsten Dimension (hier ax^3, bx^2y, cxy^2, dy^3) auf einmal wegfallen, weil sonst die Gleichung zu einer niedrigern Ordnung gehören würde.

Wir betrachten hier zunächst die einfachen Gleichungen mit mehren Unbekannten.

§. 198. Aufgabe.

Es sind gegeben 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten x und y, z. B.

1) $ax+by=c$

und 2) $px+qy=n$.

Man soll diese Gleichungen auflösen, d. h. die unbekannten Werthe von x und y finden.

Auflösung I.) Man eliminire einen der Unbekannten z. B. x, d. h. man schaffe x weg; d. h. man leite aus den beiden gegebenen Gleichungen eine neue dritte ab, welche den Unbekannten x nicht mehr, welche also nur noch den andern Unbekannten y enthält.

II.) Diese 3te Gleichung (die Eliminations-Gleichung genannt) löse man nach dem Unbekannten y, den sie allein noch enthält, auf, so findet sich der Werth von y.

III.) Diesen Werth von y setze man in irgend eine der vorhergehenden Gleichungen, in welcher auch noch x vorkommt, statt y, so daß x allein noch als Unbekannter erscheint, und löse diese vollends nach x auf (wenn sie es nicht

schon ist) und man hat auch den Werth des andern Unbekannten x gefunden.

Aus den Gleichungen:

1) $2x-3y=1$ und 2) $5x+2y=31$

erhält man, wenn die erste nach x aufgelöst wird

3) $x=\frac{1+3y}{2}$;

und wenn man diesen Werth $\frac{1+3y}{2}$ statt x in die (2.) substituirt, so ergiebt sich

4) $5.\frac{1+3y}{2}+2y=31$;

und dies ist die nach (I.) zu suchende Eliminations-Gleichung.

Diese nach (II.) aufgelöst giebt, erstlich:

$5+15y+4y=62$ oder $19y=57$ oder $y=3$.

Setzt man nun nach (III.) diesen Werth 3 von y statt y in irgend eine der Gleichungen (1.) (2.) oder (3.), die noch x enthält, so erhält man

aus (1.), $2x-9=1$, woraus $x=5$;
aus (2.), $5x+6=31$, woraus $x=5$;
aus (3.), $x=\frac{1+3.3}{2}=\frac{10}{2}=5$.

Und $x=5$, $y=3$, sind also die gesuchten Werthe von x und von y.

Hätte man zuerst y eliminirt, nehmlich die erste Gleichung (1.) nach y aufgelöst, wo

3) $y=\frac{2x-1}{3}$ sich ergiebt, und diesen Werth $\frac{2x-1}{3}$

in die Gleichung (2.) statt y gesetzt, so hätte man erhalten die Eliminations-Gleichung

4) $5x+2.\frac{2x-1}{3}=31$ welche aufgelöst, erstlich

$15x+4x-2=93$, dann $19x=95$

zuletzt $x=\frac{95}{19}=5$ gegeben hätte.

Dieser Werth 5, statt x in (1.), (2.) oder (3.) gesetzt, giebt:

in (1.), $10-3y=1$ oder $y=\frac{9}{3}=3$;
in (2.), $25+2y=31$ oder $y=\frac{31-25}{2}=3$,
in (3.), $y=\frac{2.5-1}{3}=\frac{9}{3}=3$.

§. 199. Zusatz.

Das Eliminiren oder Wegschaffen eines Unbekannten x aus zwei gegebenen Gleichungen:

1) $ax+by=c$ und 2) $px+qy=n$

geschieht aber dem Wesen nach allemal dadurch, daß man die eine der Gleichungen nach x auflößt, und den so gefundenen Werth in die 2te Gleichung statt x setzt, wo allemal dieses x herausfällt.

Die Gleichung (1.) z. B. nach x aufgelößt giebt:

$$3)\ x=\frac{c-by}{a},$$

und dieser Werth statt x in (2.) gesetzt, giebt:

$$4)\ p\cdot\frac{c-by}{a}+qy=n,$$

welches die gesuchte Eliminations-Gleichung ist. — Und ordnet man diese Gleichung, so erhält man noch

$$5)\ (aq-bp)y=an-cp.$$

Hätte man die Gleichung (2.) nach x aufgelößt, wo sich

$$3)\ x=\frac{n-qy}{p}$$

findet, und diesen Werth von x in die (1.) gesetzt, so ergab sich

$$4)\ a.\frac{n-qy}{p}+by=c,$$

welche Gleichung geordnet

$$5)\ (bp-aq)y=cp-an$$

liefert, eine Gleichung, welche sehr leicht in die obige (n. 5.) verwandelt werden kann, und welche deshalb natürlich auch für y dasselbe Resultat liefert als die obige.

Anmerkung. Diese Methode zu eliminiren nennt man die Substitutions-Methode. Dem Wesen nach kommen alle andern Methoden auf diese zurück.

§. 200. Zusatz.

Eine zweite Art einen Unbekannten x zu eliminiren (die Kombinations-Methode) besteht darin, daß man beide gegebene Gleichungen:

1) $ax+by=c$ und 2) $px+qy=n$

nach x auflößt, wo man

3) $x=\frac{c-by}{a}$ und 4) $x=\frac{n-qy}{p}$

erhält, und nun diese beiden Werthe von x einander gleich setzt, so daß man die Eliminations-Gleichung

5) $\frac{c-by}{a}=\frac{n-qy}{p}$

erhält, welche geordnet in

$(bp-aq)y=cp-an$ oder in $(aq-bp)y=an-cp$

übergeht; wie oben auch gefunden wurde.

§. 201. Zusatz.

Eine dritte Art den Unbekannten x zu eliminiren (die Additions- und Subtraktions-Methode) besteht darin, daß man die Gleichungen

1) $ax+by=c$ und 2) $px+qy=n$

in andere ähnliche verwandelt, in welchen aber der Coefficient von x derselbe wird, und diese Gleichungen zu einander addirt oder von einander subtrahirt, je nachdem durch das eine oder durch das andere die x wegfallen. — Man sucht zu dem Ende für die Coefficienten von x, nehmlich für a und p, indem man sie als Nenner von Brüchen ansieht, den General-Nenner, hier ap; dividirt mit jedem Coefficienten a und p in diesen General-Nenner, und multiplicirt die Gleichungen (1.) und (2.) selbst beziehlich mit dem, was diese Division giebt, also beziehlich mit $\frac{ap}{a}$ oder p und mit $\frac{ap}{p}$ oder a. Dann erhält man:

aus (1.): 3) $apx+bpy=cp$
und aus (2.): 4) $apx+aqy=an$.

Subtrahirt man nun die obere Gleichung von der untern oder die untere von der obern, so erhält man:

im erstern Falle $(aq-bp)y=an-cp$
im andern dagegen $(bp-aq)y=cp-an$,

und jede dieser letztern Gleichungen ist die gesuchte Eliminations-Gleichung.

Beispiel 1. Aus den beiden Gleichungen

1) $-6x+3y=8$ und 2) $8x-2y=15$

den Unbekannten x zu eliminiren.

Die Coefficienten von x sind 6 und 8, ihr General-Nenner 24; und $\frac{24}{6}=4$, $\frac{24}{8}=3$ sind also die Zahlen, womit die Gleichungen (1.) und (2.) beziehlich multiplicirt

3) $-24x+12y=32$
4) $24x-6y=45$ geben,
welche addirt 5) $6y=77$

als die Eliminations-Gleichung liefern.

Wollte man aus (1.) und (2.) y eliminiren, so müßte die Gleichung (1.) mit 2, die Gleichung (2.) dagegen mit 3 multiplicirt werden, und man erhielte

3) $-12x+6y=16$
4) $24x-6y=45$,
welche addirt 5) $12x=61$ liefern.

Beispiel 2. Hätte man die Gleichungen

1) $-6x+3y=8$ und 2) $8x+2y=15$

gegeben, und x zu eliminiren, so erhielte man

aus (1.), 3) $-24x+12y=32$
aus (2.), 4) $24x+6y=45$
und addirt: 5) $18y=77$.

Wird aber y eliminirt aus (1.) und (2.), so erhält mnn:

aus (1.), 3) $-12x+6y=16$
aus (2.), 4) $24x+6y=45$

und wenn man hier die obere Gleichung von der untern subtrahirt, so ergiebt sich 5) $36x=29$,

welches jetzt die gesuchte Eliminations-Gleichung ist.

§. 202. Zusatz.

Eine 4te Methode zu eliminiren besteht darin, daß man die eine der beiden Gleichungen

1) $ax+by=c$ und 2) $px+qy=n$

mit einem noch ganz unbestimmten etwa durch α bezeichneten Ausdruck multiplicirt und die andere addirt, nehmlich:

3) $a\alpha x+b\alpha y=c\alpha$

addirt (2.) $px+qy=n$

4) $(a\alpha+p)x+(b\alpha+q)y=c\alpha+n$

welche Gleichung richtig bleibt, was man auch statt α setzen mag. Nun aber, wenn x eliminirt werden soll, denkt man sich α so bestimmt, daß $a\alpha+p=0$ oder $\alpha=-\frac{p}{a}$ wird, wo dann für diesen Werth von α die Gleichung (4.) in

5) $(b\alpha+q)y=c\alpha+n$

d. h. $(-\frac{bp}{a}+q)y=-\frac{cp}{a}+n$ übergeht,

also die gesuchte Eliminations-Gleichung ist. —

Soll dagegen y eliminirt werden, so denkt man sich α so bestimmt, daß $b\alpha+q=0$, d. h. $\alpha=-\frac{q}{b}$ wird, wo dann für diesen Werth von α die Gleichung (4.) in

6) $(a\alpha+p)x=c\alpha+n$

d. h. $(-\frac{aq}{b}+p)x=-\frac{cq}{b}+n$

übergeht, so daß diese letztere die gesuchte Eliminations-Gleichung ist.

Anmerkung 1. Hat man aber einmal eliminirt, auf irgend einem dieser verschiedenen Wege, so findet dann das Auflösen der Gleichungen nach (II. und III. §. 198.) keine weitere Schwierigkeit. Auch kann die erhaltene Eliminations-Gleichung jedesmal sogleich noch geordnet werden, wenn sie nicht an sich schon in Form einer geordneten Gleichung erscheint.

Anmerkung 2. Soll also die Aufgabe (§. 198.) wirklich durchgeführt werden, so hat man aus:

1) $ax+by=c$ und 2) $px+qy=n$,

wenn x eliminirt wird, die Eliminations-Gleichung

$$(aq-bp)y=an-cp,$$

woraus $$y=\frac{an-cp}{aq-bp}$$ hervorgeht.

Diesen Werth von y in die Gleichung (1.) gesetzt, giebt

$$3)\quad ax+b.\frac{an-cp}{aq-bp}=c,$$

woraus nun vollends x gefunden werden muß. — Man erhält aber hieraus

$$x=\frac{c-b.\frac{an-cp}{aq-bp}}{a}=\frac{c-\frac{abn-bcp}{aq-bp}}{a}$$

$$=\frac{acq-abn}{a(aq-bp)}=\frac{cq-bn}{aq-bp}.$$

Anmerkung 3. Setzt man aber diese eben gefundenen Werthe für x und für y in die Gleichung (2.) so erhält man:

$$4)\quad p.\frac{cq-bn}{aq-bp}+q.\frac{an-cp}{aq-bp}=n$$

und multiplicirt man hier links und rechts mit $aq-bp$, so erhält man weiter:

$$p(cq-bn)+q(an-cp)=n(aq-bp)$$

oder $$cpq-bpn+anq-cpq=anq-bnp;$$

und weil also links und rechts ein und dasselbe herauskommt, so ist die Gleichung (4.) offenbar richtig (identisch.).

Und setzte man dieselben Werthe für x und für y in die Gleichung (1.), so würde die entstehende Gleichung nothwendig auch eine richtige (identische) Gleichung geworden seyn.

Beispiele 1. Folgendes Paar von Gleichungen aufzulösen:

$$1)\ \frac{8x}{7}=\frac{5(x-y)}{3}-6 \text{ und } 2)\ \frac{3x-y}{9}+5=\frac{4y+3x}{6}.$$

So oft die Gleichungen nicht geordnet gegeben sind, so ordne man sie vor allen Dingen. — Schafft man aber aus der ersten die Brüche weg, so erhält man:

$$24x=35(x-y)-126$$

oder $$3)\ 11x-35y=126.$$

Und schafft man aus der zweiten die Brüche weg, so ergiebt sich

$$6x-2y+90=12y+9x$$

oder $$4)\ 3x+14y=90;$$

und statt der gegebenen Gleichungen (1.) und (2.) müssen daher zunächst

diese geordneten Gleichungen (3.) und (4.) gesetzt werden, und dann mag erst die Auflösung des (§. 198.) eintreten. — Eliminirt man aber y aus (3.) und (4.) nach der Additions- und Subtraktions-Methode, die Gleichung (3.) mit 2, die Gleichung (4.) mit 5 multiplicirend, so erhält man:

aus (3.), 5) $22x-70y=252$

aus (4.), 6) $15x+70y=450$

und addirend 7) $37x=702$,

so wie 8) $x=\frac{702}{37}=18\frac{36}{37}$.

Eliminirt man dagegen x nach derselben Methode, die Gleichung (3.) mit 3, die Gleichung (4.) dagegen mit 11 multiplicirend, so ergiebt sich:

aus (3.): 9) $33x-105y=378$

aus (4.): 10) $33x+154y=990$

und subtrahirend, 11) $259y=612$;

und daraus 12) $y=\frac{612}{259}$.

Man findet also $x=\frac{702}{37}$ und $y=\frac{612}{259}$; und diese Werthe statt x und statt y in die gegebenen Gleichungen (1.) und (2.) substituirt, werden richtige (identische) Gleichungen hervorbringen.

Beispiel 2. Die Gleichungen

1) $ax-by=c$ und 2) $\frac{p-qy}{r}-c=\frac{my}{d}$

nach x und nach y aufzulösen.

Ordnet man die Gleichung (2.), so ergiebt sich:

zuerst $dp-dqy-cdr=mry$,

dann $dp-cdr=(mr+dq)y$;

und weil in dieser Gleichung der andere Unbekannte x bereits gar nicht vorkommt, so liefert sie augenblicklich den Werth von y, nehmlich:

$$y=\frac{dp-cdr}{mr+dq}.$$

Setzt man daher diesen Werth statt y in die Gleichung (1.), so erhält man aus letzterer sogleich

$$ax-b\cdot\frac{dp-cdr}{mr+dq}=c,$$

woraus sich $x=\frac{cmr+cdq+bdp-bcdr}{amr+adq}$ ergiebt.

Uebungs-Beispiele für die Auflösung zweier einfachen algebraischen Gleichungen mit zwei Unbekannten.

1) Aus 1) $x+y=s$ und 2) $x-y=d$

folgt $x=\frac{s+d}{2}=\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}d$ und $y=\frac{s-d}{2}=\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}d$.

2) Aus 1) $4x-3y=5$ und 2) $2x+5y=10$
folgt $x=\frac{55}{26}=2\frac{3}{26}$ und $y=\frac{15}{13}=1\frac{2}{13}$.

3) Aus 1) $-x+3y=8$ und 2) $5x-2y=6$
folgt $x=\frac{34}{13}=2\frac{8}{13}$ und $y=\frac{46}{13}=3\frac{7}{13}$.

4) Aus 1) $3x-2y=118$ und 2) $x-5y=191$
folgt $x=16$ und $y=-35$.

5) Aus 1) $-7x+\frac{5}{2}y=409\frac{15}{16}$ und 2) $39x+14y=932\frac{3}{4}$
folgt $x=-17\frac{1}{2}$ und $y=115\frac{3}{8}$.

6) Aus 1) $5x-8\frac{1}{2}=7y-44$ und 2) $2x=y+\frac{5}{7}$
folgt $x=4\frac{1}{2}$ und $y=8\frac{2}{7}$.

7) Aus 1) $1\frac{3}{4}y-11x=117\frac{1}{8}$ und 2) $8x+175=2y$
folgt $x=9$ und $y=123\frac{1}{2}$.

8) Aus 1) $ax=by$ und 2) $x+y=c$
folgt $x=\frac{bc}{a+b}$ und $y=\frac{ac}{a+b}$.

9) Aus 1) $ax-by=c$ und 2) $-fx+gy=h$
folgt $x=\frac{cg+bh}{ag-bf}$ und $y=\frac{ah+cf}{ag-bf}$.

10) Aus 1) $-13x+7y-341=7\frac{1}{2}y-43\frac{1}{2}x$ und 2) $-2x+\frac{1}{2}y=1$
folgt $x=12$ und $y=50$.

11) Aus 1) $\frac{a}{b-y}=\frac{b}{3a+x}$ und 2) $ax-2by=d$
folgt $x=\frac{-6a^2+2b^2+d}{3a}$ und $y=\frac{-3a^2+b^2-d}{3b}$.

12) Aus 1) $168\frac{15}{44}+19x+\frac{3}{11}y=-12\frac{3}{4}x+1084$
2) $\frac{1}{3}x+149\frac{1}{2}=\frac{7}{2}y-319\frac{2}{9}$ folgt $x=27\frac{2}{3}$ und $y=136\frac{5}{9}$.

13) Aus 1) $bcx=cy+2b$ und 2) $b^2y-\frac{a(b^3+c^3)}{bc}+\frac{2b^3}{c}+c^3x=0$
folgt $x=\frac{a}{bc}$ und $y=\frac{a-2b}{c}$.

14) Aus 1) $y=x+18{,}73$ und 2) $-0{,}56\cdot x+13{,}421\cdot y=763{,}4$
folgt $x=39{,}8121\ldots$ und $y=58{,}5421\ldots$

15) Aus 1) $5y=3x+\frac{(8b-2f)bf}{b^2-f^2}$
2) $f^2x-\frac{bcf^2}{b+f}+(b+c+f)fy=b^2x+(b+2f)bf$
folgt $x=\frac{fb}{f-b}$ und $y=\frac{fb}{f+b}$.

16) Aus 1) $(x+5)(7-y)+(x+1)(y+9)=112$ und 2) $2x+10=1-3y$ folgt $x=3$ und $y=-5$.

§. 203. Aufgabe.

Es sind gegeben 3 einfache Gleichungen mit 3 Unbekannten x, y, z, z. B.:

1) $ax+by+cz=d$
2) $a_1x+b_1y+c_1z=d_1$
3) $a_2x+b_2y+c_2z=d_2$.

Man soll sie nach x, y und z auflösen, d. h. die Werthe von x, y und z finden.

Auflösung. I) Aus den Gleichungen (1.) und (2.) eliminire man nach irgend einer der Methoden (§. §. 199—202.) einen der Unbekannten z. B. x, und man erhält die Eliminations-Gleichung

4) $(a_1b-ab_1)y+(a_1c-ac_1)z=a_1d-ad_1$.

II) Eben so eliminire man denselben Unbekannten x auch aus den Gleichungen (1.) und (3.), und erhält nun als Eliminations-Gleichung

5) $(a_2b-ab_2)y+(a_2c-ac_2)z=a_2d-ad_2$.

III) Diese beiden Eliminations-Gleichungen (4.) und (5.) löse man nun nach (§. 198.) auf, so erhält man die Werthe für y und z, nehmlich:

$$y=\frac{(a_1d-ad_1)(a_2c-ac_2)-(a_2d-ad_2)(a_1c-ac_1)}{(a_1b-ab_1)(a_2c-ac_2)-(a_2b-ab_2)(a_1c-ac_1)}$$

$$z=\frac{(a_1d-ad_1)(a_2b-ab_2)-(a_2d-ad_2)(a_1b-ab_1)}{(a_1c-ac_1)(a_2b-ab_2)-(a_2c-ac_2)(a_1b-ab_1)}$$

oder, wenn man die Multiplikationen verrichtet und so viel wie möglich aufhebt:

$$y=\frac{ac_2d_1+a_1cd_2+a_2c_1d-a_2cd_1-a_1c_2d-ac_1d_2}{ab_1c_2+a_1b_2c+a_2bc_1-a_2b_1c-a_1bc_2-ab_2c_1}$$

und $$z=\frac{ab_1d_2+a_1b_2d+a_2bd_1-a_2b_1d-a_1bd_2-ab_2d_1}{ab_1c_2+a_1b_2c+a_2bc_1-a_2b_1c-a_1bc_2-ab_2c_1}.$$

IV) Diese Werthe für y und z setze man in irgend eine

der vorhergehenden Gleichungen, welche auch noch x enthält, und löse solche noch nach x auf, so erhält man auch x. — Und zwar findet man:

$$x = \frac{b_1c_2d + b_2cd_1 + bc_1d_2 - b_1cd_2 - bc_2d_1 - b_2c_1d}{ab_1c_2 + a_1b_2c + a_2bc_1 - a_2b_1c - a_1bc_2 - ab_2c_1}.$$

Beispiel. Aus den 3 Gleichungen

1) $2x - 3y + 4z = 7$
2) $3x + 4y - z = 6$
3) $-4x + 5y + 2z = 10$

x, y und z zu finden. — Man hat

(1.) $\times 3 \ldots$ $6x - 9y + 12z = 21$
(2.) $\times 2 \ldots$ $6x + 8y - 2z = 12$. — Diese subtrahirt geben

4) $-17y + 14z = 9$. — Ferner

(1.) $\times 2 \ldots$ $4x - 6y + 8z = 14$; dazu (3.) addirt giebt

5) $-y + 10z = 24$.

Und nun die Gleichungen (4.) und (5.) nach (§. 198.) aufgelöst, so erhält man:

$$y = \frac{41}{26} \quad \text{und} \quad z = \frac{133}{52}.$$

Diese Werthe statt y und z in die Gleichung (1.) gesetzt, geben

$$2x - 3 \cdot \frac{41}{26} + 4 \cdot \frac{133}{52} = 7,$$

woraus $x = \frac{39}{52}$ sich ergiebt.

Anmerkung 1. Man sieht deutlich, wie alles darauf ankommt, sich aus den gegebenen 3 Gleichungen zwei neue zu verschaffen, welche einen der 3 Unbekannten z. B. x nicht mehr enthalten, weil man dann diese neuen Gleichungen nach y und nach z auflösen, und so die Werthe von y und z (und daraus dann wieder den Werth von x) finden kann. — Wie und auf welchem Wege die 2 neuen Gleichungen erhalten werden, ist daher völlig gleichgültig, auch einerlei, ob, wenn man verschiedene Wege einschlägt, jedesmal dieselben zwei Gleichungen sich ergeben, oder jedesmal ein anderes Paar, wenn nur in den erhaltenen Eliminations-Gleichungen die Buchstaben y und z noch immer dieselben Werthe vorstellen, was nothwendig dann allemal der Fall ist, wenn man sich bei dem Verwandeln und Ableiten der Gleichungen, um die Bedeutung von y und z gar nicht bekümmert.

So haben wir oben im Beispiel, zuerst x eliminirt aus den Gleichungen (1.) und (2.), dann nochmals x eliminirt aus den Gleichungen (1.) und (3.), und so die neuen Gleichungen (4.) und (5.) erhalten. Man konnte aber auch x elimininiren aus den Gleichungen (2.) und (3.), indem

man die zweite mit 4 und die dritte Gleichung mit 3 multiplicirt und beide Resultate addirt, und erhält dann

aus (2.)... $12x+16y-4z=24$

aus (3.)... $-12x+15y+6z=30$

und addirt 6) $31y+2z=54$.

Von den Gleichungen (4. 5. und 6.) konnte man nun irgend zweie nehmen, z. B. die (4. und 6.) und y und z daraus finden nach (§. 198.), und jedesmal würde man dieselben Werthe erhalten müssen, eben weil y und z und auch x bestimmte Werthe vorstellen, und, während man Gleichungen aus einander ableitet, die Bedeutung der Buchstaben ganz unberücksichtigt bleibt, also auch keine Aenderung erleiden kann.

Anmerkung 2. Man konnte auch aus den 3 gegebenen Gleichungen sich die Eliminations-Gleichungen auf einmal verschaffen. Sucht man nehmlich von den Coefficienten von x in den Gleichungen (1., 2. und 3.) nehmlich von 2, 3, 4, den General-Nenner (General-Coefficient), welcher 12 ist, und dividirt man in diesen mit jedem einzelnen der genannten Coefficienten 2, 3, 4, so daß man 6, 4, 3 erhält; und multiplicirt man nun jede der 3 Gleichungen (1., 2. und 3.) beziehlich mit 6, 4, 3, so erhält man

4) $12x-18y+24z=42$

5) $12x+16y-4z=24$

6) $-12x+15y+6z=30$,

wo in allen 3 Gleichungen die Coefficienten von x dieselben sind. — Addirt und subtrahirt man nun je zwei dieser 3 neuen Gleichungen, so erhält man abermals 3 neue Gleichungen (von denen jedoch nur 2 gebraucht werden) bloß in y und z, nehmlich

(4.)−(5.)....	7) $-34y+28z=18$	oder	$-17y+14z=9$
(4.)+(6.)....	8) $-3y+30z=72$	oder	$-y+10z=24$
(5.)+(6.)....	9) $31y+2z=54$	oder	$31y+2z=54$.

Anmerkung 3. Auch auf folgendem Wege kann man die Unbekannten auf einmal eliminiren.

Nimmt man nehmlich das obige Beispiel und multiplicirt man die Gleichung (1.) mit α, die Gleichung (2.) mit β und addirt die Resultate zur dritten Gleichung (3.) so erhält man

4) $(2\alpha+3\beta-4)x+(-3\alpha+4\beta+5)y+(4\alpha-\beta+2)z=7\alpha+6\beta+10$,

wo α und β ganz beliebige, noch völlig unbestimmte Ausdrücke seyn mögen. — Denkt man sich nun α und β so gewählt, daß die Coefficienten von x und y Null werden, so wird für diese Werthe von α und β, die Gleichung (4.) übergehen in

5) $(4\alpha-\beta+2)z=7\alpha+6\beta+10$

während α und β gegeben sind durch die Gleichungen

$$2\alpha+3\beta-4=0 \quad \text{und} \quad -3\alpha+4\beta+5=0$$

und aus diesen Gleichungen erst nach (§. 198.) gefunden und statt α und β in die Gleichung (5.) gesetzt werden müssen.

Denkt man sich aber in der Gleichung (4.) die Ausdrücke α und β anders und zwar so genommen, daß die Coefficienten von x und z Null werden, so reducirt sich die Gleichung (4.) auf

$$6)\ (-3\alpha+4\beta+5)y=7\alpha+6\beta+10,$$

wo α und β erst gefunden werden müssen aus den Gleichungen

$$2\alpha+3\beta-4=0 \quad \text{und} \quad 4\alpha-\beta+2=0.$$

Und denkt man sich zuletzt α und β noch einmal anders und so genommen, daß die Coefficienten von y und z in der Gleichung (4.) der Null gleich werden, so geht die Gleichung (4.) für diese neuen Werthe von α und β in

$$7)\ (2\alpha+3\beta-4)\cdot x=7\alpha+6\beta+10$$

über, während α und β selbst aus den Gleichungen

$$-3\alpha+4\beta+5=0 \quad \text{und} \quad 4\alpha-\beta+2=0$$

gefunden werden müssen, so daß zuletzt diese gefundenen Werthe für α und β in (7.) substituirt werden können.

Die Gleichung (5.) giebt dann augenblicklich den Werth von z; die Gleichung (6.) eben so den Werth von y und die Gleichung (7.) zuletzt noch den Werth von x.

Anderes Beispiel. Sollen x, y, z aus den Gleichungen

1) $ax+by+cz=d$

2) $a_1x+b_1y+c_1z=d_1$

3) $a_2x+b_2y+c_2z=d_2$

gefunden werden auf dem so eben gezeigten Wege, so wird man sich zuerst bilden die Gleichung

4) $(a\alpha+a_1\beta+a_2)x+(b\alpha+b_1\beta+b_2)y+(c\alpha+c_1\beta+c_2)z=d\alpha+d_1\beta+d_2$

und daraus

5) $x=\dfrac{d\alpha+d_1\beta+d_2}{a\alpha+a_1\beta+a_2}$, wenn α und β bestimmt sind durch

$$b\alpha+b_1\beta+b_2=0 \quad \text{und} \quad c\alpha+c_1\beta+c_2=0;$$

6) $y=\dfrac{d\alpha+d_1\beta+d_2}{b\alpha+b_1\beta+b_2}$, wenn α und β bestimmt sind durch

$$a\alpha+a_1\beta+a_2=0 \quad \text{und} \quad c\alpha+c_1\beta+c_2=0;$$

7) $z=\dfrac{d\alpha+d_1\beta+d_2}{c\alpha+c_1\beta+c_2}$, wenn α und β bestimmt sind durch

$$a\alpha+a_1\beta+a_2=0 \quad \text{und} \quad b\alpha+b_1\beta+b_2=0.$$

Und dies giebt dieselben Auflösungen, wie sie bereits im (§. 203.) selbst gefunden sind.

Uebungs-Beispiele.

1) Aus $\left\{\begin{matrix} x-y+z=30 \\ 8x-4y+2z=50 \\ 27x-9y+3y=64 \end{matrix}\right\}$ folgt $\left\{\begin{matrix} x=\frac{2}{3} \\ y=7 \\ z=36\frac{1}{3} \end{matrix}\right\}$.

2) Aus $\left\{\begin{matrix} 2x+2y=20 \\ 3x+3z=57 \\ 4y+4z=92 \end{matrix}\right\}$ folgt $\left\{\begin{matrix} x=3 \\ y=7 \\ z=16 \end{matrix}\right\}$.

3) Aus $\left\{\begin{matrix} 2x+5y+7z=-288 \\ 5x-y-3z=227 \\ 7x+6y-z=297 \end{matrix}\right\}$ folgt $\left\{\begin{matrix} x=13 \\ y=24 \\ z=-62 \end{matrix}\right\}$.

4) Aus $\left\{\begin{matrix} x+y+z=a \\ x:y=m:n \\ x:z=p:q \end{matrix}\right\}$ folgt $\left\{\begin{matrix} x=\frac{amp}{mp+np+mq} \\ y=\frac{anp}{mp+np+mq} \\ \text{und } z=\frac{amq}{mp+np+mq}. \end{matrix}\right.$

5) Aus $\left\{\begin{matrix} y+\frac{1}{2}x=41 \\ x+\frac{1}{4}z=20\frac{1}{2} \\ y+\frac{1}{5}z=34 \end{matrix}\right\}$ folgt $\left\{\begin{matrix} x=18 \\ y=32 \\ z=10 \end{matrix}\right\}$.

6) Aus $\left\{\begin{matrix} ax-by=c \\ dx+ey=f \\ -gy+hz=l \end{matrix}\right\}$ folgt $\left\{\begin{matrix} x=\frac{ce+bf}{ae+bd} \\ y=\frac{af-cd}{ae+bd} \\ \text{und } z=\frac{a(el+fg)+d(bl-cg)}{h(ae+bd)}. \end{matrix}\right.$

7) Aus $\left\{\begin{matrix} 18x-7y-5z=-11 \\ 4\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}x+z=-114\frac{2}{3} \\ 3\frac{1}{2}z+2y+\frac{3}{4}x=-80 \end{matrix}\right\}$ folgt $\left\{\begin{matrix} x=-12 \\ y=-25 \\ z=-6 \end{matrix}\right\}$.

8) Aus $\left\{\begin{matrix} 0=y+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}z-62 \\ 26-\frac{1}{8}y=\frac{1}{4}x \\ 5y-4z=0 \end{matrix}\right\}$ folgt $\left\{\begin{matrix} x=64 \\ y=80 \\ z=100 \end{matrix}\right\}$.

9) Aus $\left\{\begin{matrix} 4x+7y=159 \\ -3\frac{1}{3}x=\frac{1}{6}z-55 \\ 9z-498=2x+y \end{matrix}\right\}$ folgt $\left\{\begin{matrix} x=13\frac{1}{2} \\ y=15 \\ z=60 \end{matrix}\right\}$.

§. 204. Zusatz.

Hätte man 4 einfache Gleichungen mit 4 Unbekannten x, y, z, v, so würde man durch Elimination eines der Unbekannten sich 3 Gleichungen bilden, welche diesen einen Un-

bekannten nicht mehr enthalten, welche daher nach (§. 203.) aufgelöst werden könnten und die Werthe der übrigen 3 Unbekannten lieferten. Diese würde man in irgend eine der Gleichungen substituiren, welche den 4ten Unbekannten noch enthält, und diese letztere Gleichung aufgelöst, würde dann den Werth dieses 4ten Unbekannten ebenfalls noch geben.

Allgemein: Hat man n einfache Gleichungen mit n Unbekannten, so eliminire man einen der Unbekannten, dergestalt daß man n—1 Gleichungen mit n—1 Unbekannten erhält. Daraus bilde man sich durch Elimination eines der Unbekannten, n—2 neue Gleichungen zwischen den übrigen n—2 Unbekannten; daraus auf's neue durch Elimination n—3 Gleichungen zwischen n—3 der Unbekannten; u. s. w. f. bis man zuletzt zu 2 Gleichungen zwischen zwei der Unbekannten gelangt, und dann zu einer Gleichung, welche nur noch einen der Unbekannten enthält. — Diese letztere Gleichung aufgelöst, giebt den Werth dieses einen Unbekannten; und wenn man diesen Werth in irgend eine der letztern Gleichungen mit 2 Unbekannten substituirt, so kommt nur noch der zweite Unbekannte vor, so daß sie aufgelöst, den Werth dieses 2ten Unbekannten liefert. Die Werthe für diese beiden Unbekannten setzt man nun in eine der Gleichungen mit 3 Unbekannten, so bleibt der dritte allein als unbekannt in ihr übrig und wird durch Auflösung derselben ohne weiters gefunden. — Und so fortfahrend wird man nach und nach die Werthe des 4ten, 5ten, u. s. w. endlich den Werth eines jeden der Unbekannten bestimmen können.

Beispiel. Es seyen gegeben:

$$1)\quad 2x - y + 3z - v + 5t = 8$$
$$2)\quad -x + y - z + 4v - t = 6$$
$$3)\quad -3x + 4y - z + 6v - 2t = 5$$
$$4)\quad 5x + y + z - 2v + 3t = 4$$
$$5)\quad x - 3y + 3z - 2v + 4t = 1\tfrac{1}{2}.$$

Eliminirt man zuerst x aus jedem Paare dieser 5 Gleichungen, so erhält man:

aus (1. 2.)... 6) $y+z+7v+3t=20$
aus (1. 3.)... 7) $5y+7z+9v+11t=34$
aus (1. 4.)... 8) $-7y+13z-v+19t=32$
aus (1. 5.)... 9) $5y-3z+3v-3t=5$
aus (2. 3.)... 10) $-y-2z+6v-t=13$
aus (2. 4.)... 11) $6y-4z+18v-2t=34$
aus (2. 5.)... 12) $-2y+2z+2v+3t=7\frac{1}{2}$
aus (3. 4.)... 13) $17y-2z+24v-t=37$
aus (3. 5.)... 14) $-5y+8z+10t=18$
aus (4. 5.)... 15) $-16y+14z-8v+17t=3\frac{1}{2}$.

Von diesen 10 Gleichungen braucht man aber nur 4 entwickelt zu haben, und zwar welche 4 derselben man nur immer will, denn in allen diesen 10 Gleichungen bedeuten y, z, v, t jedesmal dieselben Ausdrücke und wiederum dieselben, welche sie auch in den ersten 5 gegebenen Gleichungen vorstellen. — Nimmt man also z. B. die ersten 4 dieser Gleichungen nehmlich (6—9.) und eliminirt aus ihnen y, so erhält man abermals viele neue Gleichungen von denen wir aber nur dreie gebrauchen, etwa:

aus (6. und 7.)... 16) $-2z+26v+4t=66$
aus (6. und 8.)... 17) $20z+48v+40t=172$
oder $5z+12v+10t=43$
aus (6. und 9.)... 18) $8z+32v+18t=95$.

Aus diesen 3 Gleichungen eliminirt man nun wieder z und erhält:

aus (16. 17.)... 19) $77v+20t=208$
aus (16. 18.)... 20) $136v+34t=359$.

Daraus abermals v eliminirt, giebt

21) $102t=645$, also $t=\frac{645}{102}$.

Setzt man nun diesen Werth von t in eine der beiden Gleichungen (19. oder 20.) z. B. in (19.), so erhält man

22) $77.v+20.\frac{645}{102}=208$ oder $v=\frac{108}{102}$.

Werden ferner diese Werthe von t und v in eine der Gleichungen (16—18.) z. B. in (16.) gesetzt, so erhält man:

23) $-2.z+26.\frac{108}{102}+4.\frac{645}{102}=66$, und $z=-\frac{672}{102}$.

Diese Werthe von z, v, t in eine der Gleichungen (6—15.) z. B. in (6.) gesetzt, geben:

24) $y-\frac{672}{102}+7.\frac{108}{102}+3.\frac{645}{102}=20$, oder $y=\frac{21}{102}$.

Und wenn man endlich diese Werthe von y, z, v, t in eine der 5 Gleichungen (1—5.) z. B. in (2.) substituirt, so ergiebt sich:

25) $-x+\frac{21}{102}+\frac{672}{102}+4.\frac{108}{102}-\frac{645}{102}=6$, oder $x=-\frac{132}{102}$;

und so sind also die Werthe für die 5 Unbekannten x, y, z, v und t, gefunden, welche den 5 Gleichungen (1—5.) genügen.

Anmerkung 1. Zuweilen ist es bequem, noch ehe man eliminirt, aus den gegebenen Gleichungen erst andere einfachere oder doch für die Elimination bequemere abzuleiten, diese letztern dann als die gegebenen anzusehen und nun erst das Geschäft des Eliminirens zu beginnen. — Denn in jeder richtig abgeleiteten Gleichung haben die Unbekannten noch dieselben Werthe, wie in den gegebenen Gleichungen und die neuen Gleichungen aufgelöst, müssen daher auch noch dieselben Werthe liefern für die Unbekannten, wie die gegebenen Gleichungen, wenn solche unmittelbar aufgelöst worden wären.

Addirt man z. B. in den obigen 5 Gleichungen (1—5. §. 204.) die Gleichungen (1.) und (2.) so erhält man:

$$\text{I.}\quad x + 2z + 3v + 4t = 14.$$

Addirt man dagegen (1.) und (3.) so ergiebt sich:

$$\text{II.}\quad -x + 3y + 2z + 5v + 3t = 13.$$

Addirt man ferner die Gleichungen (2. 3. und 4.), so geht hervor:

$$\text{III.}\quad x + 6y - z + 8v = 15.$$

Nimmt man nun zu diesen Gleichungen (I. — III.) noch die gegebenen Gleichungen (2.) und (5.) hinzu, nehmlich

(2.) oder $\text{IV.}\quad -x + y - z + 4v - t = 6$

(5.) oder $\text{V.}\quad x - 3y + 3z - 2v + 4t = 1\frac{1}{2}$

und löst nun diese neuen Gleichungen (I. — V.) auf, so erhält man dieselben Werthe für die Unbekannten, wie oben.

Anmerkung 2. In manchen Fällen gewährt diese vorgängige Umformung der gegebenen Gleichungen sehr bedeutende Vortheile.

Seyen z. B. gegeben die 4 Gleichungen:

$$1)\ \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}z = 5$$
$$2)\ \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{3}y + \tfrac{1}{3}v = 2$$
$$3)\ 6x + 6z + 6v = 18$$
$$4)\ \tfrac{2}{5}y + \tfrac{2}{5}z + \tfrac{2}{5}v = 8;$$

und multiplicirt man die erste mit 2, die andere mit 3, die dritte mit $\frac{1}{6}$, die vierte mit $\frac{5}{2}$, so erhält man:

$$5)\ x + y + z = 10$$
$$6)\ x + y + v = 6$$
$$7)\ x + z + v = 3$$
$$8)\ y + z + v = 20.$$

Addirt man nun diese 4 neuen Gleichungen, so geht hervor

$$3x + 3y + 3z + 3v = 39$$

oder $$9)\ x + y + z + v = 13.$$

Und zieht man nun von dieser letztern Gleichung (9.) nach und nach die Gleichungen (5 — 8.) ab, so ergiebt sich unmittelbar:

(9.)—(5.)... 10) $v = 3$,
(9.)—(6.)... 11) $z = 7$,
(9.)—(7.)... 12) $y = 10$,
(9.)—(8.)... 13) $x = -7$,

so daß dasmal die Werthe der Unbekannten weit leichter noch gefunden sind, als sie auf dem früher beschriebenen Wege gefunden werden können.

Die Uebung allein lehrt aber in jedem vorkommenden Fall den besten Weg zu betreten; und für den Ungeübten ist es hinlänglich einen Weg zu haben, auf welchem jede Aufgabe behandelt werden kann, wenn dieser auch nicht allemal der kürzeste seyn sollte. Indem man sich auf diesem Wege übt und jedesmal genau weiß, worauf es ankommt, lernt man nach und nach auch die kürzesten, bequemsten und elegantesten Wege auffinden.

§. 205. Zusatz.

Oft scheinen gegebene algebraische Gleichungen nicht zu den einfachen zu gehören, sondern Gleichungen höherer Ordnungen zu seyn, werden jedoch durch eine leichte Verwandlung auf einfache zurückgebracht.

Beispiel 1. Seyen gegeben die beiden Gleichungen

1) $ax+by=cxy$ und 2) $dx+my=qxy$,

so scheinen diese Gleichungen zur 2ten Ordnung zu gehören, weil das Glied xy der 2ten Dimension in ihnen vorkommt. Man dividire aber jede Gleichung durch xy, so erhält man:

aus (1.)... 3) $a \cdot \frac{1}{y} + b \cdot \frac{1}{x} = c$

aus (2.)... 4) $d \cdot \frac{1}{y} + m \cdot \frac{1}{x} = q$

und diese beiden Gleichungen sind nun offenbar einfache Gleichungen (§. 193.), sobald man nicht mehr x und y, sondern $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{y}$ als die Unbekannten betrachtet. — Dies noch einfacher und anschaulicher zu machen, wollen wir $\frac{1}{x}$ durch x_I und $\frac{1}{y}$ durch y_I vorstellen und die Gleichungen (3. und 4.) werden jetzt die Form

5) $b \cdot x_I + a \cdot y_I = c$
6) $m \cdot x_I + d \cdot y_I = q$

annehmen, und nach (§. 198.) aufgelöst, geben:

$$x_1 = \frac{cd-aq}{bd-am} \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{cm-bq}{am-bd} = \frac{bq-cm}{bd-am}$$

oder $$\frac{1}{x} = \frac{cd-aq}{bd-am} \quad \text{und} \quad \frac{1}{y} = \frac{bq-cm}{bd-am},$$

woraus dann leicht

$$x = \frac{bd-am}{cd-aq} \quad \text{und} \quad y = \frac{bd-am}{bq-cm}$$

sich ergiebt.

Beispiel 2. Seyen gegeben und aufzulösen die 3 Gleichungen

1) $x+y=axy$
2) $x+z=bxz$
3) $y+z=cyz$,

so erhält man auf ähnlichem Wege:

$$x = \frac{2}{a+b-c}, \quad y = \frac{2}{a-b+c}, \quad z = \frac{2}{b+c-a}.$$

Beispiel 3. Aus den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ 2yz - \frac{5}{3}xz + xy = \frac{85}{27}xyz \\ 2)\ \frac{1}{4}yz + xz + 2xy = \frac{443}{72}xyz \\ 3)\ \frac{5}{6}yz - xz + 4xy = \frac{433}{36}xyz \end{array}\right\} \text{ folgt}$$

$$x=6, \quad y=9, \quad z=\tfrac{1}{3}.$$

Anmerkung. Dieselben Beispiele auf dem gewöhnlichen Wege behandelt (§. §. 189. 199.), liefern jedoch ebenfalls bald und leicht dieselben Resultate, in so ferne die entstehenden höhern Gleichungen durch den Unbekannten selbst wegdividirt und dadurch wiederum in einfache verwandelt werden können.

Noch einige Uebungs-Beispiele, Auflösung der Gleichungen mit mehren Unbekannten betreffend.

1) Aus $\left.\begin{array}{l} ax-by=l \\ cx+du=m \\ -ex+fz=n \\ gy+hz=p \end{array}\right\}$ folgt $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{-bhn+(gl+bp)f}{beh+afg} \\ y = \frac{afp-(el+an)h}{beh+afg} \end{array}\right.$

$$z = \frac{bep+(an+el)g}{beh+afg} \quad \text{und} \quad u = \frac{bh(em+cn)+fg(am-cl)-bcfp}{d(beh+afg)}.$$

2) Aus $\left.\begin{array}{l} x-9y-3z+10u=21 \\ 2x+7y+z+u=683 \\ 3x+y-5z-2u=195 \\ 4x-6y+2z+9u=516 \end{array}\right\}$ folgt $\left\{\begin{array}{l} x=100 \\ y=60 \\ z=13 \\ u=50 \end{array}\right\}$.

3) Aus $\frac{xy}{ay-bx}=l$, $\frac{yz}{cz+dy}=m$ und $\frac{xz}{ez+fx}=n$

folgt $x=\frac{lmn(acf-bde)}{cfmn+bfln-bdlm}$

$y=\frac{lmn(acf-bde)}{afln+demn-adlm}$

und $z=\frac{lmn(acf-bde)}{aclm-beln-cemn}$.

4) Aus $\frac{3x+2y}{2y-x}=3$, $\frac{5x-z}{2y+3z}=1$ und $\frac{y+z+2}{x}=3$

folgt $x=2$, $y=3$, und $z=1$.

5) Aus $\frac{2x-3y+8z}{u+1}=1$, $\frac{3y-2z}{4x}=\frac{7}{8}$, $\frac{4u-11}{4z-5}=3$,

und $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{2y}$,

folgt $x=4$, $y=6$, $z=2$, $u=5$.

6) Aus $x+2y-z=7\frac{1}{3}$

$3y-2z+v=7\frac{1}{6}$

$4z-3v+2u=-3\frac{1}{3}$

$5v-4u+3x=21\frac{1}{2}$

und $6u-5x+4y=-7\frac{1}{2}$

folgt $x=4$, $y=2$, $z=\frac{2}{3}$, $u=\frac{3}{4}$, $v=\frac{5}{2}$.

7) Aus $ax+by+cz=3$

$ax+by-cz=1$

$ax-by+cz=1$

folgt $x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{b}$, $z=\frac{1}{c}$.

Schluß-Anmerkung.

Zuweilen scheinen soviel Gleichungen gegeben zu seyn, als Unbekannte in ihnen vorkommen, während in der That die ursprüngliche Zahl der Gleichungen geringer war und nur dadurch vermehrt wurde, daß man aus den gegebenen Gleichungen selbst noch neue Gleichungen ableitete.

Nehmen wir z. B. die Gleichungen:

$\frac{3x+2y}{2y-x}=3$, $\frac{5x-z}{2y+3z}=1$ und $\frac{y+z}{x}=2$,

so geben sie geordnet, die folgenden

$3x-2y=0$

$5x-2y-4z=0$

$2x-y-z=0$.

Eliminirt man nun z aus den beiden letztern, so ergiebt sich genau die erstere, so daß diese erste Gleichung in den beiden andern schon enthalten ist. Es sind also dasmal eigentlich nur die beiden Gleichungen

1) $5x-2y-4z=0$ und 2) $2x-y-z=0$

gegeben.

So oft aber weniger Gleichungen gegeben sind, als Unbekannte vorkommen, so oft kann man einigen der Unbekannten ganz beliebige Werthe geben, wenn nur noch so viele Unbekannte unbestimmt bleiben, als in der That Gleichungen zu ihrer Bestimmung vorhanden sind. — Giebt man z. B. in den vorliegenden Gleichungen dem z irgend einen beliebigen Werth, so hat man dann zwei Gleichungen zwischen den beiden Unbekannten x und y, welche zur Bestimmung der letztern dienen werden. Weil aber dem z jedesmal ein anderer und anderer Werth gegeben werden kann, so wird man dann auch für x und y immer andere und andere zugehörige Werthe finden, so daß es unendlich viele zusammengehörige Werthe (Systeme von Werthen) für x, y, z geben wird, welche alle den beiden gegebenen Gleichungen (1. und 2.) genügen.

Sind mehr Gleichungen gegeben als Unbekannte zu bestimmen, so nimmt man so viele derselben als zur Bestimmung der Unbekannten, erforderlich sind, löset sie auf, und findet so die Werthe der Unbekannten, welche diesen Gleichungen genügen. Dann setzt man dieselben Werthe statt der Unbekannten auch in die übrigen Gleichungen und sieht zu, ob letztere ebenfalls identisch werden. Ist dieses der Fall, so hat man seinen Zweck erreicht, und ist letzteres nicht der Fall, so enthalten die Gleichungen einen Widerspruch, d. h. es ist dann nicht möglich, Werthe der Unbekannten zu finden, welche allen Gleichungen zugleich genügen könnten.

Schlußfragen.

1) Wodurch unterscheidet sich die Bestimmungs-Gleichung von der identischen? — Antw. Dem Wesen nach gar nicht, sondern nur der Form nach. — Gilt eine Gleichung für jeden Werth von x, so ist sie nach diesem x identisch, gilt sie aber nicht für jeden, sondern nur für bestimmte Werthe von x, so ist sie nach diesem x eine Bestimmungs-Gleichung (welche dann wieder algebraisch oder transcendent seyn kann, während die algebraischen entweder einfache oder höhere seyn werden.).

2) Worin besteht das Ordnen einer Gleichung? — Und kann man eine Gleichung verschiedentlich ordnen, indem man z. B. sie einmal nach x, das anderemal nach y, das drittemal nach einem dritten Buchstaben, welcher der Unbekannte seyn kann, ordnet? —

3) Wenn man Gleichungen (einfache) mit mehren Unbekannten hat,

und wenn aus ihnen schon die völlig bekannten Werthe einiger (oder eines) der Unbekannten vorliegen, wenn man endlich diese bekannten Werthe statt der Unbekannten in die gegebenen oder abgeleiteten Gleichungen gesetzt hat, und wenn sich zuletzt dadurch mehre Gleichungen gebildet haben, aus deren jeder ein neuer Unbekannter gefunden werden kann, wird man aus jeder dieser letztern Gleichungen für den Unbekannten einen und denselben Werth finden? — Antw. Bei einfachen Gleichungen allemal.

Denn die gegebenen Gleichungen existiren nur in so ferne, als die unbekannten Buchstaben ihre Werthe vorstellen, so daß man sich letztere schon statt der Unbekannten selbst stehend denken muß, wenn die Gleichungen als solche sollen anerkannt werden. Weil aber bei dem Ableiten der Gleichungen aus einander, der Werth der einzelnen Buchstaben völlig unberücksichtigt bleibt, so stellen diese Buchstaben in allen abgeleiteten Gleichungen, wie in den ursprünglichen, allemal genau dieselben Werthe vor. Aus welcher Gleichung also die Werthe eines oder des andern Unbekannten durch Auflösung erhalten werden, wenn nur ein einziger Werth gefunden wird, so ist solcher allemal derselbe.

Note. Bei höhern Gleichungen, welche für die Unbekannten mehre Werthe liefern können, erleidet dieser Schluß dahin eine Modifikation, daß unter den Werthen, welche aus einer Gleichung gefunden werden, doch allemal derjenige enthalten seyn muß, den der Unbekannte in den gegebenen Gleichungen vorstellt, so daß zwar nicht alle Werthe, die man aus mehren verschiedenen Gleichungen erhält, nothwendig genau dieselben seyn müssen, der wahre Werth des Unbekannten jedoch allemal unter denen enthalten seyn muß, welche sich aus der Auflösung irgend einer dieser Gleichungen ergeben.

Uebungs-Beispiele zum 12ten Kapitel.

1) Die Zahl 150 dergestalt in 2 Theile zu theilen, daß der erste in dem zweiten $1\frac{1}{2}$ mal enthalten ist? x der erste Theil, $1\frac{1}{2}x$ der zweite und $x+1\frac{1}{2}x=150$, also $x=60$ und der andere Theil 90.

2) Die Zahl 150 dergestalt in 2 Theile zu theilen, daß sich der erste zum zweiten verhält wie 2 zu 3? x der erste Theil, y der zweite und $x+y=150$, so wie $x:y=2:3$, woraus $x=60$, $y=90$ hervorgeht. *)

3) Man soll $1\frac{7}{12}$ dergestalt in Viertel und Sechstel zerlegen, daß der Zähler des ersten Bruches um 2 Einheiten kleiner sey, als der Zähler des andern? — Antw. Ist der eine Zähler x, so läßt sich der andere

*) Diese beiden Aufgaben (1. und 2.) unterscheiden sich durch nichts von einander als durch die Form in der sie gegeben sind.

durch y ausdrücken, dergestalt daß man hat $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1\frac{7}{12}$ und $x+2=y$; oder es läßt sich der zweite Zähler sogleich durch $x+2$ ausdrücken, ohne y zu Hilfe zu nehmen, und die Gleichung ist dann $\frac{x}{4}+\frac{x+2}{6}=1\frac{7}{12}$; woraus $x=3$ folgt, so daß $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{6}$ die beiden verlangten Brüche sind.

4) Zwei Zahlen zu finden, deren Unterschied 12 und deren Summe 80 ist? Antw. 46 und 34.

5) Es sollen 3 Zahlen so gefunden werden, daß wenn man die zweite durch die erste dividirt, dann 4 zum Quotienten kommt und 3 im Rest bleibt; und wenn man die 3te durch die 2te dividirt, so erhält man 2 und noch 6 zum Rest, und die Summe aller 3 Zahlen soll 93 seyn? Antw. 6,27,60.

6) Es wird der Bruch gesucht, der so beschaffen ist, daß wenn man vom Zähler 1 hinwegnimmt, dann $\frac{1}{3}$ und wenn man vom Nenner 1 hinweg nimmt, dann $\frac{1}{2}$ sich ergiebt. Antw. $\frac{4}{9}$.

7) Zum Zähler und Nenner eines Bruches wird 4 addirt, und es entsteht der Bruch $\frac{3}{4}$, und 2 vom Zähler und Nenner subtrahirt, giebt $\frac{1}{2}$. Welches ist dieser Bruch? Antw. $\frac{5}{8}$.

8) Eine Zahl wird mit 3 Ziffern geschrieben, die in arithmetischer Proportion stehen. Wird diese Zahl durch die Summe ihrer Ziffern dividirt, so ist der Quotient 48; zieht man aber von ihr 198 ab, so enthält die entstehende numerische Zahl dieselben 3 Ziffern aber in umgekehrter Ordnung. Welches ist diese Zahl? Antw. Sie besteht aus den Ziffern x, y, z, ist also $100x+10y+z$, so daß x, y, z bestimmt sind durch die 3 Gleichungen

$$x-y=y-z,\quad \frac{100x+10y+z}{x+y+z}=48,\quad 100x+10y+z-198=100z+10y+x.$$

Sie ist also 432.

9) Zwei Zahlen zu finden, deren Quotient gegeben und $=m$ ist, und deren Summe $=a$. Antw. $\frac{a}{m+1}$ und $\frac{ma}{m+1}$.

10) Eine Zahl a in 3 Theile zu theilen, so daß der zweite und der dritte durch den ersten dividirt, beziehlich m und n geben. Antw.

$$\frac{a}{m+n+1},\quad \frac{ma}{m+n+1},\quad \frac{na}{m+n+1}.$$

11) Eine Zahl a in 3 Theile zu zerlegen, so daß sich der erste zum 2ten verhält wie $m:n$, und der zweite zum dritten wie $p:q$. Antw.

$$\frac{mpa}{mp+np+nq},\quad \frac{npa}{mp+np+nq},\quad \frac{nqa}{mp+np+nq}.$$

12) Was ist das für eine Zahl, die mit 5 multiplicirt, und wenn man zu dem Produkt 1 addirt, das Ganze durch 4 dividirt und zuletzt noch 7 subtrahirt, gerade 2 giebt? Antw. 7.

13) Man sucht zwei Zahlen, wenn man die erste mit $\frac{2}{3}$, die andere mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt und die Resultate addirt, so erhält man 12; multiplicirt man dagegen die erste mit $3\frac{1}{3}$, die zweite mit $2\frac{1}{2}$ und subtrahirt das letztere Resultat von ersterem, so kommt 10. Welches sind diese Zahlen? Antw. 9 und 8.

14) Vergrößert man die eine von zwei gesuchten Zahlen um $6\frac{1}{2}$, so ist sie $4\frac{1}{2}$ mal so groß als die andere. Und vermehrt man die andere um 18, so wird sie 3 mal so groß als die erste. Antw. 7 und 3.

15) Es werden zwei Zahlen gesucht, deren Differenz, Summe und Produkt sich wie 3:9:8 verhalten. Antw. Sie sind x und y, so daß $\frac{x-y}{3}=\frac{x+y}{9}=\frac{xy}{8}$, also $x=\frac{8}{3}$ und $y=\frac{4}{3}$ ist.

16) Man sucht zwei Zahlen, deren Summe a mal und deren Produkt b mal so groß ist, als ihre Differenz? Antw. $\frac{2b}{a-1}$, $\frac{2b}{a+1}$.

17) Die Summe zweier Zahlen ist $=p$, die Differenz ihrer Quadrate $=q$; welches sind die Zahlen? — Antw. $\frac{p^2+q}{2p}$, $\frac{p^2-q}{2p}$.

18) Die Summe und der Quotient zweier Zahlen ist gleich groß und $=a$; welches sind diese Zahlen? Antw. $\frac{a}{a+1}$, $\frac{a^2}{a+1}$.

19) Die Summe je zweier von 3 Zahlen ist beziehlich m, n, p; welches sind diese Zahlen? — Antw. $\frac{m+n-p}{2}$, $\frac{m-n+p}{2}$, $\frac{-m+n+p}{2}$.

20) Es werden 3 Zahlen gesucht. Subtrahirt man von der zweiten 2 und addirt zu der ersten 2, so verhalten sich die Resultate wie 2 zu 3. — Addirt man zu der zweiten 4 und subtrahirt man von der 3ten 1, so verhält sich die Summe zu der Differenz wie 5:4. Zieht man aber von der ersten 1 ab und addirt zu der dritten 3 hinzu, so verhält sich die Differenz zur Summe wie 1 zu 4. Welche Zahlen sind es? Antw. 4, 6, 9.

21) Wird von 3 gesuchten Zahlen die erste zu dem mfachen der übrigen addirt, so kommt a; wird die zweite zu dem $m_1$fachen der übrigen addirt, so ergiebt sich a_1; und wird die 3te zu dem $m_2$fachen der übrigen addirt, so erhält man a_2. Welche Zahlen sind es? — Antw.

$$\frac{1}{m-1}\left(\frac{mB}{A-1}-a\right),\quad \frac{1}{m_1-1}\left(\frac{m_1B}{A-1}-a_1\right),\quad \frac{1}{m_2-1}\left(\frac{m_2B}{A-1}-a_2\right)$$

wenn der Kürze wegen

$A = \frac{m}{m-1} + \frac{m_1}{m_1-1} + \frac{m_2}{m_2-1}$ und $B = \frac{a}{m-1} + \frac{a_1}{m_1-1} + \frac{a_2}{m_2-1}$

gesetzt wird.

22) Die Summe von 3 gesuchten Zahlen ist 48. Wird von der ersten und zweiten 4 abgezogen, so verhalten sich die Reste wie 2 zu 3. Und wird von der 2ten und 3ten 4 abgezogen, so verhalten sich die Reste wie 3 zu 4. Welche Zahlen sind es? — Antw. 12, 16 und 20.

23) Wenn man zu der ersten und zweiten von 3 gesuchten Zahlen 4 addirt, so verhalten sich die Summen wie 4:5. Addirt man zu der ersten und dritten Zahl 8, so verhalten sich die Summen wie 5:7. Und subtrahirt man 8 von der zweiten und dritten, so verhalten sich die Differenzen wie 2 zu 3. Welche Zahlen sind es? Antw. 12, 16, 20.

Arithmetik.

Dreizehntes Kapitel.

Von den quadratischen und höhern Gleichungen.

§. 206. Erklärung.

Eine quadratische Gleichung $ax^2+bx=c$ heißt eine unreine, wenn b nicht Null ist, eine reine dagegen, wenn $b=0$ ist, d. h. wenn sie die Form $ax^2=c$ annimmt.

§. 207. Zusatz.

Eine reine quadratische Gleichung $ax^2=c$ liefert $x^2=\frac{c}{a}$; und $\pm\sqrt{\frac{c}{a}}$ sind dann die beiden Werthe die x hat; nehmlich sowohl $+\sqrt{\frac{c}{a}}$ als auch $-\sqrt{\frac{c}{a}}$ haben die Eigenschaft, daß sie mit 2 potenzirt, (d. h. quadrirt), $\frac{c}{a}$ wieder geben.

Aus $ax^2=c$ folgt also $x=\pm\sqrt{\frac{c}{a}}$.

Anmerkung. Die Gleichungen $x=+\sqrt{\frac{c}{a}}$ und $x=-\sqrt{\frac{c}{a}}$ sollen beide nichts weiter andeuten, als daß so wohl $+\sqrt{\frac{c}{a}}$ in $ax^2=c$ statt x gesetzt, diese Gleichung zur identischen mache, und daß auch $-\sqrt{\frac{c}{a}}$ diese Eigenschaft habe, und statt x gesetzt der Gleichung $ax^2=c$ Genüge leiste. Es ist also nicht zu gleicher Zeit $x=+\sqrt{\frac{c}{a}}$ und $x=-\sqrt{\frac{c}{a}}$, (weil sonst auch $+\sqrt{\frac{c}{a}}=-\sqrt{\frac{c}{a}}$ gefolgert werden könnte) sondern in dem Augenblick, wo man sich unter x den einen Werth $+\sqrt{\frac{c}{a}}$ vorgestellt denkt, ist von dem andern Werthe $-\sqrt{\frac{c}{a}}$ nicht die Rede; während man sich jedoch in dem andern Augenblicke unter x den Werth $-\sqrt{\frac{c}{a}}$ vorgestellt denken kann, dann aber den Werth $+\sqrt{\frac{c}{a}}$ völlig außer Acht läßt.

§. 208. Aufgabe.

Die unreine quadratische Gleichung $ax^2+bx=c$ aufzulösen.

Auflösung. 1) Man dividire durch a weg und erhält

$$x^2+\frac{b}{a}x=\frac{c}{a}.$$

2) Von dem Coefficienten $\frac{b}{a}$ von x, nehme man die Hälfte $\left(\frac{b}{2a}\right)$, quadrire dieses Resultat, $\left(\text{giebt } \frac{b^2}{4a^2}\right)$ und addire solches Quadrat zu beiden Seiten der Gleichung, so erhält man

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{4ac+b^2}{4a^2}.$$

3) Weil aber dann der Ausdruck links, nehmlich

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

allemal nach (§. 128.) nichts anders ist als

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2,$$

so ist die Gleichung (n. 2.) nun folgende:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{4ac+b^2}{4a^2},$$

also in Bezug auf die unbekannte Summe $x+\frac{b}{2a}$ (die man auch durch den einen Buchstaben z vorstellen könnte, so daß $x+\frac{b}{2a}=z$ und die Gleichung selbst $z^2=\frac{4ac+b^2}{4a^2}$ wäre) eine reine quadratische Gleichung, welche nach (§. 207.) z oder $x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{4ac+b^2}{4a^2}}=\frac{\pm\sqrt{4ac+b^2}}{2a}$ liefert.

4) Daraus folgt dann

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{4ac+b^2}{4a^2}}=\frac{-b\pm\sqrt{4ac+b^2}}{2a},$$

so daß für x abermals zwei Ausdrücke gefunden sind, welche der Gleichung $ax^2+bx=c$ genügen.

Anmerkung. Wäre die gegebene Gleichung

$$x^2+px=q$$

gewesen, so hätte man

$$x^2+px+\tfrac{1}{4}p^2=q+\tfrac{1}{4}p^2$$

oder

$$(x+\tfrac{1}{2}p)^2=q+\tfrac{1}{4}p^2$$

und

$$x+\tfrac{1}{2}p=\pm\sqrt{q+\tfrac{1}{4}p^2},$$

so wie

$$x=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\tfrac{1}{4}p^2}$$

daraus abgeleitet.

§. 209. Zusatz.

Die Gleichung $x^2+px=q$

giebt also $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}$

und die Gleichung $z^2-pz=q$

giebt $z=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}$.

Anmerkung. Für die Praxis ist es bequem, wenn man eines dieser Resultate als Lehrsatz im Gedächtniß behält, etwa unter folgender Form:

Wenn x ein Ausdruck ist, für welchen

1) $x^2+px=q$ seyn muß,

so ist allemal 2) $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}$.

Beispiel 1. Hat man nun z. B. gegeben die Gleichung

3) $x^2+7x=30$,

so setzt man 7 statt p und 30 statt q, und unter der Voraussetzung, daß p und q gerade diese Werthe vorstelle, ist die Gleichung (1.) keine andere als die Gleichung (3.), folglich auch die Auflösung von (1.) d. h. die Gleichung (2.) zu gleicher Zeit die Auflösung von (3.), wenn man sich nur unter p und q dieselben Werthe vorgestellt denkt. Setzt man aber 7 statt p und 30 statt q, so erhält man aus (2.):

$$x=-\tfrac{7}{2}\pm\sqrt{\tfrac{49}{4}+30}=-\tfrac{7}{2}\pm\sqrt{\tfrac{169}{4}}=-\tfrac{7}{2}\pm\tfrac{13}{2}$$

d. h. $x=\left\{\begin{matrix}3\\-10\end{matrix}\right\}$; d. h. sowohl 3, als auch -10 sind Werthe, die, wenn man sie statt x in die Gleichung (3.) setzt, solche identisch machen. Es ist nehmlich

$3^2+7\cdot3=30$ und auch $(-10)^2+7\cdot(-10)=30$.

Beispiel 2. Hat man dagegen die Gleichung

4) $z^2-5z=14$

so muß statt $\frac{x,\quad p,\quad q}{z,\ -5,\ 14}$ beziehlich

gedacht werden, wenn die Gleichung (1.) zu gleicher Zeit die hiesige (4.) vorstellen soll, und wenn (2.) als die Auflösung von (1.), zu gleicher Zeit die Auflösung von (4.) enthalten soll, indem man sich unter x, p, q dasselbe vorgestellt denkt. Die Gleichung (2.) giebt aber dann:

$$z=-(-\tfrac{5}{2})\pm\sqrt{(-\tfrac{5}{2})^2+14}$$

oder $z=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}+14}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{81}{4}}=\frac{5}{2}\pm\frac{9}{2}$

d. h. $z=7$ oder $z=-2$.

Und es ist in der That

$7^2-5\cdot7=14$ und auch $(-2)^2-5\cdot(-2)=14$.

Beispiel 3. Soll 5) $5x^2-55x+150=0$

aufgelöset werden, so muß man diese Gleichung erst auf die Form

$x^2+px=q$ bringen, also durch 5 dividiren und vorher 150 auf die andere Seite setzen (§. 170.) und erhält dann

$$x^2-11x=-30,$$

also $p=-11$ und $q=-30$, und für diese Werthe aus (2.):

$$x=\tfrac{11}{2}\pm\sqrt{(\tfrac{11}{2})^2-30}=\tfrac{11}{2}\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}}=\tfrac{11}{2}\pm\tfrac{1}{2},$$

d. h. $x=6$ oder $x=5$.

Und es ist in der That

$5.6^2-55.6+150=0$ und auch $5.5^2-55.5+150=0$.

Beispiel 4. Aus 6) $3x^2-7x-6=0$

folgt $x^2-\tfrac{7}{3}x=2$;

also $p=-\tfrac{7}{3}$ und $q=2$, und aus (2.):

$$x=\tfrac{7}{6}\pm\sqrt{(\tfrac{7}{6})^2+2}=\tfrac{7}{6}\pm\sqrt{\tfrac{121}{36}}=\tfrac{7}{6}\pm\tfrac{11}{6}$$

d. h. $x=3$ oder $x=-\tfrac{2}{3}$.

Und in der That ist

$3.3^2-7.3-6=0$ und auch $3.(-\tfrac{2}{3})^2-7.(-\tfrac{2}{3})-6=0$.

Beispiel 5. Für die Gleichung 7) $ax-(b-c)x^2-b=d$ erhält man, wenn sie geordnet, und in ihr x^2 vom Coefficienten befreit wird,

zuerst $(b-c)x^2-ax=-(b+d)$

dann $$x^2-\frac{a}{b-c}x=-\frac{b+d}{b-c}$$

und nun $p=-\frac{a}{b-c}$ und $q=-\frac{b+d}{b-c}$ setzend, aus (2.):

$$x=\frac{a}{2(b-c)}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4(b-c)^2}-\frac{b+d}{b-c}}$$

d. h.
$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4(b-c)(b+d)}}{2(b-c)},$$

welches die beiden Auflösungen von (7.) seyn werden. *)

---

*) Man muß nur bei jeder gegebenen Gleichung, die nach einem der Buchstaben, der als Unbekannter genommen wird, aufgelöst werden soll, nicht unterlassen, die Gleichung vor allen Dingen nach dem Unbekannten zu ordnen, und sie, im Falle sie geordnet als eine quadratische erscheint, auf die Form $x^2+px=q$ bringen. Ist daher das mit x^2 behaftete Glied negativ (subtraktiv), so bringe man es (und alle mit x behaften Glieder zugleich) nach (§. 170.) auf die andere Seite; und hat x^2 noch einen Coefficienten vorstehen, so dividire man vorher die ganze Gleichung durch diesen Coefficienten, damit die neue Gleichung x^2 positiv (additiv) und ohne Coefficienten enthalte.

Beispiel 6. Sey gegeben und aufzulösen die Gleichung

$$8)\quad \frac{7}{1-x}-3=\frac{8}{3-2x}+5 \quad \text{oder} \quad \frac{7}{1-x}=\frac{8}{3-2x}+8,$$

so ordne man zuerst diese Gleichung, mit dem Wegschaffen der Brüche den Anfang machend, und erhält:

$$21-14x=8-8x+24-40x+16x^2$$

oder $$16x^2-34x=-11$$

oder $$x^2-\tfrac{17}{8}x=-\tfrac{11}{16}.$$

Mithin aus (2.), $p=-\frac{17}{8}$, $q=-\frac{11}{16}$ setzend,

$$x=\tfrac{17}{16}\pm\sqrt{(\tfrac{17}{16})^2-\tfrac{11}{16}}=\tfrac{17}{16}\pm\sqrt{\frac{113}{16^2}}=\frac{17\pm\sqrt{113}}{16}.$$

Nun findet sich aber nach (§. 154.):

$$\sqrt{113}=10{,}63014....$$

also $\frac{17+\sqrt{113}}{16}=1{,}72688...$ und $\frac{17-\sqrt{113}}{16}=0{,}39811...$

welches hier die beiden gesuchten Werthe von x sind, nehmlich

$$x=1{,}72688... \quad \text{oder} \quad x=0{,}39811...$$

Beispiel 7. Soll aufgelöst werden die Gleichung

$$8)\quad 3x^2+2x+9=0$$

oder $$x^2+\tfrac{2}{3}x=-3,$$

so findet man aus (2.), $p=\frac{2}{3}$, $q=-3$ setzend,

$$x=-\tfrac{1}{3}\pm\sqrt{(\tfrac{1}{3})^2-3}=\frac{-1\pm\sqrt{-26}}{3}=\frac{-1\pm\sqrt{-2}\cdot\sqrt{13}}{3}$$

und beide Werthe von x sind dasmal imaginär. (§. 167.).

Uebungs-Beispiele.

1) Aus $11\frac{3}{4}x-3\frac{1}{2}x^2=-41\frac{1}{4}$ folgt $x=\left\{\begin{matrix}-2\frac{1}{7}\\ 5\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}$.

2) Aus $3x^2-x=7$ folgt $x=-1{,}3699...$, $x=1{,}7032...$

3) Aus $3x^2+6x+30=0$ folgt $x=-1-\sqrt{-9}$ und $x=-1+\sqrt{-9}$.

4) Aus $118x-2\frac{1}{2}x^2=20$ folgt $x=47{,}0298...$, $x=0{,}1701...$

5) Aus $\frac{x}{x-60}+\frac{7}{3x+5}=0$ folgt $x=\left\{\begin{matrix}-14\\ +10\end{matrix}\right\}$.

6) Aus $bcx-acx^2=adx-bd$ folgt $x=\frac{b}{a}$ und $x=-\frac{d}{c}$.

7) Aus $abx^2 - \frac{3a^2x}{c} = \frac{6a^2+ab-2b^2}{c^2} + \frac{b^2x}{c}$

folgt $x = \frac{b-2a}{ac}$ und $x = \frac{2b+3a}{bc}$.

8) Aus $\frac{2x+3}{10-x} = \frac{2x}{25-3x} - 6\frac{1}{2}$ folgt $x = 13\frac{2}{3}\frac{2}{1}$, $x = 8$.

9) Aus $\frac{x-3}{2x-1} - \frac{2-3x}{x-2} = 1$ folgt $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{7+\sqrt{-71}}{10} \\ x = \frac{7-\sqrt{-71}}{10} \end{array}\right\}$.

10) Aus $cx + \frac{ac}{a-b} = (a-b)x^2$

folgt $x = \frac{c+\sqrt{c^2+4ac}}{2(a-b)}$, und $x = \frac{c-\sqrt{c^2+4ac}}{2(a-b)}$.

11) Aus $\frac{a}{b-x} - \frac{cx-d}{2x-1} = \frac{3a}{b}$ folgt

$$x = \frac{b^2c+bd+3a \pm \sqrt{(b^2c+bd+3a)^2 - 4(6a+bc)b(2a+bd)}}{2(6a+bc)}.$$

12) Aus $s = [2a+(n-1)d]\frac{n}{2}$

folgt $n = \frac{-(2a-d) \pm \sqrt{(2a-d)^2+8ds}}{2d}$.

13) Aus $s = \frac{(u-a+d)(u+a)}{2d}$

folgt $u = \frac{-d \pm \sqrt{(2a-d)^2+8ds}}{2}$

und $a = \frac{d \pm \sqrt{(2u+d)^2-8ds}}{2}$.

14) Aus $s = [2u-d(n-1)] \cdot \frac{n}{2}$

folgt $n = \frac{2u+d \pm \sqrt{(2u+d)^2-8ds}}{2d}$.

15) Aus $\frac{18+x}{6(3-x)} = \frac{20x+9}{19-7x} - \frac{65}{4(3-x)}$

folgt $x = 7\frac{22}{113}$ und $x = 2\frac{1}{2}$.

16) Aus $\frac{2c^2+acd}{(a+b)d^2} - \frac{a-b}{a+b}(2c+ad)\frac{x}{d} = \frac{cx}{d} - (a-b)x^2$

folgt $x = \frac{2c+ad}{d(a+b)}$ und $x = \frac{c}{d(a-b)}$.

17) Aus $ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0$ folgt

$$y=\frac{-(bx+d)\pm\sqrt{(b^2-4ac)x^2+2(bd-2ae)x+(d^2-4af)}}{2a}$$

und $$x=\frac{-(by+e)\pm\sqrt{(b^2-4ac)y^2+2(be-2cd)y+(e^2-4cf)}}{2c}.$$

18) Aus $(b^2-4ac)x^2+2(bd-2ae)x+d^2-4af=0$ folgt

$$x=\frac{-(bd-2ae)\pm\sqrt{(bd-2ae)^2-(b^2-4ac)(d^2-4af)}}{b^2-4ac}.$$

19) Aus $abx^2-2x(a+b)\sqrt{ab}=(a-b)^2$

folgt $$x=\frac{a+b\pm\sqrt{2a^2+2b^2}}{\sqrt{ab}}.$$

20) Aus $8x^2-7x+34=0$ folgt $x=\frac{7\pm\sqrt{-1039}}{16}$.

21) Aus $4x^4-4px^2-q^2=0$ folgt $(2x^2)^2-2p(2x^2)-q^2=0$

und $$x=\sqrt{\tfrac{1}{2}p\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2}}.$$

22) Aus $$\frac{5a+10ab^2}{9b^2-3a^2b^2}x^2-\left(\frac{5\sqrt{a+b}}{3b^3}+\frac{(1+2b^2)cd\sqrt{c}}{3-a^2}\right)x$$
$$+\frac{cd}{ab}\sqrt{(a+b)c}=0$$

folgt $$x=\frac{(3-a^2)\sqrt{a+b}}{ab(1+2b^2)},\quad x=\frac{3b^2cd\sqrt{c}}{5a}.$$

23) Aus $ax=b+\sqrt{cx}$ folgt $$x=\frac{2ab+c+\sqrt{4abc+c^2}}{2a^2},$$

wo die Wurzel das + oder — Zeichen vor sich nimmt, je nachdem in $\sqrt{cx}$ das + oder — Zeichen genommen wird.

24) Aus $$\frac{a(x^2-a)}{b-c}=(b-c)\left(-1+\frac{2x\sqrt{a}}{b-c}\right)$$

folgt $x=\frac{b-c+a}{\sqrt{a}}$ und $x=\frac{b-c-a}{\sqrt{a}}$.

25) Aus $cx^2-2cx\sqrt{d}=dx^2-cd$

folgt $x=\frac{\sqrt{cd}}{\sqrt{c}+\sqrt{d}}$ und $x=\frac{\sqrt{cd}}{\sqrt{c}-\sqrt{d}}$.

26) Aus $3\sqrt{112-8x}=19+\sqrt{3x+7}$ *)

folgt $x=6$ und $x=11\frac{5}{6}\frac{2}{2}\frac{3}{5}$,

---

*) Man quadrirt zuerst auf beiden Seiten und erhält:

$$9(112-8x)=361+38\sqrt{3x+7}+(3x+7)$$

daraus $$640-75x=38\sqrt{3x+7}$$

wo der erste Werth gilt, wenn $\sqrt{3x+7}$ ihren absoluten Werth vorstellt, der andere dagegen, wenn dieselbe Wurzel ihren negativen Werth repräsentirt.

27) Aus $\sqrt{2x+7}+\sqrt{3x-18}=\sqrt{7x+1}$

folgt $x=9$, wenn die Wurzeln alle, ihre absoluten Werthe vorstellen.

28) Aus $\frac{ax^2+b^2x-cx}{x+a}=bx-\frac{bc}{x+a}$

folgt $x=\frac{c}{a-b}$ und $x=b(a-b)$.

§. 210. Erklärung.

Eine kubische Gleichung (Gleichung vom 3ten Grade) heißt eine reine, wenn sie die Form

$ax^3=b$ hat; sie heißt eine reducirte, wenn bloß das mit x^2 behaftete Glied fehlt; z. B. die Gleichung

$ax^3+bx=c$.

§. 211. Zusatz.

Die reine kubische Gleichung

$$x^3=a$$

giebt

$$x=\sqrt[3]{a}\ *),$$

welches die Auflösung ist.

---

und wenn diese Gleichung nochmals quadrirt wird, so fällt auch die Wurzel rechts noch heraus, und man erhält

$$625\cdot x^2-11148\cdot x+44388=0.$$

*) Wenn man 1, und $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ und $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ nimmt und einen jeden dieser Ausdrücke mit 3 potenzirt (zur dritten Potenz erhebt d. h. 3 mal nimmt und mit sich multiplicirt), so erhält man jedesmal 1. — Es ist nehmlich z. B.

$(-1+\sqrt{-3})(-1+\sqrt{-3})=1-2\sqrt{-3}+(\sqrt{-3})^2=-2-2\sqrt{-3}$;

und dieses nochmals mit $-1+\sqrt{-3}$ multiplicirt giebt

$(-2-2\sqrt{-3})(-1+\sqrt{-3})=2-2(\sqrt{-3})^2=2+6=8$. —

Also $(-1+\sqrt{-3})^3=8$, folglich auch $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3=\frac{8}{8}=1$. —

Es giebt also 3 verschiedene Werthe, von denen ein jeder zur

Beispiel. Aus $x^3=-8$ folgt $x=\sqrt[3]{-8}=-2$.

Anmerkung. Man kann auch die Gleichung $x^3=1$ so schreiben $x^3-1=0$, und dann auch so: $(x-1)(x^2+x+1)=0$ und jeder Werth von x, welcher einen dieser Faktoren $x-1$ oder x^2+x+1 zu Null macht, macht offenbar die Gleichung $(x-1)(x^2+x+1)=0$ d. h. $x^3-1=0$ identisch d. h. $x^3=1$.

Aus $x^2+x+1=0$, wenn man diese Gleichung nach (§. 208.) auflöst, erhält man aber $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3}$. Dies giebt also 3 Werthe, nehmlich 1; $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$; $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$; welche statt x gesetzt, $x^3=1$ machen.

§. 212. Aufgabe.

Man soll die reducirte kubische Gleichung

1) $x^3+px+q=0$ auflösen.

Auflösung. Man setze $x=y+z$, d. h. $y+z$ statt x, und erhält aus (1.)....

---

dritten Potenz erhoben, 1 giebt. Man kann daher $\sqrt[3]{1}$ als dreideutig nehmen; und dann auch $\sqrt[3]{a}$, mag a seyn, was es will; weil, wenn α so ist, daß $\alpha^3=a$ wird, auch $\alpha\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$ und auch $\alpha\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$ zur dritten Potenz erhoben, a geben müssen, in so ferne sie allemal α^3 geben, was $=a$ ist.

Während also jede Quadrat-Wurzel 2 Werthe hat, wenn sie, wie dies (§. 164.) geschehen, allgemeiner aufgefaßt wird, so kann man jede Kubik-Wurzel ebenfalls allgemeiner und so auffassen, daß sie jedesmal 3 Werthe vorstellt, so daß dann in jedem besonderen Falle erst untersucht werden muß, welcher von den dreien gerade vorgestellt und gemeint ist.

Die Auflösung der obigen kubischen (reinen) Gleichung $x=\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ enthält also auch 3 Werthe, nehmlich wenn $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ einen einzigen derselben vorstellt, noch $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ und auch noch $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$.

$$y^3+3y^2z+3yz^2+z^3+p(y+z)+q=0$$

oder 2) $y^3+z^3+q+(3yz+p)(y+z)=0.$

Weil aber statt des Unbekannten x, zwei Unbekannte y und z eingeführt sind, so kann man den einen davon beliebig annehmen, also auch so daß

3) $3yz+p=0$ ist, wodurch die Gleichung (2.)

auf 4) $y^3+z^3+q=0$ zurückgebracht wird.

Aus den Gleichungen (3. und 4.) sucht man nun die Werthe von y und z, und sind sie gefunden, so hat man $x=y+z$.

Eliminirt man aber z aus den Gleichungen (3. und 4.), so erhält man aus (3.):

$$5)\quad z=-\frac{p}{3y}$$

und dieser Werth von z in (4.) statt z gesetzt, giebt

$$6)\quad y^3-\frac{p^3}{27y^3}+q=0$$

als die gesuchte Eliminations-Gleichung. — Ordnet man sie, so findet sich

$$7)\quad y^6+q\cdot y^3-\tfrac{1}{27}p^3=0,$$

welche Gleichung nach y vom 6ten Grade ist, aber so geschrieben

$$8)\quad (y^3)^2+q\cdot(y^3)-\tfrac{1}{27}p^3=0$$

nach y^3 als den Unbekannten (den man auch durch einen einzigen Buchstaben ν vorstellen könnte, so daß man $y^3=\nu$ und dann aus (8.) $\nu^2+q\cdot\nu-\frac{1}{27}p^3=0$ hätte) als eine quadratische betrachtet werden kann und aufgelöst nach (§. 208.):

$$9)\quad y^3=-\tfrac{1}{2}q\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}$$

liefert. — Diese Gleichung ist nun eine reine kubische, und giebt nach (§. 211.)

$$10)\quad y=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}},$$

wo man die Kubik-Wurzel als 3deutig ansehen kann, so daß,

wenn α der eine ihrer Werthe ist, die beiden andern dann $\alpha.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ und $\alpha.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ seyn werden.

Sind aber die 3 Werthe für y gefunden, so darf man solche nur in die Gleichung (5.) substituiren, und diese Gleichung liefert dann zu jedem Werth von y auch einen Werth von z, welche alle in der Gleichung

$$11)\quad z=\frac{-\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}}$$

ausgedrückt sind. — Und dann ist

$$x=y+z=y-\frac{\frac{1}{3}p}{y}$$

d. h.

$$12)\quad x=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}-\frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}},$$

welcher Ausdruck 3 Werthe für x liefert, von denen jeder, statt x gesetzt, die gegebene kubische Gleichung identisch machen muß.

§. 213. Zusatz.

Kubirt man den Werth von z in (11.), multiplicirt dann Zähler und Nenner mit $-\frac{1}{2}q\mp\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$ und zieht nachher die Kubik-Wurzel wieder aus, so erhält man aufs neue z, und zwar

$$13)\quad z=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q\mp\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}},$$

so daß dann noch

$$14)\quad x=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q\mp\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}$$

wird, welcher Ausdruck jedoch nur mit Behutsamkeit anzuwenden ist, so nehmlich, daß wenn man für die erste Kubik-Wurzel (für y) einen ihrer 3 Werthe setzt, dann statt der zweiten Kubik-Wurzel (welche $=z$ ist) nicht jeder beliebige

ihrer 3 Werthe, sondern nur derjenige für sie (d. h. für z) genommen wird, welcher gerade $=-\frac{\frac{1}{3}p}{y}$ wird, unter y den vorher für y gesetzten Werth verstanden. — Von den beiden $\pm$ Zeichen, gelten jedesmal entweder beide obern zugleich, oder beide untern zugleich.

Beispiel. Sey $x^3-3x+18=0$ aufzulösen. Man hat hier, mit $x^3+px+q=0$ vergleichend $p=-3$, $q=18$, $\frac{1}{2}q=9$, $\frac{1}{4}q^2=81$; $\frac{1}{27}p^3=-1$, $\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3=80$, $\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}=8{,}9442713509$,

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}=-0{,}382$, $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}=-2{,}618\ldots$; folglich $x=(-0{,}382+(-2{,}618\ldots))=-3$. Die beiden übrigen Werthe von x findet man, wenn man von der ersten Kubik-Wurzel

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$ die beiden andern Werthe

$(-0{,}382)\cdot\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$ und $(0{,}382)\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$

nimmt, und diese mit den beiden zugehörigen Werthen von

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$ nehmlich $(-2{,}618\ldots)\cdot\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$ und

$(-2{,}618\ldots)\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$ verbindet. Man erhält dann außer $x=-3$ auch noch $x=\frac{3}{2}+1{,}118\times\sqrt{-3}$ und $x=\frac{3}{2}-1{,}118\times\sqrt{-3}$ und weil $\sqrt{-3}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}=1{,}732\ldots\times\sqrt{-1}$ ist, so findet sich auch $x=\frac{3}{2}+1{,}936\times\sqrt{-1}$ und $x=\frac{3}{2}-1{,}936\times\sqrt{-1}$. Von diesen 3 Werthen von x, welche der kubischen Gleichung $x^3-3x+18=0$ genügen, ist nur einer reell, die beiden andern, wie man sieht, sind dagegen imaginär und von der Form $a+b\sqrt{-1}$.

Anmerkung 1. Hatte man einmal $x=-3$ gefunden, so konnte man die eine Seite der auf 0 gebrachten Gleichung, nehmlich $x^3-3x+18$ durch $x+3$ dividiren nach (§. 47.), und erhielt x^2-3x+6, so daß also $x^3-3x+18=(x+3)(x^2-3x+6)$ wird, und die gegebene kubische Gleichung auch noch so geschrieben werden kann

$$(x+3)(x^2-3x+6)=0.$$

Der bloße Anblick lehrt nun, daß diese Gleichung für jeden solchen Werth von x identisch $0=0$ werden muß, welcher einen der Faktoren zu Null macht, also welcher $x+3=0$ oder $x^2-3x+6=0$ macht. Aus $x+3=0$ geht aber der bereits gefundene Werth $x=-3$ hervor. Aus $x^2-3x+6=0$, wenn man sie nach (§. 208.) auflöst, ergiebt sich dagegen:

$$x=\tfrac{3}{2}\pm\sqrt{\tfrac{9}{4}-6}=\tfrac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{-15}}{2}=\tfrac{3}{2}\pm\sqrt{\tfrac{15}{4}}\cdot\sqrt{-1}.$$

Nun findet sich aber $\sqrt{15}=3{,}873$; also $\sqrt{\frac{15}{4}}=1{,}936$; mithin die Werthe hier dieselben, wie die oben gefundenen.

Dieser letztere Weg ist aber derjenige, den man gewöhnlich anwendet, wenn ein Werth des Unbekannten bereits gefunden ist, und nun die übrigen noch gefunden werden sollen.

Anmerkung 2. Die obige Auflösung der gegebenen kubischen Gleichung $x^3+px+q=0$, nehmlich

$$x=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}$$

nennt man gewöhnlich die Cardan'sche Regel. — Sie ist meist sehr unbequem für die Anwendung, und fordert in manchen Fällen noch besondere Kenntnisse, um die Werthe des Unbekannten durch sie wirklich zu finden.

Ist z. B. die kubische Gleichung aufzulösen

$$x^3-19x+30=0,$$

so hat man $p=-19$, $q=30$, $\frac{1}{2}q=15$, $\frac{1}{4}q^2=225$, $\frac{1}{27}p^3=-\frac{6859}{27}$

und $\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3=-\frac{784}{27}$ und $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$

$=\sqrt[3]{-15+\sqrt{-\frac{784}{27}}}$, also imaginär. Eben so

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}=\sqrt[3]{-15-\sqrt{-\frac{784}{27}}}$ d. h. ebenfalls imaginär. Es wäre daher nöthig, daß man aus $-15+\sqrt{-\frac{784}{27}}$ und aus $-15-\sqrt{-\frac{784}{27}}$ die Kubik-Wurzeln zu finden im Stande wäre, in derselben Form $a+b\sqrt{-1}$; und da würde sich ergeben, daß bei dem Addiren der zusammengehörigen Werthe dieser Kubik-Wurzeln, die imaginären Theile wieder wegfallen würden; denn in der That sind dasmal die 3 Werthe von x reell und 2, 3 und -5.

Wie man aber die Kubik-Wurzel aus Ausdrücken von der Form $A+\sqrt{-B}$ findet, in derselben Form $a+\sqrt{-b}$ ausgedrückt, kann erst ein folgender Vortrag über Analysis lehren, weshalb wir hier nur noch bemerken, daß man dieses den irreduktiblen Fall der Cardanischen Regel nennt.

Uebungs-Beispiele.

1) Aus $+x^3+3x+2=0$ folgt $x=-2$.
2) Aus $63=x^3+12x$ folgt $x=3$.
3) Aus $21x-x^3+344=0$ folgt $x=8$.
4) Aus $-x^3+6x-40=0$ folgt $x=-4$.
5) Aus $14=x^3+3x$ folgt $x=2$.
6) Aus $\frac{1}{2}^5x-x^3+290\frac{1}{2}=0$ folgt $x=7$.
7) Aus $x^3+9x+182=0$ folgt $x=-0{,}63783\ldots$
8) Aus $x^3-7x-6=0$ folgt $x=3$, $x=-1$, $x=-2$,

welche letztere Gleichung jedoch, so wie jede, deren 3 Werthe von x alle reell sind, auf den irreduktiblen Fall der Cardanischen Regel führt.

§. 214. Zusatz.

Wäre dagegen die vollständige kubische Gleichung

1) $x^3+ax^2+bx+c=0$

zu lösen, so würde man erstlich $x=z-\frac{1}{3}a$ setzen und haben

$$\begin{array}{rcl} x^3 = & z^3-az^2+\frac{1}{3}a^2z-\frac{1}{27}a^3 \\ ax^2 = & az^2-\frac{2}{3}a^2z+\frac{1}{9}a^3 \\ bx = & bz-\frac{1}{3}ab \\ c = & c \end{array}$$

also 2) $0=z^3+(b-\frac{1}{3}a^2)z+(\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c)$

die neue Gleichung in z, welches eine reducirte ist und nach (§. 212.) (indem man z statt x, $b-\frac{1}{3}a^2$ statt p und $\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c$ statt q substituirt) gelöst werden kann. — Hat man so z gefunden, so hat man auch $x=z-\frac{1}{3}a$.

Beispiel. Ist z. B. die Gleichung $x^3-3x^2+5x-6=0$ aufzulösen, so ist $a=-3$, $b=5$, $c=-6$, und $x=z-\frac{1}{3}a=z+1$, und die Gleichung in z

$$z^3+2z-3=0.$$

Diese nach (§. 212.) aufgelöst, giebt

$$p=2,\ q=-3,\ \tfrac{1}{2}q=-\tfrac{3}{2},\ \tfrac{1}{4}q^2=\tfrac{9}{4},\ \tfrac{1}{27}p^3=\tfrac{8}{27}$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}=\sqrt{\tfrac{9}{4}+\tfrac{8}{27}}=\frac{\sqrt{825}}{18}=1{,}5957118453$$

$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}=1{,}457\ldots$$

$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}=-0{,}457\ldots$$

Also $z=1{,}457\ldots+(-0{,}457\ldots)=1$ und daraus $x=z+1=2$.

So wie aber $x=2$ gefunden ist, so dividire man die auf Null gebrachte Seite x^3-3x^2+5x-6 der gegebenen Gleichung durch $x-2$, erhält x^2-x+3, so daß $(x-2)(x^2-x+3)=0$ abermals die gegebene Gleichung seyn wird. Sucht man daher die Werthe von x, welche den einen Faktor $x-2$ oder den andern Faktor x^2-x+3 zu Null machen, so sind dies sogleich diejenigen, welche die gegebene Gleichung

$$x^3-3x^2+5x-6=0 \quad \text{oder} \quad (x-2)(x^2-x+3)=0$$

identisch auf $0=0$ bringen. — Löst man daher die quadratische Gleichung

$$x^2-x+3=0$$

auf, so erhält man

$$x=\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-11},$$

welches die beiden andern Werthe von x seyn werden, welche der Gleichung $x^3-3x^2+5x-6=0$ genügen.

§. 215. Erklärung.

Eine höhere Gleichung vom mten Grade heißt überhaupt eine reine, wenn x^m allein, und außerdem x nicht mehr vorkommt; z. B. $ax^m=b$. Sie heißt eine reducirte, wenn bloß das mit x^{m-1} afficirte Glied nicht vorkommt, wie z. B. in

$$x^m+ax^{m-2}+bx^{m-3}+cx^{m-4}+\ldots+p=0$$

oder in $x^4+px^2+qx+r=0$
oder in $x^5+px^3+qx^2+rx+s=0$
oder in $x^6+px^4+qx^3+rx^2+sx+t=0,$
u. s. w. f.

§. 216. Zusatz.

Die reine höhere Gleichung vom 4ten Grade

$$x^4=a$$

giebt aufgelöst $x=\sqrt[4]{a}$ *).

---

*) Jeder der 4 Werthe 1, −1, $\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ giebt, wenn er mit 4 potenzirt wird, allemal dasselbe Resultat, nehmlich 1. Ist daher α ein Werth so, daß $\alpha^4=a$ wird, so haben die 4 Werthe

$$\alpha,\quad -\alpha,\quad \alpha\sqrt{-1},\quad -\alpha\sqrt{-1}$$

dieselbe Eigenschaft gemein, nehmlich a zu geben, wenn man sie mit 4 potenzirt. Fäßt man daher die $\sqrt[4]{a}$ etwas allgemeiner auf, und versteht

Und die reine höhere Gleichung vom mten Grade

$$x^m = b$$

giebt aufgelöst $$x = \sqrt[m]{b}.$$

Anmerkung. Die Gleichung $x^4 = a$, kann man auch so schreiben $x^4 - a = 0$ oder $(x^2)^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$ oder $(x^2 + \sqrt{a})(x^2 - \sqrt{a}) = 0$ und jeder Werth von x, welcher den einen oder den andern der beiden Faktoren $x^2 + \sqrt{a}$ oder $x^2 - \sqrt{a}$ zu Null macht, macht die Gleichung $x^4 = a$ offenbar zur identischen. Löst man aber die beiden Gleichungen

$$x^2 + \sqrt{a} = 0 \quad \text{und} \quad x^2 - \sqrt{a} = 0$$

nach (§. 207.) auf, so erhält man

aus der ersten $$x = \pm\sqrt{-\sqrt{a}}$$

und aus der andern $$x = \pm\sqrt{\sqrt{a}}$$

und dies sind die 4 Werthe, welche der Gleichung

$$x^4 = a$$

genügen, und welche daher auch alle durch $\sqrt[4]{a}$ ausgedrückt werden können.

§. 217. Aufgabe.

Die reducirte Gleichung vom 4ten Grade

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

aufzulösen.

Auflösung. Man suche $x^4 + px^2 + qx + r$ in zwei Faktoren von der Form $(x^2 + \alpha x + \beta)(x^2 + \gamma x + \delta)$ zu zerlegen. Es wird aber nach verrichteter Multiplikation

$$(x^2 + \alpha x + \beta)(x^2 + \gamma x + \delta) = x^4 + (\alpha + \gamma)x^3 + (\beta + \delta + \alpha\gamma)x^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)x + \beta\delta.$$

Damit nun dieses Resultat mit $x^4 + px^2 + qx + r$ zusammenfalle, muß man die Unbekannten α, β, γ, δ so nehmen, daß

---

darunter jeden Werth, der mit 4 potenzirt a giebt, so werden sich immer 4 Werthe angeben lassen, von einander verschieden, aber mit dieser gemeinschaftlichen Eigenschaft begabt. Die Wurzel $\sqrt[4]{a}$ wird also dann jeden ihrer 4 Werthe vorstellen können, und in jedem besondern Falle wird man besonders untersuchen müssen, welcher derselben gerade gemeint sey.

1) $\alpha+\gamma=0$, 2) $\beta+\delta+\alpha\gamma=P$,
3) $\alpha\delta+\beta\gamma=q$ und 4) $\beta\delta=r$

werde; so daß die Auflösung dieser Gleichungen (1—4.) diese Werthe von α, β, γ, δ liefern wird. — Eliminirt man aber dieser Auflösung wegen α, so bleiben die 3 Gleichungen

5) $\beta+\delta-\gamma^2=P$
6) $(\beta-\delta)\gamma=q$ und 4) $\beta\delta=r$.

Eliminirt man aus diesen 3 Gleichungen (4 — 6.) β und δ zugleich, dadurch daß man aus (5. und 6.) die Werthe für β und δ findet, nehmlich:

7) $\beta=\frac{1}{2}\left(P+\gamma^2+\frac{q}{\gamma}\right)$ und 8) $\delta=\frac{1}{2}\left(P+\gamma^2-\frac{q}{\gamma}\right)$

und diese Werthe in (4.) substituirt, wodurch man

$$\left(\gamma^2+P+\frac{q}{\gamma}\right)\left(\gamma^2+P-\frac{q}{\gamma}\right)=4r$$

oder $$\gamma^4+2P\gamma^2+P^2-\frac{q^2}{\gamma^2}=4r$$

oder 9) $\gamma^6+2P\gamma^4+(P^2-4r)\gamma^2-q^2=0$ erhält, oder so geschrieben:

10) $(\gamma^2)^3+2P(\gamma^2)^2+(P^2-4r)(\gamma^2)-q^2=0$.

Diese Gleichung (10.) ist nach dem Unbekannten γ^2 eine kubische, kann nach (§. 214.) aufgelöst werden, und liefert, wenn man aus dem gefundenen Werth von γ^2 die Quadrat-Wurzel noch nimmt, γ selbst. Hat man γ, so hat man auch aus (7. 8. und 1.) β, δ und α gefunden, alles in den gegebenen Coefficienten P, q und r ausgedrückt. — Sind endlich α, β, γ, δ so gefunden, daß

$$(x^2+\alpha x+\beta)(x^2+\gamma x+\delta)=x^4+Px^2+qx+r$$

ist, so kann die gegebene biquadratische Gleichung

$x^4+Px^2+qx+r=0$ auch so geschrieben werden:

$$(x^2+\alpha x+\beta)(x^2+\gamma x+\delta)=0,$$

und jeder Werth von x, welcher einen dieser Faktoren zu

Null macht, macht offenbar die Gleichung identisch. Man suche also nun die Werthe von x, welche

$$x^2+\alpha x+\beta=0 \qquad \text{oder} \qquad x^2+\gamma x+\delta=0$$

machen, so wird man nach (§. 208.) erhalten

$$x=-\tfrac{1}{2}\alpha\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}\alpha^2-\beta} \qquad \text{und} \qquad x=-\tfrac{1}{2}\gamma\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}\gamma^2-\delta},$$

und dies sind die 4 Werthe von x, welche aus der Gleichung

$$x^4+px^2+qx+r=0$$

hervorgehen.

Anmerkung. Diese Auflösung der biquadratischen Gleichungen fällt mit der sogenannten Regel des Pombelli zusammen. Für die Praxis ist sie nur in höchst seltenen Fällen brauchbar, und die allgemeine Formel für x wohl nie, weil der Ausdruck, bis er wirklich hergestellt ist, eine ungemein verwickelte Form annimmt.

§. 218. Zusatz.

Jede vollständige höhere Gleichung vom 4ten Grade,

z. B. $$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

wenn sie aufgelöst werden sollte, würde man, wie schon im (§. 214.) geschehen, zunächst in eine reducirte verwandeln, dadurch daß man $x=z-\frac{1}{4}a$ setzt. Diese reducirte Gleichung würde man nach z auflösen, nach (§. 217.), und aus z nachgehends $x=z-\frac{1}{4}a$ ableiten.

Anmerkung 1. Bisher haben wir sowohl für die quadratischen als auch für die kubischen und biquadratischen Gleichungen allgemeine Ausdrücke zu finden gelehrt, welche die Buchstaben-Coefficienten der gegebenen höhern Gleichung enthielten, so daß sie zugleich die Auflösung jeder besondern numerischen höhern Gleichung desselben Grades in sich schließen und sie liefern, wenn man statt der Buchstaben-Coefficienten die numerischen Coefficienten der gegebenen höhern Gleichung setzt. — Eine solche allgemeine Auflösung der Gleichungen vom 5ten und noch höhern Grade, in denen die Coefficienten alle ganz beliebig und durch Buchstaben ausgedrückt sind, hat man aber bis jetzt vergebens versucht, wenn wir auch numerische höhere Gleichungen (deren Coefficienten alle völlig bestimmt und entweder Null oder in Ziffern gegeben sind) von jedem Grade, wenigstens näherungsweise, zu lösen in den Stand uns gesetzt sehen.

Anmerkung 2. Man kann jedoch Gleichungen von der Form

$$ax^{2m}+bx^m+c=0$$

vom $2m^{ten}$ Grade allemal auflösen, weil sie, sobald man nicht mehr x sondern x^m als den Unbekannten ansieht (welche Potenz man auch durch einen einzigen Buchstaben z bezeichnen kann), sogleich die Form

$$a(x^m)^2+b.(x^m)+c=0$$

oder

$$az^2+bz+c=0$$

einer quadratischen Gleichung annimmt, aufgelöst

$$x^m=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

liefert, und nun in Bezug auf den Unbekannten x eine reine höhere Gleichung vom m^{ten} Grade ist, aus welcher

$$x=\sqrt[m]{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

hervorgeht.

Man berücksichtige hierüber noch folgende Beispiele zur Uebung:

1) Aus $x^4-5\frac{3}{4}x^2=18$ folgt $x^2=8$ und $x^2=-2\frac{1}{4}$;
also $x=\pm\sqrt{8}$ und $x=\pm\frac{3}{2}\sqrt{-1}$.

2) Aus $3x^6-2x^3=65$ folgt $x^3=5$ und $x^3=-4\frac{1}{3}$;
also $x=\sqrt[3]{5}$ und $x=-\sqrt[3]{\frac{13}{3}}$.

3) Aus $11\frac{3}{4}x^2-3\frac{1}{2}x^4=-41\frac{1}{4}$ folgt $x^2=-2\frac{1}{7}$ und $x^2=5\frac{1}{2}$;
also $x=\pm\sqrt{-\frac{15}{7}}$ und $x=\pm\sqrt{\frac{11}{2}}$.

4) Aus $3x^6+42x^3=3321$ folgt $x^3=27$ und $x^3=-41$;
also $x=3$, $x=3(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3})$, $x=3(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3})$
$x=-\sqrt[3]{41}$, $x=-\sqrt[3]{41}.(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3})$, $x=-\sqrt[3]{41}.(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3})$;
wenn durchgehends $\sqrt[3]{41}$ ihren absoluten Werth bedeutet.

5) Aus $x^4-74x^2=-1225$ folgt $x^2=25$ und $x^2=49$;
also $x=\pm5$ und $x=\pm7$.

6) Aus $ab^3x^4+(1+c)bd\sqrt{c}+b^2cx^4=[b^3d\sqrt{c}+(ab+c)(1+c)]x$
folgt $x=\pm\sqrt{\frac{bd\sqrt{c}}{ab+c}}$ und $x=\pm\frac{\sqrt{1+c}}{b}$.

7) Aus $(4a^2-9cd^2)x^8+(4a^2c^2+4abd^2)x^4+(ac^2+bd^2)^2=0$
folgt $x=\sqrt[4]{-\frac{ac^2+bd^2}{2a+3d\sqrt{c}}}$ und $x=\sqrt[4]{-\frac{ac^2+bd^2}{2a-3d\sqrt{c}}}$.

Anmerkung 3. Auch andere allgemeine Gleichungen von einer bestimmten besondern Form lassen sich angeben, welche zur Zeit eine allge-

meine Auflösung zulassen. Solches hier näher zu beleuchten, ist jedoch hier nicht der Ort, und wir verweisen denjenigen noch auf das „Lehrbuch der Arithm. Algebr. u. Analysis." II. Theil. Kap. XXI., welcher die höhern Gleichungen gründlicher behandelt zu sehen wünscht.

§. 219. Lehrsatz.

Jede höhere Gleichung vom mten Grade,

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Tx + U = 0,$$

giebt für den Unbekannten x allemal m Werthe, und zwar ist der Coefficient A von x^{m-1} allemal die Summe aller dieser m Werthe mit entgegengesetzten (+ oder —) Zeichen versehen; und das letzte Glied U ohne x, allemal das Produkt aller m Wurzel-Werthe, mit eigenem oder mit entgegengesetztem (+ oder —) Zeichen, je nachdem m eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Beweis I. Die quadratische Gleichung

1) $x^2 + px + q = 0$

läßt sich so 2) $(x-a)(x-b) = 0$ schreiben, so bald man $(x-a)(x-b)$ wirklich multiplicirt,

$x^2 - (a+b)x + ab$ erhält, und, damit dieses mit $x^2 + px + q = 0$ zusammenfalle, $p = -(a+b)$ und $q = ab$ setzt. Dabei sind $x = a$ und $x = b$ offenbar die Werthe von x, welche $(x-a)(x-b) = 0$, d. h. $x^2 + px + q = 0$ identisch machen, also die Wurzel-Werthe der gegebenen quadratischen Gleichung.

II. Die kubische Gleichung

1) $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ läßt sich auch so

2) $(x-a)(x-b)(x-c) = 0$ schreiben,

wenn man nur die Multiplikation links wirklich verrichtet,

$$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc$$

erhält, und dieses dadurch mit $x^3 + px^2 + qx + r$ zusammenfallen läßt, daß man a, b, c, so genommen denkt, daß $p = -(a+b+c)$, $q = ab+ac+bc$ und $r = -abc$ wird. Dann sind aber auch $x = a$, $x = b$, $x = c$ die drei

Wurzel-Werthe *) der kubischen Gleichung, weil jeder für sich einen der Faktoren also auch das ganze Produkt identisch zu Null macht.

III. Die biquadratische Gleichung

1) $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$

läßt sich auch so schreiben

2) $(x-a)(x-b(x-c)(x-d)=0$,

weil, wenn man die Multiplikation links verrichtet, dann

$x^4-(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2$
$-(abc+abd+acd+bcd)x+abcd$,

sich ergiebt, welches mit $x^4+px^3+qx^2+rx+s$ zusammenfallen wird, wenn man a, b, c, d so genommen sich denkt, daß beziehlich die Coefficienten dieselben werden, also namentlich, daß

$-(a+b+c+d)=p$ und $abcd=s$ wird.

Und dabei sind a, b, c, d nothwendig die 4 Wurzel-Werthe der Gleichung vom 4ten Grade, weil jeder für sich einen der Faktoren, und daher auch den ganzen Ausdruck links in (2.) zu Null macht.

IV. Auch die Gleichung vom 5ten Grade

1) $x^5+px^4+qx^3+rx^2+sx+u=0$

muß sich so schreiben lassen

2) $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)=0$

weil, wenn man diese 5 Faktoren mit einander multiplicirt

$x^5-(a+b+c+d+e)x^4+(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be$
$+cd+ce+de)x^3$
$-(abc+abd+abe+acd+ace+ade+bcd+bce+bde+cde)x^2$
$+(abcd+abce+abde+acde+bcde)x-abcde$

erhalten wird, welcher Ausdruck mit

$x^5+px^4+qx^3+rx^2+sx+u$

---

*) Wurzel-Werthe oder auch wohl bloß Wurzeln nennt man diejenigen Werthe des Unbekannten x einer höhern Gleichung, welche die Gleichung identisch machen.

verglichen, 5 Gleichungen zwischen den Coefficienten liefern, welche zur Bestimmung der 5 unbekannten Wurzel-Werthe a, b, c, d, e, dienen werden.

V. Endlich sieht man, wie dieselbe Schlußweise auf jede Gleichung von jedem Grade kann ausgedehnt werden, wie es demnach mit unserem Lehrsatze seine Richtigkeit hat.

§. 220. Zusatz.

1) Die höhere Gleichung vom mten Grade

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + U = 0$$

wird in eine reducirte verwandelt, wenn man $x = z - \frac{1}{m}A$ nimmt. (Vergl. §. §. 214. 218.).

2) In einer reducirten höhern Gleichung ist die Summe aller Wurzel-Werthe $= 0$.

3) Ist a ein Wurzel-Werth der höhern Gleichung, so ist $x - a$ einer der Faktoren, in welche

$$x^m + Ax^{m-1} + \ldots + U$$ zerlegt werden kann.

4) Hat eine höhere Gleichung reelle ganze Wurzeln, so darf man nur von dem letzten Glied U alle Faktoren aufsuchen, und diejenigen herausnehmen, welche der Gleichung in der That genügen, um die Wurzel-Werthe selbst zu haben.

Beispiel. Man hat gegeben die Gleichung

$$x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 = 0.$$

Die Faktoren von 12, sind 1, 2, 3, 4, 6; man versuche nun und setze sowohl $+1$ als auch -1, $+2$ und -2, $+3$ und -3, $+4$ und -4, $+6$ und -6, $+12$ und -12 statt x, und sehe zu, welcher der Werthe die Gleichung selbst identisch macht, und man wird finden, daß dieses mit 1, -1, 2, -2 und 3 der Fall ist, und so hat man die 5 Wurzel-Werthe der gegebenen Gleichung gefunden.

Anmerkung 1. Um die letztere Methode öfter anwenden zu können, pflegt man auch die Gleichung, welche gebrochene Coefficienten enthält, in eine andere zu verwandeln mit ganzen Coefficienten. — Hat man nehmlich die Gleichung

1) $x^6 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$

und setzt man $x=\frac{z}{p}$ so erhält man die neue Gleichung in z, nehmlich:

$$2)\ z^4+pAz^3+p^2Bz^2+p^3Cz+p^4D=0,$$

wo sich denn p allemal so nehmen läßt, daß pA, p^2B, p^3C und p^4D ganze Zahlen werden, wenn auch A, B, C, D selbst, zum Theil oder alle, gebrochene Zahlen seyn sollten. —

Hat man aber den Werth von z aus der Gleichung (2.) entwickelt, so findet sich der Werth von x, $=\frac{z}{p}$, welcher der Gleichung (1.) genügt, unmittelbar.

Beispiel 1. Ist z. B. gegeben die Gleichung

$$x^3+\tfrac{82}{15}x^2-\frac{173}{5}x-\frac{126}{5}=0,$$

so nehme man $p=15$ und erhält $x=\frac{z}{15}$ setzend:

$$z^3+82z^2-7785z-85050=0$$

und dazu finden sich für z die Werthe, -10, 63 und -135; folglich für x die Werthe $-\frac{2}{3}$, $\frac{21}{5}$ und -9.

Beispiel 2. Wäre aufzulösen die numerische Gleichung

$$x^3+\tfrac{8}{5}x^2-\tfrac{9}{100}x-\tfrac{9}{100}=0,$$

so setzte man $x=\frac{z}{10}$, und erhielte

$$z^3+16z^2-9z-90=0$$

und daraus $z=2$, $z=-3$ und $z=-15$

also $x=\frac{1}{5}$, $x=-\frac{3}{10}$ und $x=-\frac{3}{2}$.

Anmerkung 2. In den meisten Fällen ist es rathsam, wenn ein Wurzel-Werth z. B. a gefunden ist, die gegebene Gleichung augenblicklich durch $x-a$ zu dividiren, weil der Quotient $=0$ gesetzt, um einen Grad niedriger ist, und die übrigen Wurzel-Werthe enthält.

Hätte man z. B. die Gleichung

$$1)\ x^5+5x^4-6x^3-23x^2+29x-30=0,$$

so würde man aus den Faktoren des letzten Gliedes 30, bald 2 finden, als der Gleichung genügend. Dividirt man nun durch $x-2$ die erste Seite der gegebenen Gleichung, so erhält man:

$$2)\ x^4+7x^3+8x^2-7x+15=0,$$

welche Gleichung die 4 übrigen Wurzel-Werthe der gegebenen Gleichung (1.) liefern muß. — Aus den Faktoren des hiesigen letzten Gliedes 15 ergiebt sich bald $x=-3$, als der Gleichung genügend; und wenn man die

eine Seite der Gleichung (2.) abermals durch $x-(-3)$ d. h. $x+3$ dividirt, so erhält man:

$$3)\ x^3+4x^2-4x+5=0,$$

worin die noch übrigen Wurzel-Werthe stecken müssen. Das letzte Glied 5 führt bald zu $x=-5$ als der Gleichung genügend, und durch $x+5$ dividirend, erhält man:

$$4)\ x^2-x+1=0,$$

welche Gleichung nach (§. 208.) aufgelöst, zuletzt noch

$$x=-\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}$$ giebt, so daß

$$2,\ -3,\ -5,\ -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3} \quad \text{und} \quad -\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}$$

die 5 Wurzel-Werthe sind der gegebenen Gleichung (1.).

Solche Versuche gelingen jedoch nur selten, und nur dann allemal sicher, wenn die Wurzel-Werthe in der That ganze Zahlen sind.

§. 221. Aufgabe.

Eine gegebene numerische Gleichung z. B.

$$x^4+2x^3-3x^2-x-5=0$$

näherungsweise aufzulösen.

Auflösung. 1) Man setze statt x nach und nach

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\ \text{u. s. w. f.}$$

und $$-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5,\ \text{u. s. w. f.,}$$

bis man zwei Werthe für x z. B. 1 und 2 gefunden hat, von denen der eine den Ausdruck $x^4+2x^3-3x^2-x-5$ in eine positive Zahl verwandelt, der andere in eine negative. Zwischen diesen beiden Werthen 1 und 2, liegt dann nothwendig ein Werth von x, welcher den Ausdruck gerade zu Null macht, d. h. welcher der gegebenen Gleichung genügt.

2) Hat man auf diese Weise zwei zunächst auf einander folgende ganze Zahlen gefunden (hier 1 und 2), als Grenzen zwischen denen ein Wurzel-Werth liegen muß; so kann man diese Grenzen noch näher ziehen, indem man statt x, nach und nach 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9 setzt, bis man zwei auf einander folgende Werthe, (hier 1,5 und 1,6) gefunden hat, von denen der eine den Ausdruck $x^4+2x^3-3x^2-x-5$ positiv, der andere ihn aber negativ

macht; weil dann zwischen diesen Werthen 1,5 und 1,6 ein Wurzel-Werth liegen muß.

3) Man setze nun nach und nach

1,51; 1,52; 1,53; 1,54; 1,55; 1,56; 1,57; 1,58; 1,59

statt x, so lange bis man abermal zwei zunächst auf einander folgende Werthe gefunden hat, welche jetzt nur um $\frac{1}{100}$ von einander abweichen und von denen der eine den Ausdruck $x^4+2x^3-3x^2-x-5$ positiv, der andere ihn negativ macht; weil dann zwischen diesen Grenzen ein Werth von x liegen muß, der denselben Ausdruck zu Null macht, d. h. welcher ein Wurzel-Werth der gegebenen Gleichung ist.

4) Man sieht leicht ein, wie man auf demselben Wege fortfahren kann, sich immer nähere und nähere Grenzen zu bilden, zwischen denen der Wurzel-Werth liegen muß, so daß eine dieser Grenzen jedesmal als Näherungs-Werth des gesuchten Wurzel-Werthes zu betrachten ist.

5) Weil aber die Rechnungen, je weiter fortgesetzt, desto verwickelter werden, so kann man, wenn einmal etwas nahe Grenzen z. B. 1,5 und 1,6 gefunden sind, das fehlende näherungsweise noch leichter so finden: Sey nehmlich 1,5 oder allgemein w zu klein und z das fehlende, also $x=w+z$ genau, so ist $z<\frac{1}{10}$, $z^2<\frac{1}{100}$, $z^3<\frac{1}{1000}$ u. s. w. f. Setzt man nun $w+z$ d. h. $1,5+z$ statt x in

$$x^4+2x^3-3x^2-x-5=0,$$

und läßt dabei die höhern Potenzen von z weg, weil sie so klein werden, so erhält man näherungsweise:

$$w^4+4w^3.z+2.w^3+6w^2z-3w^2-6w.z-w-z-5=0$$

und daraus näherungsweise

$$z=-\frac{w^4+2w^3-3w^2-w-5}{4w^3+6w^2-6w-1}=\frac{1,4375}{17}=0,0845,$$

also näherungsweise:

$$x=w+z=1,5845.$$

Anmerkung. Versucht man es nun, so findet man, daß 1,584 statt x in $x^4+2x^3-3x^2-x-5$ gesetzt, schon etwas positives giebt, daß

sich also der Werth 1,584 dem Werthe 2 schon zu sehr nähert. Ja $x=1{,}58$ gesetzt, giebt schon etwas positives, nähert sich also dem 2 auch schon zu sehr, und erst $x=1{,}57$ giebt etwas negatives und nähert sich daher dem 1 zu sehr (in so ferne $x=1$ gesetzt, auch etwas negatives giebt). Der wahre Wurzel-Werth x liegt also zwischen 1,57 und 1,58, und man sieht demnach mit welcher großen Vorsicht man diesen letzteren Weg betreten muß um nur eine einzige folgende Decimalstelle noch richtig zu haben.

Je genauer aber die Wurzel schon gefunden ist, desto mehr kann man sich auch auf den Werth von z verlassen, so daß wenn man in den obigen Ausdruck

$$z=-\frac{w^4+2w^3-3w^2-w-5}{4w^3+6w^2-6w-1}$$

$w=1{,}57$ setzen wollte, z jetzt schon ziemlich genau sich ergiebt, wenn man nur 2 folgende Decimalstellen der Wurzel beibehalten will. Man findet nehmlich $z=0{,}0075$, also $x=w+z=1{,}57+0{,}0075=1{,}5775$. Aber es ergiebt sich nach der Substitution, daß dieser Wurzel-Werth 1,5775 schon zu groß ist, daß aber 1,5774 zu klein seyn würde. — Wollte man nun diesen Werth 1,5775 wieder statt w setzen und z dazu suchen, so würde man z negativ haben, und man könnte noch 3 neue Decimalstellen ziemlich genau erhalten. *)

§. 222. Aufgabe.

Es sind gegeben mehre höhere oder einfache oder auch transcendente Gleichungen zwischen eben so viel Unbekannten; man soll die Werthe der Unbekannten finden.

Auflösung. Man eliminire einen Unbekannten nach dem andern, (meist auf dem Wege der Substitution, dadurch nehmlich daß man einen der Unbekannten, aus einer der Gleichungen entwickelt und seinen Werth in die übrigen Gleichungen substituirt, wie solches (§. 199.) für einfache Gleichungen gezeigt wurde), bis man zuletzt zu einer einzigen Gleichung mit einem einzigen Unbekannten gelangt, welche, sie mag eine einfache seyn oder eine höhere, aufgelöst werden muß und dann den Werth dieses Unbekannten giebt. — Die

---

*) Das „Lehrbuch der Arithmetik, Algebra und Analysis" behandelt diese Materien alle gründlicher und vollständiger.

Werthe der übrigen Unbekannten findet man dann durch daſſelbe Verfahren, wie ſolches bei der Auflöſung der einfachen Gleichungen angewandt wurde.

Beiſpiel 1. Die Gleichungen ſeyen

1) $x^2 - y + z = a$

2) $x^2 + 2y + 5x = 2z$

3) $x^2 - 3x + y = 4z$

und die Werthe der Unbekannten x, y, z zu finden.

Aus (2. und 3.) wenn man ſie nach y und z auflöſt, erhält man

4) $y = \frac{-x^2 - 13x}{3}$ und 5) $z = \frac{x^2 - 11x}{6}$

und dieſe Werthe in (1.) ſubſtituirt geben

6) $x^2 + \frac{x^2 + 13x}{3} + \frac{x^2 - 11x}{6} = a$

oder 7) $9x^2 + 15x = 6a$ oder $x^2 + \frac{5}{3}x = \frac{2}{3}a$

woraus $x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24a}}{6}$;

während dann aus (4. und 5.) auch die Werthe von y und z ſich ergeben, wenn man ſtatt x die ſo eben gefundenen Werthe ſetzt.

Beiſpiel 2. 1) $3x^2 + 2y^2 - a = 0$

2) $2x^2 - 5xy + 2y^2 + b = 0$

nach x und y aufzulöſen.

Weil jede dieſer Gleichungen nach jedem der Unbekannten vom höhern Grade iſt, ſo eliminire man zuerſt x^2 allein, indem man die Gleichung (1.) mit 2, die (2.) dagegen mit 3 multiplicirt und ſubtrahirt und erhält

3) $-2y^2 + 15xy - 2a - 3b = 0.$

Aus dieſer Gleichung kann man nun x bequemer finden, nehmlich:

4) $x = \frac{2a + 3b + 2y^2}{15y}$

und dieſer Werth von x in (1.) ſubſtituirt, giebt

$$3 \cdot \left(\frac{2a + 3b + 2y^2}{15y}\right)^2 + 2y^2 - a = 0$$

oder $(2a + 3b)^2 + 4(2a + 3b)y^2 + 4y^4 + 150y^4 - 75ay^2 = 0$

oder 5) $154y^4 + (-67a + 12b)y^2 + (2a + 3b)^2 = 0,$

welches die Eliminations-Gleichung und vom 4ten Grade iſt, welche aber ſo geſchrieben

$$154(y^2)^2 + (-67a + 12b)(y^2) + (2a + 3b)^2 = 0$$

nur vom 2ten Grade wird, wenn man nicht mehr y ſondern y^2 als den zu

findenden Unbekannten betrachtet. Löst man diese quadratische Gleichung auf, so erhält man

$$y^2 = \frac{67a-12b \pm \sqrt{(67a-12b)^2-616(2a+3b)^2}}{308}.$$

Nimmt man davon noch die Quadrat-Wurzel, so hat man y selbst, und diese Werthe für y in (4.) substituirt, geben dann auch die zugehörigen Werthe von x.

§. 223. Zusatz.

Manche dieser Aufgaben, vorzüglich mit 2 Unbekannten, werden dadurch bedeutend leichter gelöst, daß man nicht die Unbekannten selbst, sondern ihre Summen und Differenzen sucht (überhaupt andere, aus den Unbekannten zusammengesetzte Ausdrücke sucht.). *)

Beispiel 1. Man soll die Gleichungen

1) $x^2+y^2=a$ 2) $xy=b$

nach x und y auflösen.

Multiplicirt man die 2te Gleichung mit 2, und addirt und subtrahirt sie von (1.) so erhält man:

3) $x^2+2xy+y^2=a+2b$ oder $(x+y)^2=a+2b$

4) $x^2-2xy+y^2=a-2b$ oder $(x-y)^2=a-2b$;

dahero 5) $x+y=\sqrt{a+2b}$ und 6) $x-y=\sqrt{a-2b}$.

Und aus (5. und 6.) folgt dann

7) $x=\frac{1}{2}\sqrt{a+2b}+\frac{1}{2}\sqrt{a-2b}$ und 8) $y=\frac{1}{2}\sqrt{a+2b}-\frac{1}{2}\sqrt{a-2b}$.

Auf dem direkten Wege hätte man aus (2.) erhalten

9) $y=\frac{b}{x}$ und dieser Werth in (1.) substituirt, giebt

$$x^2+\frac{b^2}{x^2}=a \quad \text{oder} \quad x^4-ax^2+b^2=0$$

oder 10) $(x^2)^2-a(x^2)+b^2=0$.

Diese Gleichung nach (§. 208.) aufgelöst, giebt

---

*) So haben wir z. B. schon mehremal nicht y sondern y^2 oder y^3 als den zu suchenden Unbekannten genommen, um einfachere und auflösbarere Gleichungen zu erhalten. So haben wir (§. 205.) statt x, y zu suchen, lieber $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ als die Unbekannten angesehen.

$x^2=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b^2}$ und $x=\sqrt{\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b^2}}$

und dann aus (9.) $y=\sqrt{\frac{1}{2}a\mp\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b^2}}$

und diese letztern Werthe von x und y stimmen mit den erstern überein, wie man finden wird, wenn man die Werthe in (7. und 8.) quadrirt und nachher wieder die Quadrat-Wurzel nimmt.

Beispiel 2. Sind gegeben und nach x und y aufzulösen

1) $x+y-xy=a$

2) $x^2+y^2-x-y=b$,

so setze man $x+y=s$ und $x-y=d$ und suche nun s und d. Aus $x+y=s$ und $x-y=d$, folgt aber $x=\frac{s+d}{2}$ und $y=\frac{s-d}{2}$, also $xy=\frac{s^2-d^2}{4}$ und $x^2+y^2=\frac{s^2+d^2}{2}$ und die Gleichungen (1.) und (2.) werden nun:

3) $s-\frac{s^2-d^2}{4}=a$ oder $d^2+4s-s^2=4a$

4) $\frac{s^2+d^2}{2}-s=b$ $d^2-2s+s^2=2b$.

Subtrahirt man nun (3.) von (4.), so erhält man:

5) $2s^2-6s=2b-4a$ oder $s^2-3s=b-2a$

und daraus, nach (§. 208.):

6) $s=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+b-2a}$

und aus (4.)

$d^2=2b-(s^2-2s)=b+2a-\frac{3}{2}\mp\sqrt{\frac{9}{4}+b-2a}$

und 7) $d=\sqrt{b+2a-\frac{3}{2}\mp\sqrt{\frac{9}{4}+b-2a}}$.

Und dann ist auch $x=\frac{s+d}{2}$ und $y=\frac{s-d}{2}$ bekannt.

Hätte man dagegen lieber die Summe und das Produkt ($x+y$ und xy) als die Unbekannten gesucht

also 8) $x+y=s$ und 9) $xy=p$ gesetzt, so würde man aus (8. und 9.) erst x und y in s und p auszudrücken gehabt haben, nehmlich

10) $(x+y)^2=s^2$

11) $4xy=4p$

subtr. 12) $(x-y)^2=s^2-4p$

13) $x-y=\sqrt{s^2-4p}$;

also, weil $x+y=s$

auch 14) $x=\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}\sqrt{s^2-4p}$

und 15) $y = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}\sqrt{s^2-4p}$;
und es wären die Gleichungen (1.) und (2.) nun folgende geworden:

16) $s-p=a$

17) $s^2-2p-s=b$.

Und hieraus p eliminirt $(=s-a)$, giebt

18) $s^2-3s+2a=b$,

dieselbe Gleichung für die Summe s, wie (n. 5.).

Hat man aber s hier gerade so gefunden, wie in (n. 6.), so findet sich aus (8.)

19) $p=s-a=-a+\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+b-2a}$.

Endlich geben die Gleichungen (14. und 15.) auch x und y, sobald s und p bekannt sind.

Uebungs-Beispiele.

1) Aus $x^2+y^2=2a$ und $x^2-y^2=2b$

folgt $x=\pm\sqrt{a+b}$ und $y=\pm\sqrt{a-b}$,

indem man nicht x und y sondern x^2 und y^2 als die zu entwickelnden Unbekannten ansieht.

2) Aus $x-y=a$ und $xy=b$

folgt $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b}$ und $y=-\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b}$.

3) Aus $x-y=a$ und $x^2+y^2=b$

folgt $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{2}b-\frac{1}{4}a^2}$ und $y=-\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{2}b-\frac{1}{4}a^2}$.

4) Aus $x+y=a$ und $x^3+y^3=b$

folgt $x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{4b-a^3}{12a}}$ und $y=\frac{a}{2}\mp\sqrt{\frac{4b-a^3}{12a}}$.

5) Aus $3x+2y=22$ und $7x^2-4y^2=12$ folgt $x=4$ und $y=5$; oder $x=62$ und $y=-82$.

6) Aus $x^2-y^2=b$ und $(x+y+a)^2+(x-y+a)^2=c$

folgt $x=-\frac{1}{2}a\pm\frac{1}{2}\sqrt{2b+c-a^2}$

und $y=\pm\sqrt{\frac{1}{4}c-\frac{1}{2}b\mp\frac{1}{2}a\sqrt{2b+c-a^2}}$.

7) Aus $\frac{27x}{y}=\frac{12y}{x}$ und $2xy+3x+\frac{1}{3}y=19$

folgt $x=2$, $y=3$, oder $x=-\frac{19}{6}$ und $y=-\frac{19}{4}$

oder $x=\frac{5\pm\sqrt{-887}}{12}$, $y=\frac{-5\mp\sqrt{-887}}{8}$.

8) Aus $ax^2-by^2=0$ und $cxy+dx+fy=g$

folgt $x=\frac{-(f\sqrt{a}+d\sqrt{b})\pm\sqrt{(f\sqrt{a}+d\sqrt{b})^2+4cg\sqrt{ab}}}{2c\sqrt{a}}$,

$$y=\frac{-(f\sqrt{a}+d\sqrt{b})\pm\sqrt{(f\sqrt{a}+d\sqrt{b})^2+4cg\sqrt{ab}}}{2c\sqrt{b}}$$

$$\text{oder}\quad x=\frac{-(f\sqrt{a}-d\sqrt{b})\pm\sqrt{(f\sqrt{a}-d\sqrt{b})^2+4cg\sqrt{ab}}}{2c\sqrt{a}}$$

$$y=\frac{+(f\sqrt{a}-d\sqrt{b})\mp\sqrt{(f\sqrt{a}+d\sqrt{b})^2+4cg\sqrt{ab}}}{2c\sqrt{b}}.$$

9) Aus $ax+by=p$ und $cx^2+dy^2=q$

$$\text{folgt}\quad x=\frac{adp\pm b\sqrt{a^2dq-cdp^2+b^2cq}}{a^2d+b^2c}$$

$$\text{und}\quad y=\frac{bcp\pm a\sqrt{a^2dq-cdp^2+b^2cq}}{a^2d+b^2c}.$$

10) Aus $ax-by=p$ und $a^3x^3-b^3y^3=qxy$

$$\text{folgt}\quad x=\frac{p}{2a}\left(1\pm\sqrt{\frac{q+abp}{q-3abp}}\right),\quad y=\frac{p}{2b}\left(-1\pm\sqrt{\frac{q+abp}{q-3abp}}\right).$$

11) Aus $x+y+x^2+y^2=a$ und $1+x+y=\frac{b}{x-y}$

$$\text{folgt}\quad x=-\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2a+2b+1},\quad y=-\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2a-2b+1}.$$

12) Aus $x^3-x^2y-xy^2+y^3=a$ und $x^3+x^2y+xy^2+y^3=b$

$$\text{folgt}\quad x=\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2b-a}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[6]{2b-a}}=\frac{\sqrt{2b-a}\pm\sqrt{a}}{2\sqrt[6]{2b-a}}$$

$$y=\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2b-a}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[6]{2b-a}}=\frac{\sqrt{2b-a}\mp\sqrt{a}}{2\sqrt[6]{2b-a}}.$$

13) Aus $x^2+y^2+z^2=a$, $y^2=2xz+b$, $cx-dz=0$

$$\text{folgt}\quad x=\frac{d\sqrt{a-b}}{c+d},\quad y=\frac{\sqrt{2acd+b(c^2+d^2)}}{c+d},\quad z=\frac{c\sqrt{a-b}}{c+d}.$$

14) Aus $xy=p$, $xz=q$ und $yz=r$

$$\text{folgt}\quad x=\pm\sqrt{\frac{pq}{r}},\quad y=\pm\sqrt{\frac{pr}{q}}\quad\text{und}\quad z=\pm\sqrt{\frac{qr}{p}}.$$

15) Aus $x=\frac{a}{y+z}$, $y=\frac{b}{x+z}$, $z=\frac{c}{x+y}$

$$\text{folgt}\quad x=\pm\sqrt{\frac{(a-c+b)(a-b+c)}{2(b+c-a)}},\quad y=\pm\sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)}{2(a+c-b)}}$$

$$z=\pm\sqrt{\frac{(b+c-a)(a+c-b)}{2(a+b-c)}}.$$

16) Aus $xyz-ax-ay=0$, $xyz-by-bz=0$ und $xyz-cx-cz=0$

folgt $x=\pm\sqrt{\frac{2abc(ab+bc-ac)}{(ab+ac-bc)(bc+ac-ab)}}$,

$y=\pm\sqrt{\frac{2abc(bc+ac-ab)}{(ab+ac-bc)(ab+bc-ac)}}$

und $z=\pm\sqrt{\frac{2abc(ab+ac-bc)}{(ab+bc-ac)(bc+ac-ab)}}$.

Vermischte Uebungs-Beispiele, die Auflösung quadratischer und höherer Gleichungen betreffend.

1) Aus $x^2+7x+3\frac{1}{4}=0$ folgt $x=-6\frac{1}{2}$, $x=-\frac{1}{2}$.

2) Aus $x^2+8x=14$ folgt $x=-9{,}4772\ldots$
$x=1{,}4772\ldots$

3) Aus $xy=p$, $(b-y)z=q$, $(a-x)(c-z)=r$

folgt, wenn $cp-aq-br+abc=A$ und $cp-aq+br-abc=B$ gesetzt wird,

$$x=\frac{-A\pm\sqrt{A^2-4p(q-bc)(r-ac)}}{2(q-bc)}$$

$$y=\frac{-A\mp\sqrt{A^2-4p(q-bc)(r-ac)}}{2(r-ac)}$$

und $$z=\frac{-B\mp\sqrt{B^2-4q\ p-ab)(r-ac)}}{2(p-ab)}.$$

4) Aus $x^2+y^2+z^2=k$, $ax+a_1y+a_2z=0$ und $bx+b_1y+b_2z=0$

folgt, wenn $\pm\sqrt{\frac{k}{(ab_1-a_1b)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_2b-ab_2)^2}}=A$

gesetzt wird,

$x=(a_1b_2-a_2b_1)A$, $y=(a_2b-ab_2)A$, $z=(ab_1-a_1b)A$.

5) Aus $axy+bx+cy+d=0$, $a_1yz+b_1y+c_1z+d_1=0$
und $a_2xz+b_2z+c_2x+d_2=0$, folgt für x die quadratische Gleichung:

$$(a_2bb_1-aa_2d_1+ac_1c_2-a_1bc_2)x^2+(a_2b_1d-a_2cd_1+bb_1b_2-ab_2d_1$$
$$+cc_1c_2-a_1c_2d+ac_1d_2-a_1bd_2)x+b_1b_2d-b_2cd_1+cc_1d_2-a_1dd_2=0.$$

6) Aus $x^3-12x^2+57x-94=0$

folgt $x=4+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}=3{,}36216\ldots$.

7) Aus $x^3-\frac{15}{2}x+290\frac{1}{2}=0$ folgt $x=-7$.

8) Aus $x^3-6x-40=0$ folgt $x=4$.

9) Aus $x^3-12x^2+36x-7=0$ folgt $x=7$.

10) Aus $x^3-18x^2+87x-110=0$ folgt $x=2$, $x=5$, $x=11$.

11) Aus $x^4+2x^3-31x^2-32x+60=0$
folgt $x=1,\ x=-2,\ x=5,\ x=-6.$

12) Aus $x^4+10x^3+35x^2+50x+24=0$
folgt $x=-1,\ x=-2,\ x=-3,\ x=-4.$

13) Aus $x^4-\frac{19}{4}x^3+\frac{49}{8}x^2-\frac{11}{4}x+\frac{3}{8}=0$ folgt $x=\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ 1,\ 3.$

14) Aus $x^3-\frac{2}{3}x^2+3x-2=0$ folgt $x=\frac{2}{3},\ x=\sqrt{3},\ x=-\sqrt{3}.$

15) Aus $x^3+x^2-x+15=0$
folgt $x=-3,\ x=1-2\sqrt{-1},\ x=1+2\sqrt{-1}.$

16) Aus $x^3-12x^2+45x-53=0$ folgt $x=5{,}879385\ldots$

17) Aus $x^3-15x^2+63x-50=0$ folgt $x=1{,}02803\ldots$

18) Aus $x^3-12x-28=0$ folgt $x=4{,}30213\ldots$

19) Aus $x^3-12x^2+57x-94=0$ folgt $x=3{,}36216\ldots$

20) Aus $x^4+8x^2+16x-440=0$ folgt $x=3{,}97\ldots$

Uebungs-Beispiele zum 13ten Kapitel.

21) Welche Zahl ist es, deren dritter Theil und vierter Theil mit einander multiplicirt 108 geben? Antw. 36 und —36.

22) Wenn man die Hälfte und das $\frac{2}{3}$fache einer Zahl mit einander multiplicirt und das Produkt durch $\frac{5}{2}$ dividirt, so kommt $\frac{3}{40}$. Welche Zahl ist es? Antw. $\frac{3}{4}$ und auch $-\frac{3}{4}$.

23) Das Produkt aus der Summe von 103 und einer gesuchten Zahl und der Differenz von 103 und der gesuchten Zahl giebt 1200; welche ist diese Zahl? Antw. 97 auch —97.

24) Das Produkt zweier gesuchten Zahlen ist 192 ihr Quotient $1\frac{1}{3}$. Welche Zahlen sind es? Antw. 16 und 12; auch —16 und —12.

25) Das Produkt zweier Zahlen ist a, ihr Quotient b. Antw. Die Zahlen selbst $\sqrt{ab}$ und $\frac{1}{b}\sqrt{ab}$.

26) Welche Zahlen sind es, deren Summe der Quadrate 450 und Differenz der Quadrate 120 ist? Antw. 17 und 13; auch —17 und —13.

27) Die Summe der Quadrate ist a, die Differenz derselben ist b. Antw. Die Zahlen selbst sind $\sqrt{\frac{a+b}{2}}$ und $\sqrt{\frac{a-b}{2}}$.

28) Es verhalten sich zwei gesuchte Zahlen wie 3:4 und die Summe ihrer Quadrate ist 225? — Antw. 9 und 12; auch —9 und —12.

29) Es verhalten sich die gesuchten Zahlen wie m:n und die Summe ihrer Quadrate ist a? — Antw. $\frac{m\sqrt{a}}{\sqrt{m^2+n^2}}$, $\frac{n\sqrt{a}}{\sqrt{m^2+n^2}}$.

30) Es verhalten sich die gesuchten Zahlen wie m zu n, und die Differenz ihrer Quadrate ist a? — Antw. $\frac{m\sqrt{a}}{\sqrt{m^2-n^2}}$, $\frac{n\sqrt{a}}{\sqrt{m^2-n^2}}$.

31) Welche Zahl ist es, die mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt, und wenn man zu dem Resultat 4 addirt, das was herauskommt mit dem 3fachen der gesuchten Zahl multiplicirt, als dann das Produkt durch 9 dividirt und von diesem Quotienten das 5fache der gesuchten Zahl subtrahirt, gerade 400 übrig läßt? — Antw. 48 und $-33\frac{1}{3}$.

32) Von drei gesuchten Zahlen sind die Produkte je zweier beziehlich a, b, c? — Antw. $\sqrt{\frac{bc}{a}}$, $\sqrt{\frac{ac}{b}}$, $\sqrt{\frac{ab}{c}}$.

33) Es soll eine Zahl so gesucht werden, daß wenn eine gegebene Zahl a sowohl durch die gesuchte, als auch durch die um b verminderte Zahl dividirt wird, der erste Quotient um c kleiner sey, als der zweite? Antw. $\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(4a+bc)b}{c}}$.

34) Von zwei Zahlen ist die Summe 17 und die Summe ihrer Quadrate $\frac{1385}{9}$. Welche Zahlen sind es? — Antw. $10\frac{2}{3}$ und $6\frac{1}{3}$.

35) Welche Zahlen haben zur Differenz 8 und zur Summe der Quadrate $144\frac{1}{2}$? Antw. $11\frac{1}{2}$ und $3\frac{1}{2}$; auch $-3\frac{1}{2}$ und $-11\frac{1}{2}$.

36) Von welchen Zahlen ist das Produkt 119 und die Summe ihrer Quadrate $268\frac{1}{4}$? Antw. $8\frac{1}{2}$ und 14.

37) Wie kann man 21 in 2 Theile zertheilen, so daß die Summe der 3ten Potenzen derselben 2457 ist? Antw. In 12 und 9.

38) Welche Zahl giebt zu ihrer Quadrat-Wurzel addirt 182? Antw. 196, wenn man die Quadrat-Wurzel negativ nimmt, dagegen 169 wenn man die absolute Quadrat-Wurzel nimmt. *)

39) Welche Zahl übertrifft ihre Quadrat-Wurzel um 56? Antw. 64, wenn man die Wurzel absolut nimmt, 49 dagegen, wenn man sich unter der Quadrat-Wurzel deren negativen Werth denkt.

40) Man soll 2 Zahlen finden, deren Differenz und die Differenz ihrer

---

*) Die Gleichung wird $x+\sqrt{x}=182$ also $\sqrt{x}=182-x$ und $x=(182-x)^2$ und letztere giebt dann $x=196$ auch $x=169$. — Daß beide Werthe der letztern Gleichung $x=(182-x)^2$ genügen, macht nicht nothwendig, daß sie auch alle beide der gegebenen $x+\sqrt{x}=182$ genügen müssen, weil auch diese andere $x-\sqrt{x}=182$, wenn man die Quadrat-Wurzel wegschafft, zu derselben quadratischen Gleichung führt.

Quadrate zusammen 42; deren Summe aber mit der Summe ihrer Quadrate zusammen 222 ausmacht? Antw. 11 und 9, oder auch —12 und —10.

41) Man soll a und b dergestalt in 2 Theile theilen, daß der erste Theil von a und der erste Theil von b sich zu einander verhalten, wie m zu n; und die beiden andern Theile sollen das Produkt p geben. Welche Theile sind es? — Antw. Der erste Theil von a ist

$$\frac{na+mb\pm\sqrt{(na-mb)^2+4mnp}}{2n}$$

und der erste Theil von b ist $\frac{n}{m}$ des vorstehenden.

42) Die ersten Theile von a und b sollen sich verhalten wie m zu n. Dagegen soll die Summe der Quadrate der beiden andern Theile $=q$ seyn. Welche Theile sind es? Antw. Der erste Theil von a ist

$$m.\frac{am+bn\pm\sqrt{(m^2+n^2)q-(an-bm)^2}}{m^2+n^2}$$

und der erste Theil von b ist $\frac{n}{m}$ hievon.

43) Es werden zwei Zahlen gesucht, deren Summe, Produkt und Differenz der Quadrate einander gleich sind? Antw. $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

44) Die Summe dreier gesuchten übrigens in stetiger Proportion stehenden Zahlen ist 19, das Produkt derselben 216. Welche Zahlen sind es? — Antw. 4, 6, 9; auch

$$\frac{22\mp3\sqrt{-3}+\sqrt{529\mp60\sqrt{-3}}}{2}$$

$$\frac{22\mp3\sqrt{-3}-\sqrt{529\mp60\sqrt{-3}}}{2}$$

als äußere Glieder und $-3\pm3\sqrt{-3}$ als mittleres Glied.

45) Eine dreiziffrige Zahl wird gesucht, die so beschaffen ist, daß die Summe der Quadrate der einzelnen Ziffern 104, das Quadrat der mittlern Ziffer aber um 4 größer ist, als das doppelte Produkt der beiden äußersten Ziffern. Wird ferner 594 von der gesuchten Zahl abgezogen, so besteht der Rest aus denselben 3 gesuchten Ziffern nur in umgekehrter Ordnung. Welche Zahl ist es? Antw. 864.

46) Man sucht zwei Zahlen, deren Differenz mit der Differenz ihrer Quadrate multiplicirt 63, deren Summe aber mit der Summe ihrer Quadrate multiplicirt, 203 giebt. Welche Zahlen sind es? Antw. 5 und 2.

47) Die Summe und das Produkt zweier gesuchten Zahlen zusammen ist 17; die Summe der Quadrate übertrifft dagegen die Summe der Zahlen selbst um 22. Welche Zahlen sind es? Antw. 5 und 2.

48) Die Summe zweier Zahlen ist a, die Summe ihrer Biquadrate b, welche Zahlen sind es? Antw.

$$\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3a^2\pm\sqrt{8a^4+8b}},\ \tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3a^2\pm\sqrt{8a^4+8b}}.$$

49) Die Summe zweier Zahlen ist $=a$, die Summe ihrer 5ten Potenzen $=b$; welche Zahlen sind es? Antw.

$$\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2-4p},\ \tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2-4p},\quad \text{wo}\quad p=\tfrac{1}{2}\left(a^2\pm\sqrt{\frac{a^5+4b}{5a}}\right).$$

50) Welche Zahlen haben zur Summe a und geben, wenn man die Summe ihrer Quadrate mit ihrem Produkte multiplicirt b? Antw.

$$\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2-4p},\ \tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2-4p},\quad \text{wo}\quad p=\tfrac{1}{4}a^2\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{a^4-8b}.$$

51) Die Summe zweier Zahlen zur Summe ihrer Quadrate addirt ist $=a$; die mfache Summe der Quadrate zum nfachen Produkt der beiden Zahlen addirt giebt b. Welche Zahlen sind es? Antw. Bezeichnet s die Summe und p das Produkt der beiden Zahlen, so hat man

$$s=\frac{-(n-2m)\pm\sqrt{(n-2m)^2+4n(2b+(n-2m)a)}}{2n}$$

$$\text{und}\qquad p=\frac{ms+b-ma}{n},$$

während die beiden gesuchten Zahlen selbst dann aus $x^2-sx+p=0$ sich ergeben, wenn man diese Gleichung nach x auflöst.

52) In einer geometrischen Proportion ist die Summe der beiden mittlern Glieder $=a$, die Summe der beiden äußern $=b$ und die Summe der Quadrate aller 4 Glieder $=c$; welche ist es? Antw.

$$\tfrac{1}{2}b-\sqrt{c-a^2}:\tfrac{1}{2}a-\sqrt{c-b^2}=\tfrac{1}{2}a+\sqrt{c-b^2}:\tfrac{1}{2}b+\sqrt{c-a^2}.$$

53) Die Differenz der beiden mittlern Glieder einer geometrischen Proportion ist a, die Differenz der beiden äußern ist b und die Summe der Quadrate aller 4 Glieder $=c$; welche ist es? Antw.

$$\tfrac{1}{2}(-b+\sqrt{c-a^2}):\tfrac{1}{2}(-a+\sqrt{c-b^2})=\tfrac{1}{2}(a+\sqrt{c-b^2}):\tfrac{1}{2}(b+\sqrt{c-a^2}).$$

54) Zwei Zahlen zu finden, deren Summe 5 und deren Summe der 3ten Potenzen mit der 3ten Potenz der Kleinern multiplicirt, 280 giebt? Antw. 2 und 3.

55) Zwei Zahlen zu finden, deren Differenz der Quadrate 9 und Summe der Würfel (3ten Potenzen) 189 ist? Antw. 5 und 4.

56) Zwei Zahlen zu finden, deren Summe und Produkt mit der Kleinsten multiplicirt beziehlich 75 und 250 giebt? Antw. 10 und 5.

57) Drei Zahlen zu finden, deren Summe der Würfel (dritten Potenzen) 50, die Summe der ersten und des Kubus der 2ten 18, und die Summe des dritten und des Kubus des 2ten 17 ist? Antw. 3, $\sqrt[3]{15}$ und 2.

58) Zwei Zahlen zu finden, deren Differenz 4 und deren Produkt der Würfel mit dem Würfel der größern multiplicirt 3176523 giebt? Antw. 7 und 3.

59) Welches sind die Werthe von x und y in den Gleichungen

$$x^3y^2+xy^4=156 \quad \text{und} \quad x^2y^3+x^4y=234?$$

Antw. $x=3$ und $y=2$.

60) Zwei Zahlen zu finden, deren Produkt mit der größten multiplicirt 405, und deren Differenz mit der kleinsten multiplicirt 20 giebt? Antw. 9 und 5.

61) Zwei Zahlen zu finden, von welchen die Differenzen ihrer Würfel 604, und die Differenz mit der größten der Zahlen multiplicirt 36 giebt? Antw. die obigen 9 und 5.

62) Zwei Zahlen zu finden, deren Summe 15 ist, und deren Produkt der Quadrate in das Quadrat der kleinsten 153644 giebt? Antw. 8 und 7.

63) Drei Zahlen stehen in stetiger Proportion, ihre Summe ist a und die Summe der Quadrate b, welche Zahlen sind es? Antw.

$$\frac{a^2+b-\sqrt{(3b-a^2)(3a^2-b)}}{4a},\ \frac{a^2-b}{2a},\ \frac{a^2+b+\sqrt{(3b-a^2)(3a^2-b)}}{4a}.$$

64) In einer stetigen Proportion ist die Summe aller 3 Glieder $=a$, und zieht man von der Summe der Quadrate der äußern Glieder das Quadrat des mittlern Gliedes ab, so erhält man b? Antw. Heißt g das mittlere Glied, so hat man $g=\frac{-a\mp\sqrt{3a^2-2b}}{2}$ und die äußern Glieder sind dann

$$\tfrac{1}{2}(a-g\pm\sqrt{a^2-2ag-3g^2}),\ \tfrac{1}{2}(a-g\mp\sqrt{a^2-2ag-3g^2}).$$

65) In einer geometrischen Proportion ist das Produkt der beiden äußern oder mittlern Glieder $=a$, die Summe aller Glieder $=b$ und die Differenz zwischen der Quadrat-Summe der äußern und der Quadrat-Summe der mittlern Glieder $=c$: welche ist es? Antw. Die Summe der beiden mittlern Glieder ist $\frac{b^2-c}{2b}$, also die gesuchte Proportion

$$\frac{b^2+c-\sqrt{(b^2+c)^2-16ab^2}}{4b}:\frac{b^2-c-\sqrt{(b^2-c)^2-16ab^2}}{4b}=$$

$$\frac{b^2-c+\sqrt{(b^2-c)^2-16ab^2}}{4b}:\frac{b^2+c+\sqrt{(b^2+c)^2-16ab^2}}{4b}.$$

66) In einer Reihe von 4 Gliedern, von denen je 3 auf einander folgende eine stetige Proportion bilden, ist die Summe aller Glieder $=a$ und die Summe ihrer Quadrate $=b$; welche Glieder sind es? Antw. Ist s die halbe Summe und d die halbe Differenz der beiden mittlern Glieder, so ist $s=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+2a^2(a^2-b)}}{4a}$, $d=s\sqrt{\frac{a-4s}{a+4s}}$, und hieraus die Glieder

$$\frac{(s-d)^2}{s+d},\quad s-d,\quad s+d,\quad \frac{(s+d)^2}{s-d}.$$

67) In einer Reihe von 4 Gliedern, deren je 3 auf einander folgende eine stetige Porportion biiden, ist gegeben: Die Differenz zwischen der Summe der beiden äußern und der Summe der beiden mittlern Glieder $=a$, wie auch die Differenz zwischen der Summe der Quadrate der beiden äußern Glieder und der Summe der Quadrate der beiden mittlern $=b$. Welche Glieder sind es? Antw. Ist s die halbe Summe, d die halbe Differenz der beiden mittlern Glieder, so hat man $s=\frac{b-a^2}{4a}$

$d=\frac{b-a^2}{4\sqrt{2b-a^2}}$, und die Glieder selbst sind

$$\frac{(s-d)^2}{s+d},\quad s-d,\quad s+d,\quad \frac{(s+d)^2}{s-d}.$$

68) In einer Reihe von 4 Gliedern sind die Quotienten je zweier auf einander folgenden einander gleich; *) die Differenz zwischen der Summe des 2ten und 4ten und der Summe des 1ten und 3ten Gliedes $=a$; die Summe der Quadrate aller 4 Glieder $=b$. Welche Glieder sind es? Antw. Dasmal ist $d=\frac{b\pm\sqrt{b^2+2a^2(a^2-b)}}{4a}$, $s=d\sqrt{\frac{a+4d}{a-4d}}$ und die Glieder selbst, wie in der vorigen Aufgabe.

69) In einer geometrischen Progression von 4 Gliedern ist gegeben: die Summe aller Glieder $=a$, die Differenz zwischen der Quadrat-Summe

---

*) Solche 4 Glieder, wie sie in den Anfgaben (66 — 68.) angenommen sind, sagt man, bilden eine geometrische Progression von 4 Gliedern. In der nächsten Aufgabe (73.) ist dieser Ausdruck benutzt. — So oft nehmlich in einer Reihe von Zahlen, die Quotienten je zweier auf einander folgenden einander gleich sind, oder was dasselbe ist, je 3 auf einander folgende eine stetige Proportion bilden, so oft hat man eine geometrische Progression.

der äußern und der Quadrat-Summe der mittlern Glieder $=b$; welche Progression ist es? Antw. $s=\frac{a^2-b}{4a}$, $d=\pm s\sqrt{\frac{b}{8as+b}}$ und die Glieder selbst wie in den vorigen Aufgaben.

70) In einer geometrischen Progression von 4 Gliedern ist die Summe der beiden äußern Glieder $=a$, die Summe der beiden mittlern $=b$; welche Progression ist es? Antw. Ist e der Quotient je zweier auf einander folgender Glieder (das folgende durch das vorhergehende dividirt, gewöhnlich der Exponent der Progression genannt), so findet sich

$e=\frac{a+b\pm\sqrt{(a-b)(a+3b)}}{2b}$, und das erste Glied $=\frac{a}{e^3+e}=\frac{b}{e^2+e}$.

71) In einer geometrischen Proportion ist gegeben: Summe der Mittel-Glieder $=a$, Summe der äußern $=b$, Summe der Würfel aller 4 Glieder $=c$: welche ist es? Antw. Heißt p das Produkt der mittlern oder äußern Glieder, so hat man $p=\frac{a^3+b^3-c}{3(a+b)}$, und die gesuchte Proportion:

$$\tfrac{1}{2}(b-\sqrt{b^2-4p}):\tfrac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-4p})=$$
$$\tfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-4p}):\tfrac{1}{2}(b+\sqrt{b^2-4p}).$$

72) In einer geometrischen Proportion ist gegeben die Summe aller Glieder $=a$, die Summe ihrer Quadrate $=b$; die Summe ihrer Würfel $=c$; welche ist es? Antw. Ist p das Produkt der äußern oder der mittlern Glieder, so hat man $p=\frac{a^3-3ab+2c}{6a}$, und ist d die Differenz zwischen der Summe der beiden äußern Glieder und der Summe der beiden mittlern, so ist $d=\pm\sqrt{\frac{a^3-6ab+8c}{3a}}$ und daraus die Proportion

$$\tfrac{1}{4}(a+d-\sqrt{(a+d)^2-16p}):\tfrac{1}{4}(a-d-\sqrt{(a-d)^2-16p})=$$
$$\tfrac{1}{4}(a-d+\sqrt{(a-d)^2-16p}):\tfrac{1}{4}(a+d+\sqrt{(a+d)^2-16p}).$$

§. 223. a. Aufgabe.

Die Ausdrücke von der Form

$$x^2+Ax+B$$
$$x^3+Ax^2+Bx+C$$
$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

u. s. w. f. in Faktoren zu zerlegen von der Form $x+a$, $x+b$, $x+c$, etc. etc.

Auflösung. Man suche alle Werthe von x, welche diese Ausdrücke zu Null machen, d. h. welche den Gleichungen

1) $x^2+Ax+B=0$
2) $x^3+Ax^2+Bx+C=0$
3) $x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$

u. s. w. f. genügen. Sind nun a, b z. B. die beiden Wurzel-Werthe der Gleichung (1.), so sind $x-a$, $x-b$, die beiden Faktoren, welche mit einander multiplicirt wiederum x^2+Ax+B geben. Sind ferner a, b, c, die 3 Wurzel-Werthe der Gleichung (3.), so ist

$$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3+Ax^2+Bx+C.$$

Und sind a, b, c, d, die 4 Wurzel-Werthe der Gleichung (4.), so ist

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D;$$

u. s. w. f.

Beweis fällt aus (§. 219.) unmittelbar in die Augen.

Beispiel 1. Man soll $x^2+\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}$ in zwei Faktoren zerlegen. — Man setze $x^2+\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}=0$, findet daraus $x=-3$ und $x=-\frac{1}{2}$, dahero $x^2+\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}=(x+3)(x+\frac{1}{2})$.

Beispiel 2. Den Ausdruck $x^2+(a+b)x-1$ in zwei Faktoren zu zerlegen.

Die Gleichung $x^2+(a+b)x-1=0$ giebt

$$x=-\frac{a+b}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(a+b)^2+4}$$

also

$$[x+(\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b-\tfrac{1}{2}\sqrt{(a+b)^2+4})][x+(\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}\sqrt{(a+b)^2+4})]$$
$$=x^2+(a+b)x-1.$$

Beispiel 3. Man soll x^3-3x^2-x+3 in seine 3 Faktoren zerlegen. — Die Gleichung $x^3-3x^2-x+3=0$ liefert $x=1$, $x=-1$, $x=3$; dahero $(x-1)(x+1)(x+3)=x^3-3x^2-x+3$.

Beispiel 4. Man soll $x^5-\frac{3}{2}x^4-6x^3+9x^2-13x+19\frac{1}{2}$ in seine 5 Faktoren zerlegen.

Man setze

$$x^5-\tfrac{3}{2}x^4-6x^3+9x^2-13x+19\tfrac{1}{2}=0$$

und findet $x=\frac{3}{2}$, $x=\pm\sqrt{3+\sqrt{22}}$, $x=\pm\sqrt{3-\sqrt{22}}$; also obiger gegebene Ausdruck

$$=(x-\tfrac{3}{2})(x-\sqrt{3+\sqrt{22}})(x+\sqrt{3+\sqrt{22}})(x-\sqrt{3-\sqrt{22}})\times (x+\sqrt{3-\sqrt{22}}).$$

Beispiel 5. Eben so findet man

$$x^2+px+q=(x+\tfrac{1}{2}p+\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q})(x+\tfrac{1}{2}p-\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}).$$

(Vergl. Kap. 6. XX.).

Arithmetik.

Vierzehntes Kapitel.

Von den unbestimmten oder Diophantischen Aufgaben.

§. 224. Bemerkung.

So oft nicht so viel Gleichungen gegeben sind, als in ihnen Unbekannte vorkommen, z. B. nur 3 Gleichungen und 5 Unbekannte x, y, z, u, v, so kann man 3 der Unbekannten z. B. z, u, v aus den 3 gegebenen Gleichungen in die beiden andern x und y ausgedrückt finden. Die beiden andern Unbekannten x und y bleiben dann aus diesen Gleichungen noch völlig unbestimmt, so daß man für jeden derselben jeden beliebigen Werth setzen, und sonach unendlich viele Auflösungen finden kann, so viele als für die Unbekannten x und y beliebige Werthe gesetzt werden können. (Vergl. Kap. XII. Schluß-Anmerkung.) — Die Menge der verschiedenen Auflösungen wird jedoch sehr häufig durch Nebendingungen, die noch gegeben seyn können, sehr beschränkt, und einige solcher Aufgaben hier etwas weitläufiger durchzunehmen, ist der Zweck des gegenwärtigen Kapitels

§. 225. Aufgabe.

Die Gleichung 1) $7x+13y=405$ dergestalt nach x und nach y aufzulösen, daß x und y bloß ganze Zahlen werden.

Auflösung. Man findet sogleich aus (1.):

$$2)\quad x=\frac{405-13y}{7}=57-2y+\frac{y+6}{7}.$$

Weil nun x und y ganze Zahlen seyn sollen, so muß auch $\frac{y+6}{7}$ eine ganze Zahl werden, die jedesmal durch h bezeichnet seyn mag. Man hat also

$$3)\quad \frac{y+6}{7}=h, \qquad \text{daraus} \qquad 4)\quad y=7h-6$$

und dies in (2.) substituirt: $5)\quad x=69-13h.$

Diese beiden Ausdrücke für x und y genügen der Gleichung (1.), was man auch für h setzen mag, und geben noch überdies allemal eine ganze positive Zahl, so oft für h eine ganze positive Zahl $<\frac{69}{13}$ gesetzt wird. Man findet für

$$\begin{array}{rl} h= & 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \\ \left\{\begin{array}{l} y= \\ x= \end{array}\right. & \begin{array}{l} 1,\ 8,\ 15,\ 22,\ 29 \\ 56,\ 43,\ 30,\ 17,\ 4; \end{array} \end{array}$$

und dies sind alle möglichen zusammengehörigen Werthe von x und y in positiven ganzen Zahlen, welche der gegebenen Gleichung (1.) genügen.

Anmerkung. Man konnte die Gleichung (2.) auch so nehmen

$$2)\quad x=\frac{405-13y}{7}=57-y+\frac{6-6y}{7};$$

dann $3)\quad \frac{6-6y}{7}=h$ und $y=\frac{6-7h}{6}=1-h-\frac{h}{6};$

dann $4)\quad \frac{h}{6}=h_1$ und $h=6h_1;$

und dann aus (3.)... $5)\quad y=1-7h_1$

und aus (2.)... $6)\quad x=56+13h_1.$

Setzt man hier nach und nach

$$h_1=\ 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4$$

so erhält man

$$\left\{\begin{array}{l} y= \\ x= \end{array}\right. \begin{array}{l} 1,\ 8,\ 15,\ 22,\ 29 \\ 56,\ 43,\ 30,\ 17,\ 4 \end{array}$$

wie oben auch. — Das obige Verfahren führte dagegen etwas schneller zum

Ziele. Die Regel, die aus dieser Vergleichung für diese praktischen Arbeiten hervorgeht, besteht aber darin, daß man bei dem Heraussuchen der Ganzen, lieber zuviel nimmt, wenn das zuviel genommene weniger, als die Hälfte des Divisors beträgt, dagegen lieber zu wenig, wenn das zu wenig genommene weniger beträgt, als diese Hälfte. Eine 2te Regel ist, immer denjenigen Unbekannten aus der gegebenen Gleichung zuerst zu entwickeln, welcher den kleinsten Coefficienten hat.

Beispiel 1. Alle Werthe von x und y in ganzen Zahlen zu finden, welche der Gleichung

$$1)\quad 17x-7y=1$$

genügen. — Man findet aus (1.) zunächst:

$$2)\quad y=\frac{17x-1}{7}=2x+\frac{3x-1}{7}$$

$$3)\quad \frac{3x-1}{7}=h \quad \text{und} \quad x=\frac{7h+1}{3}=2h+\frac{h+1}{3};$$

$$4)\quad \frac{h+1}{3}=h_1 \quad \text{und} \quad h=3h_1-1;$$

und dies in die frühern Gleichungen substituirt, giebt:

$$5)\quad x=7h_1-2$$

$$6)\quad y=17h_1-5.$$

Und setzt man nun nach und nach

$$h_1=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ \text{etc. etc.}$$

so erhält man

$$\left\{\begin{array}{l} x=\ 5,\ 12,\ 19,\ 26,\ 33,\ 40,\ 47,\ 54,\ 61,\ 68 \\ y=12,\ 29,\ 46,\ 63,\ 80,\ 97,\ 114,\ 131,\ 148,\ 165 \end{array}\right\} \text{u. s. w. s.}$$

bis in's Unendliche.

Beispiel 2. Alle positive ganzen Zahlen für x und y zu finden, welche der Gleichung

$$1)\quad \frac{x}{59}+\frac{y}{23}=\frac{927}{1357}$$

genügen. — Schafft man zuerst die Brüche weg, so erhält man:

$$2)\quad 23x+59y=927.$$

Daraus $$3)\quad x=\frac{927-59y}{23}=40-3y+\frac{10y+7}{23};$$

$$4)\quad \frac{10y+7}{23}=h \quad \text{und} \quad y=\frac{23h-7}{10}=2h+\frac{3h-7}{10};$$

$$5)\quad \frac{3h-7}{10}=h_1 \quad \text{und} \quad h=\frac{10h_1+7}{3}=3h_1+2+\frac{h_1+1}{3};$$

$$6)\quad \frac{h_1+1}{3}=h_2 \quad \text{und} \quad h_1=3\cdot h_2-1.$$

Subſtituirt man nun rückwärts, damit alles in h_2 ausgedrückt werde, ſo ergiebt ſich

aus (5.)... 7) $h = 10.h_2 - 1$
aus (4.)... 8) $y = 23.h_2 - 3$
aus (3.)... 9) $x = 48 - 59.h_2$.

Dieſe Werthe von x und von y genügen der gegebenen Gleichung (1.) allemal, was man auch ſtatt h_2 ſetzen mag; dagegen wird man für h_2 nichts ſetzen können, wodurch x und y zugleich ganze poſitive Zahlen werden könnten. Folglich hat die Aufgabe diesmal in ganzen poſitiven Zahlen gar keine Auflöſung.

Will man aber ganze negative Zahlen zulaſſen, ſo erhält man unendlich viele zuſammengehörige Werthe von x und von y, indem man ſtatt h_2 jede beliebige poſitive und jede beliebige negative ganze Zahl ſetzt.

§. 226. Zuſatz.

Der Gang bleibt aber im weſentlichen immer derſelbe, wenn auch mehr Unbekannte noch vorkommen und noch eben ſo viel oder mehr Gleichungen gegeben ſeyn ſollten, die Zahl der gegebenen Gleichungen aber doch noch geringer bliebe, als die Anzahl der vorkommenden Unbekannten.

Beiſpiel 1. Seyen x, y und z in ganzen Zahlen zu finden, aus den Gleichungen:

1) $5x - 3y + 2z = 7$
2) $-2x - 4y + 5z = 8$.

Man eliminirt einen der Unbekannten z. B. z, und erhält

3) $29x - 23y = 19$.

Dieſe einzige Gleichung behandelt man nun nach (§. 225.) und findet

4) $y = \frac{29x - 19}{23} = x + \frac{6x - 19}{23}$

5) $\frac{6x - 19}{23} = h$ und $x = \frac{23h + 19}{6} = 4h + 3 - \frac{h - 1}{6}$

6) $\frac{h - 1}{6} = h_1$ und $h = 6h_1 + 1$.

Daraus, ſubſtituirend

7) $x = 23h_1 + 7$
8) $y = 29h_1 + 8$.

Substituirt man nun diese Werthe für x und y in die Gleichung (1.) (oder 2.), so ergiebt sich:

9) $z = -2 - 14h_1$. *)

Indem man nun statt h_1, 0 und beliebige positive und negative ganze Zahlen setzt, werden auch x, y, z, welche den gegebenen Gleichungen für jeden Werth von h_1 genügen, ebenfalls ganze Zahlen werden (positive oder negative. Nie aber können hier aus diesen Formeln für x, y, z zugleich positive ganze Zahlen hervorgehen.).

Beispiel 2. Welche Zahlen lassen durch 3, 5, 7 dividirt beziehlich die Reste 1, 4 und 3.

Stellt z jede dieser Zahlen vor, und x, y, ν ganze Zahlen, so hat man

1) $z = 3x + 1$
2) $z = 5y + 4$
3) $z = 7\nu + 3$.

Aus diesen (3.) Gleichungen erhält man durch Elimination von z

4) $5y + 3 = 3x$
5) $5y + 1 = 7\nu$.

Und diese beiden Gleichungen geben abermals durch Elimination von y

6) $2 = 3x - 7\nu$.

Daraus 7) $x = \frac{7\nu+2}{3} = 2\nu + \frac{\nu+2}{3}$

8) $\frac{\nu+2}{3} = h$, $\nu = 3h - 2$,

und aus (7.)... 9) $x = 7h - 4$;

so wie aus (5.)... 10) $5y + 1 = 21h - 14$, $y = \frac{21h-15}{5} = 4h - 3 + \frac{h}{5}$

11) $\frac{h}{5} = h_1$ und $h = 5h_1$;

also auch 12) $y = 21h_1 - 3$;
so wie aus (9.)... 13) $x = 35h_1 - 4$;
und aus (8.)... 14) $\nu = 15h_1 - 2$.

---

*) Es ergab sich hier zufällig z sogleich in Form einer ganzen Zahl; wäre aber selbst wieder eine Bruchform entstanden, so hätte man neue unbestimmte ganze Zahlen h_2, h_3, etc. etc. noch eingeführt, so wie vorher immer, um z in h_2 oder h_3 etc. etc. ganz auszudrücken, wo sich dann auch x und y in dasselbe h_2 oder h_3 etc. etc. ganz hätten ausdrücken lassen. Das nächste Beispiel wird dies näher bekunden.

Dies endlich in (1.) setzend, giebt

$$15)\quad z = 105h_I - 11.$$

Setzt man nun hier statt h nach und nach 1, 2, 3, 4, 5, u. s. w. f. so erhält man für z eine in's unendliche fortgehende Reihe von Zahlen, wo jede die Eigenschaft hat, daß sie durch 3 dividirt, gerade 1 zum Rest läßt; durch 5 dividirt, den Rest 4 giebt; endlich durch 7 dividirt, 3 übrig läßt.

Beispiel 3. Man soll Brüche finden, deren Nenner 3, 5, 7, und deren Summe $\frac{207}{105}$ ist. — Sind x, y, z die Zähler, so hat man

$$1)\quad \frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{z}{7}=\frac{207}{105} \quad \text{oder} \quad 35x+21y+15z=207.$$

Daraus $$2)\quad z=\frac{207-35x-21y}{15}=14-2x-y-\frac{5x+6y+3}{15};$$

daraus $$3)\quad \frac{5x+6y+3}{15}=h \quad \text{und} \quad x=\frac{15h-6y-3}{5}=3h-y-\frac{y+3}{5};$$

$$4)\quad \frac{y+3}{5}=h_I \quad \text{und} \quad y=5h_I-3.$$

Folglich aus (3.): $$5)\quad x=3h-6h_I+3;$$

und aus (2.) $$6)\quad z=11-7h+7h_I.$$

Setzt man nun hier statt h und h_I beliebige ganze Zahlen, so werden auch x, y, z nothwendig ganze Zahlen werden und man wird die positiven darunter (d. h. wenn x, y, z zugleich positiv sind) leicht herausfinden. — Z. B. für $h_I=1$ wird $y=2$, $x=3h-3$ und $z=18-7h$; also für $h=2$, $y=2$, $x=3$, $z=4$. Für $h_I=2$ wird $y=7$, $x=3h-9$, $z=25-7h$ und da giebt es keine ganze Zahl für h, welche y, x und z zugleich positiv machte. U. s. w. f.

Uebungs-Beispiele.

1) Man soll 100 Rthlr. Gold in Friedrichsd'or à 5 Rthlr. und Dukaten à 3 Rthlr. bezahlen, so daß die Zahlung in ganzen Stücken abgemacht werden kann. Es werden aber dazu erforderlich 2 Friedrichsd'or und 30 Dukaten, aber auch noch 5, 8, 11, 14, 17, 20 Friedrichsd'or und beziehlich 25, 20, 15, 10, 5 und kein Dukaten.

2) Jemand der bloß Silbergroschen hat (à $\frac{1}{30}$ Rthlr.) hat 18 gute Groschen (à $\frac{1}{24}$ Rthlr.) an jemanden zu bezahlen, der ihm bloß 2 Groschen-Stücke (à $\frac{1}{12}$ Rthlr.) herausgeben kann. Wie ließ sich diese Zahlung genau ausführen? Mit 25 Silbergroschen gegen 1 Zweigroschen-Stück. Dann aber kann der erste noch allemal 5 Silbergroschen mehr geben, und dafür 2 Zweigroschen-Stücke mehr zurückgeben lassen.

3) Wie zerlegt man den Bruch $\frac{230}{77}$ in zwei andere, deren Nenner 11 und 7 sind? — Man findet $\frac{5}{7}+\frac{25}{11}=\frac{12}{7}+\frac{14}{11}=\frac{19}{7}+\frac{3}{11}=\frac{230}{77}$.

§. 227. Zusatz.

Sind die gegebenen Gleichungen nicht einfache, sondern zum Theil oder alle vom zweiten oder höheren Grade, übrigens mehr Unbekannte vorhanden als Gleichungen, und will man nun wiederum bloß alle ganzen Zahlen, oder auch nur alle positiven (ganzen oder gebrochenen) für die Unbekannten suchen, welche den Gleichungen genügen, so gewährt jede einzelne Aufgabe ihre eigenen Schwierigkeiten, so daß wir uns hier begnügen müssen, für unsern gegenwärtigen Zweck nur in einigen Beispielen auf das Wesen dieser Schwierigkeiten und auf die Mittel, durch welche sie besiegt werden können, aufmerksam zu machen.

Beispiel 1. Alle ganzen Zahlen zu finden für x und y, welche der Gleichung

$$1)\quad ax^2+bxy+cx+dy=f$$

genügen, unter der Voraussetzung, daß a, b, c, d, f beliebig gegebene positive oder negative ganze (oder gebrochene) *) Zahlen sind. — Man findet aus (1.):

$$(2.)\quad y=-\frac{ax^2+cx-f}{(bx+d)}=-\frac{a}{b}x-\frac{bc-ad}{b^2}+\frac{bcd-ad^2+b^2f}{b^2(bx+d)},$$

welches letztere Resultat man allemal erhält, wenn man so lange (nach §. 47.) mit $bx+d$ in ax^2+cx-f dividirt, bis der letzte Rest nicht mehr x enthält. — Nun suche man alle Theiler des letzten Dividenden $bcd-ad^2+b^2f$ (§. §. 88. 89.) und setze jeden Theiler $=bx+d$ oder vielmehr = dem, was aus $bx+d$ wird, wenn man von b und d noch den größten Theiler herauswirft, so wird man die Werthe von x finden. Sucht man unter diesen Werthen von x diejenigen aus, welche selbst ganze Zahlen sind, und unter diesen letzteren wieder diejenigen, welche auch den ersten Theil von y nehmlich $\frac{a}{b}x+\frac{bc-ad}{b^2}$ zu einer ganzen Zahl machen, so erhält man auch y als ganze Zahl.

---

*) Sind nehmlich diese Coefficienten zum Theil oder alle gebrochene Zahlen, so darf man nur nach (§. 173.) aus der Gleichung die Brüche wegschaffen, und man erhält dann dieselbe Form der Gleichung aber mit lauter ganzen Coefficienten.

Sey $a=3,\ b=2,\ c=0,\ d=-15,\ f=-9,$ also die gegebene Gleichung $3x^2+2xy-15y+9=0,$ so findet sich

$$y=-\frac{3x^2+9}{2x-15}=-(\tfrac{3}{2}x+\tfrac{45}{4})+\frac{711}{4(15-2x)}.$$

Nun sind die Faktoren von 711 zunächst 1, 3, 3, 79, dann 9, 237 und 711; und man setze

$15-2x=1;\ 15-2x=3;\ 15-2x=9;\ 15-2x=79;$ u. s. f.

und findet beziehlich

$x=7;\ x=6;\ x=3;$ x negativ, u. s. w. und dazu findet sich sogleich beziehlich

$y=156;\ y=39;\ y=4;$ u. s. f.

Beispiel 2. Diejenigen reellen ganzen und gebrochenen Zahlen zu finden für x und y, welche der Gleichung

1) $a^2x^2+bx+c=y^2$ genügen. —

Man setze 2) $y=ax+\alpha$ und erhält aus (1.)

3) $a^2x^2+bx+c=(ax+\alpha)^2$ oder $bx+c=2a\alpha x+\alpha^2,$

woraus 4) $x=\dfrac{\alpha^2-c}{b-2a\alpha}.$

Die Gleichung 4 liefert x und die Gleichung (2.) dann y für jeden beliebigen Werth, den man statt α setzen mag, ohne Wurzel, also jedesmal reell, wenn α, a, b, c, reell genommen sind.

Beispiel 3. Diejenigen reellen (positiven oder negativen ganzen oder gebrochenen) Zahlen zu finden für x und y, welche der Gleichung

1) $ax^2+bx+c^2=y^2$ genügen. —

Man setze 2) $y=\alpha x+c,$ so wird aus (1.)

3) $ax^2+bx+c=(\alpha x+c)^2$ oder $ax+b=\alpha^2x+2\alpha c$

woraus 4) $x=\dfrac{b-2\alpha c}{\alpha^2-a}$ und dann dazu aus (2.) auch y reell sich ergiebt.

Beispiel 4. Man soll die reellen Werthe von x und von y finden, welche der Gleichung

1) $ax^2+bx+c=y^2$

unter der Voraussetzung genügen, daß ax^2+bx+c in die beiden Faktoren zerlegt ist $(\alpha x+\beta).(\gamma x+\delta),$ so daß die Gleichung (1.) in diese

2) $(\alpha x+\beta).(\gamma x+\delta)=y^2$ verwandelt wird.

Man setze 3) $y=(\alpha x+\beta)\varepsilon,$ so wird aus (2.)

4) $\gamma x+\delta=\varepsilon^2(\alpha x+\beta),$

woraus x und nachher aus (3.) auch y rational und reell sich ergiebt, indem man ε ganz beliebig reell annimmt.

Anmerkung. Leisten die Werthe $x=p$ und $y=q$ der Gleichung 1) $ax^2+bx+c=y^2$, wie auch a, b, c gegeben seyn mögen, ein Genüge, so kann man alle die übrigen Werthe von x durch $p+z$ und von y durch $q+hz$ ausdrücken, also $p+z$ und $q+hz$ statt x und statt y in die Gleichung (1.) substituiren, und daraus z in h rational ausgedrückt erhalten, so daß man nur h beliebig anzunehmen braucht, um z, dann auch hz und somit $p+z$ und $q+hz$ als neue Werthe von x und von y zu haben, die reell seyn werden, wenn man h reell annimmt.

Beispiel 5. Alle reellen Werthe von x und von y zu finden, welche der Gleichung

$$1)\quad ax^2+bx+c=dy^2+fy$$

genügen. — Man findet, indem man die Gleichung nach y auflöst:

$$2)\quad y=\frac{-f\pm\sqrt{4adx^2+4bdx+(4cd+f^2)}}{2d}$$

und damit dieses y rational und reell werde, muß man alle reellen Werthe von x und z aufsuchen, welche der Gleichung

$$3)\quad 4adx^2+4bdx+(4cd+f^2)=z^2$$

genügen (welches nach den Beispielen 2 – 4. geschehen kann). Dann wird aus (2.):

$$4)\quad y=\frac{-f\pm z}{2d},\qquad \text{ebenfalls reell.}$$

Anmerkung. Es ist allemal $(a-b)^2+4ab=(a+b)^2$. Nimmt man daher statt a und b beliebige ganze Zahlen, doch so, daß ab eine vollständige Quadrat-Zahl wird, so erhält man in $(a-b)$ und $2\sqrt{ab}$ allemal Zahlen, deren Summe der Quadrate allemal wieder eine vollständige Quadrat-Zahl ist, nehmlich $(a+b)^2$. — Setzt man also z. B. $a=p^2$ und $b=q^2$, so sind p^2-q^2 und $2pq$ allemal solche Zahlen, deren Summe der Quadrate allemal wieder eine vollständige Quadrat-Zahl ist, nehmlich $(p^2+q^2)^2$.

Und sind α und β zwei solche Zahlen, deren Summe der Quadrate wiederum eine vollständige Quadrat-Zahl ist, so haben $m\alpha$ und $m\beta$ dieselbe Eigenschaft, welche ganze Zahl man auch für m setzen möge. Denn es ist

$$(m\alpha)^2+(m\beta)^2=m^2\alpha^2+m^2\beta^2=m^2(\alpha^2+\beta^2).$$

Solche und ähnliche Betrachtungen würden aber dazu dienen, alle Werthe von x, y und z zu finden, welche positive ganze Zahlen sind, und dabei der Gleichung $x^2+y^2=z^2$ oder der Gleichung $x^2=z^2-y^2$ genügen.

Uebungs-Beispiele.

1) Der Ausdruck $a^2x^2+cy^2$ wird ein vollständiges Quadrat, wenn man $x=cn^2-m^2$, $y=2amn$ nimmt, dabei m, n, beliebig rational sich denkt, während a, c, rational gegeben sind.

2) Welchen Ausdruck muß x vorstellen, damit a^2x^2+c ein vollständiges Quadrat werde? Antw. $x=\frac{cn^2-m^2}{2amn}$.

3) Wann wird $a^2x^2+bxy+cy^2$ ein vollständiges Quadrat? Für $x=m^2-cn^2$, $y=bn^2-2amn$.

4) Für $x=$ welchem Ausdruck? wird a^2x^2+bx+c ein Quadrat. Antw. Wenn $x=\frac{m^2-cn^2}{bn^2-2amn}$.

5) Dagegen wird ax^2+bx+c^2 ein vollständiges Quadrat, wenn $x=\frac{bn^2-2cmn}{m^2-an^2}$.

6) Man soll 2 Zahlen finden, deren Differenz gleich ist der Differenz ihrer Würfel (Kubus, dritten Potenz). Antw. $\frac{5}{7}$ und $\frac{2}{7}$, $\frac{8}{13}$ und $\frac{7}{13}$, $\frac{15}{19}$ und $\frac{5}{19}$; u. s. w. f.

7) Welche Reste kann eine Kubik-Zahl geben, wenn sie durch 7, 8, 9 dividirt wird? Antw. Für 7 die Reste 0, 1, 6; für 8 die Reste 0, 1, 3, 5, 7 und für 9 die Reste 0, 1, 8.

Arithmetik.

Funfzehntes Kapitel.

Von den Progressionen oder Zahlen-Reihen. Von den einfachen arithmetischen und den einfachen geometrischen Progressionen. Von den Progressionen höherer Art. Von den figurirten Zahlen.

§. 228. Erklärung.

Wenn man sich eine Reihe von Zahlen denkt, deren je zwei auf einander folgende (Glieder) jedesmal dieselbe Differenz geben, so hat man eine einfache arithmetische Reihe. Am allgemeinsten läßt sich solche darstellen durch

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d,\ \text{u. s. w.}$$

wo d positiv und auch negativ seyn kann. Ist d positiv so heißt die Reihe steigend, und fallend wenn d negativ ist; und d heißt der Unterschied der Glieder.

Wenn aber in einer Reihe von Zahlen, je zwei auf einander folgende (Glieder), durch einander dividirt, allemal denselben Quotienten liefern, so nennt man die Reihe eine einfache geometrische Progression. Am allgemeinsten läßt sich solche ausdrücken

$$a,\ ad,\ ad^2,\ ad^3,\ ad^4,\ ad^5,\ \text{etc. etc.}$$

wo d positiv und negativ, und, wenn positiv, wiederum größer

als 1 seyn kann, in welchem Falle die Reihe steigend genannt wird, oder kleiner als 1, wo die Reihe eine fallende ist; d heißt hier der Exponent der Glieder.

§. 229. Zusatz.

Ist in einer einfachen arithmetischen Progression a das erste Glied, d der Unterschied der Glieder (der erhalten wird, wenn man irgend ein Glied von seinem nächst folgenden subtrahirt), und das nte Glied durch u bezeichnet, so ist

$$1)\quad u = a + (n-1)d.$$

Ist dagegen in einer einfachen geometrischen Reihe, a das erste Glied, d der Exponent der Glieder (was man erhält, wenn man irgend ein Glied durch das nächst vorhergehende Glied dividirt), und wird auch hier wieder das nte Glied durch u bezeichnet, so hat man

$$I.\quad u = a \cdot d^{n-1}.$$

Beides fällt bei dem bloßen Anblick der Reihen, wenn man die Stellenzahl darüber setzt, geradezu in die Augen, nehmlich

Stellenzahl	1,	2,	3,	4, ...	n
Arithm. R.	a,	a+d,	a+2d,	a+3d, ...	a+(n—1)d
Geom. R.	a,	ad,	ad^2,	ad^3, ...	ad^{n-1}.

§. 230. Lehrsatz.

Ist s die Summe der n ersten Glieder der vorliegenden arithmetischen Reihe, und versteht man, sobald die geometrische Reihe betrachtet wird, auch unter s die Summe ihrer n ersten Glieder, so ist allemal:

für die arithm. R. $$2)\quad s = \frac{(a+u)\cdot n}{2}$$

für die geometr. R. $$II.\quad s = \frac{du-a}{d-1}.$$

Beweise. Für die arithmetische Reihe. Man schreibe die arithmetische Reihe noch einmal hin, die Glieder aber das 2te mal in umgekehrter Ordnung, so nehmlich, daß man hat

$$s = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (u-2d) + (u-d) + u.$$
$$s = u + (u-d) + (u-2d) + \ldots + (a+2d) + (a+d) + a.$$

Addirt man nun beide Gleichungen (links und rechts die Ausdrücke) und bemerkt man, daß rechts je zwei unter einander stehende Glieder allemal a+u geben, daß also a+u so viel mal vorkommt, als die Reihe Glieder hat, so erhält man augenblicklich

$$2s = (a+u)n \quad \text{und} \quad s = \frac{(a+u)n}{2}.$$

Für die geometrische Reihe. Man hat

$$s = a + ad + ad^2 + ad^3 + \ldots + \frac{u}{d} + u.$$

und wenn man mit d multiplicirt, links und rechts:

$$ds = ad + ad^2 + ad^3 + \ldots + u + du.$$

Und wenn die obere Gleichung von der untern subtrahirt, so wird:

$$ds - s = -a + du \quad \text{oder} \quad (d-1)s = du - a$$

$$\text{oder} \quad s = \frac{du-a}{d-1}.$$

§. 231. Zusatz.

Sind daher in einer arithmetischen oder in einer geometrischen Reihe von den 5 Buchstaben a, d, n, u und s irgend dreie gegeben, so substituire man diese gegebenen Werthe statt dieser drei Buchstaben in die Gleichungen (§. §. 229. 230. n. 1. und n. 2. wenn von einer arithmetischen Reihe die Rede ist, dagegen n. I. und n. II. sobald die Progression eine geometrische seyn sollte). Jedesmal wird man dann 2 Gleichungen haben, in denen die beiden übrigen noch Unbekannten Buchstaben vorkommen, und diese 2 Gleichungen, wenn man sie nach den beiden Unbekannten auflöst, geben dann die Werthe dieser noch unbekannten Buchstaben ohne weiters.

Anmerkung 1. Weil in dem vorstehenden (§.) die ganze Lehre der einfachen arithmetischen und geometrischen Reihen enthalten ist, so wollen wir das Gesagte noch durch einige Beispiele erläutern.

Beispiel 1. Jemand leiht ein Kapital aus zu $4\frac{1}{2}$ pro C., legt alle Jahre 300 Rthlr. zu. Nach 12 Jahren betragen die sämmtlichen Zinsen 4500 Rthlr.; wie groß war das zuerst ausgeliehene Kapital? — Sey solches x Rthlr. gewesen, so betragen die Zinsen in jedem Jahre von diesen x Rthlr., $\frac{4\frac{1}{2}\cdot x}{100}$ oder $\frac{9x}{200}$ Rthlr. oder $0{,}045 \times x$ Rthlr. Und von 300 Rthlr. zu $4\frac{1}{2}$ pro C. erhält man jedes Jahr $\frac{9.300}{200}$ oder $13\frac{1}{2}$ Rhlr. Die eingenommenen Zinsen bilden also eine arithmetische Reihe, deren erstes Glied $a = \frac{9x}{200}$, deren Unterschied der Glieder $d = 13\frac{1}{2}$ ist, und die aus $n = 12$ Gliedern besteht. Die Summe $s = 4500$ ist gegeben, und nach (§. §. n. 1. und 2.) hat man

$$u = \frac{9x}{200} + 11.(13\tfrac{1}{2})$$

und

$$4500 = \left(\frac{9x}{200} + u\right).6.$$

Eliminirt man nun aus diesen beiden Gleichungen u, so erhält man:

$$4500 = \left(\frac{9x}{100} + 11 \cdot 13\tfrac{1}{2}\right)6 = \frac{54x}{100} + 891,$$

woraus

$$x = \frac{360900}{54} = 6683\tfrac{1}{3};$$

also waren anfänglich $6683\frac{1}{3}$ Rthlr. ausgeliehen.

Beispiel 2. Sey dieselbe Aufgabe noch einmal gegeben, aber angenommen, daß nicht einfacher sondern Zinses-Zins genommen worden sey, so nehmlich, daß die jährlichen Zinsen immer sogleich wieder zum Kapital geschlagen worden sind, und zuletzt die Zinsen 4500 Rthlr. betragen haben. — Sey wieder x das anfängliche Kapital, so beträgt solches mit Zinsen in Thalern

zu Ende des ersten Jahres $x + \frac{9x}{200} = x.(1{,}045) =$

= = = zweiten = $= x.(1{,}045)^2 =$

= = = dritten = $= x.(1{,}045)^3$

u. s. w. f.

zu Ende des 12ten Jahres $= x.(1{,}045)^{12}$

Eben so betragen die 300 Thaler, welche zu Ende des ersten Jahres zugelegt werden

zu Ende des 12ten Jahres $= 300.(1{,}045)^{11}$

Ferner die 300 Rthlr. so zu Ende des 2ten Jahres zugelegt werden betragen

zu Ende des 12ten Jahres $= 300.(1{,}045)^{10}$

Und alle die folgenden Zulagen von 300 Rthlr. zu Ende eines jeden Jahres mit Einschluß derjenigen zu Ende des 11ten Jahres betragen nach der Reihe (jedesmal an Kapital und Zinsen) $300.(1{,}045)^9$, $300.(1{,}045)^8$, $300.(1{,}045)^7$, u. s. w. $300.(1{,}045)^2$, $300.(1{,}045)$.

Diese Werthe der jedesmal hinzugelegten 300 Rthlr. nebst ihren Zinses-Zinsen bilden nun eine geometrische Progression, wo man das erste Glied $a=300.(1{,}045)$, den Exponenten $d=1{,}045$ und das nte oder 11te Glied $u=300.(1{,}045)^{11}$ annehmen kann. Daher ist ihre Summe nach (§. 230. II.):

$$s=\frac{du-a}{d-1}=\frac{300.(1{,}045)^{12}-300.(1{,}045)}{0{,}045}$$

$$=\frac{300.(1{,}045)}{0{,}045}[(1{,}045)^{11}-1],$$

welches der Werth aller zugelegten 300 Rthlr. nebst den bis zu Ende des 12ten Jahres aufgelaufenen Zinses-Zinsen seyn wird. Da nun 11mal 300 Rthlr. zugelegt worden, so beträgt dies 3300 Kapital, also die Gesammt-Anleihe $x+3300$; und die Gesammt-Zinsen $=4500$ gegeben. Also haben wir das Gesammt-Kapital mit den Gesammt-Zinsen doppelt ausgedrückt, nehmlich

$$x+3300+4500=x(1{,}045)^{12}+\frac{300.(1{,}045)}{0{,}040}[(1{,}045)^{11}-1]$$

woraus

$$x=\frac{7800-\frac{300.(1{,}045)}{0{,}045}[(1{,}045)^{11}-1]}{(1{,}045)^{12}-1},$$

welchen Ausdruck bequem numerisch zu berechnen, in dem folgenden Kapitel gelehrt wird.

Beispiel 3. Ein Brunnen wird gegraben, und man zahlte für den ersten Fuß 9 sGr., für jeden folgenden Fuß aber 10 Pf. mehr. Es wurden für das Ausgraben überhaupt 69 Rthlr. 4 sGr. *) bezahlt, und es wird gefragt, wie tief der Brunnen gewesen. — Die Kosten für jeden folgenden Fuß bilden hier eine arithmetische Progression, deren erstes Glied $a=9$ (alles in sGr. ausgedrückt), Unterschied $d=\frac{5}{6}$, die Summe aller Glieder $s=69.30+4=2074$ ist, und von welcher die Anzahl der Glieder n (die Zahl der Fuße, welche man ausgegraben hat) gesucht wird.

Setzt man hier diese Werthe für a, d, und s in die Gleichungen (§. §. 229. 230. n. 1. und n. 2.), so erhält man:

$$1)\ u=9+(n-1).\tfrac{5}{6}=\tfrac{49}{6}+\frac{5n}{6}$$

und

$$2)\ 2074=(9+u).\frac{n}{2}.$$

Folglich, wenn man hier u eliminirt,

$$3)\ 2074=[18+\tfrac{5}{6}(n-1)]\frac{n}{2}=\left(\frac{103}{6}+\frac{5n}{6}\right).\frac{n}{2}$$

oder

$$4)\ 2074=\tfrac{103}{12}n+\tfrac{5}{12}n^2;$$

und wenn man diese quadratische Gleichung auflöst nach (§. 208.), so erhält man

$$5)\ n=\frac{-103\pm 713}{10}=61 \text{ oder } -81{,}6.$$

*) 1 Rthlr. = 30 sGr.; 1 sGr. = 12 Pf.

und weil n nothwendig eine positive Zahl seyn muß, so ist hier $n=61$; d. h. der Brunnen ist 61 Fuß tief.

Wollte man wissen mit wieviel sGr. der letzte Fuß bezahlt worden, so müßte man u suchen, zu dem Ende aus den Gleichungen (1. und 2.) n elimininiren, und man erhielte aus (1.) $n=\frac{6u-49}{5}$, und dies in (2.) substituirt: $2074=(9+u)\frac{6u-49}{10}=\frac{6u^2+5u-441}{10}$

woraus $$u=\frac{-5\pm 713}{12}$$

d. h. $u=59$ oder $u=-59\frac{5}{6}$; und weil u nicht negativ seyn kann, so hat man also 59 sGr. oder 1 Rthlr. 29 sGr. für den letzten Fuß bezahlt.

Anmerkung 2. Man kann auch im allgemeinen aus den Gleichungen (1. und 2. §. 229. 230.) für die arithmetischen Progressionen, so wie aus den Gleichungen (I. II.) derselben Paragraphen für die geometrischen Progressionen, indem man je 3 der 5 Buchstaben als gegeben betrachtet, die beiden übrigen wirklich finden, indem man die Gleichungen auflöst. Dann erhält man:

Für die arithmetischen Progressionen

1) $u=a+(n-1)d$;

2) $s=(a+u)\frac{n}{2}$;

3) $u=\frac{2s-na}{n}$;

4) $s=[2a+(n-1)d]\cdot\frac{n}{2}$;

5) $u=\frac{2s+n(n-1)d}{2n}$;

6) $s=[2u-(n-1)d]\cdot\frac{n}{2}$;

7) $u=\frac{-d\pm\sqrt{(2a-d)^2+8ds}}{2}$;

8) $s=\frac{(u-a+d)(u+a)}{2d}$;

9) $a=u-(n-1)d$;

10) $d=\frac{2(s-an)}{n(n-1)}$;

11) $a=(2s-nu):n$;

12) $d=\frac{(u+a)(u-a)}{2s-(u+a)}$;

13) $a=\frac{2s-n(n-1)d}{2n}$;

14) $d = \frac{2(nu-s)}{n(n-1}$;

15) $a = \frac{d \pm \sqrt{(2u+d)^2-8ds}}{2}$;

16) $d = \frac{u-a}{n-1}$;

17) $n = \frac{u-a+d}{d}$;

18) $n = \frac{-(2a-d) \pm \sqrt{(2a-d)^2+8ds}}{2}$;

19) $n = \frac{(2u+d) \pm \sqrt{(2u+d)^2-8ds}}{2d}$;

20) $n = \frac{2s}{a+u}$.

Für die geometrischen Progressionen würde man ebenfalls 20 aufgelöste Gleichungen erhalten, welche aber zum Theil höhere Gleichungen vom nten Grade, zum Theil sogar transcendente Gleichungen sind, von denen wir einige in dem nächsten Kapitel behandeln werden. — Die einfachern Resultate mögen jedoch hier stehen.

1) $u = ad^{n-1}$, 2) $s = \frac{du-a}{d-1}$,

3) $a = \frac{u}{d^{n-1}}$, 4) $s = \frac{a(d^n-1)}{d-1}$,

5) $u = \frac{ds-s+a}{d}$, 6) $d = \frac{s-a}{s-u}$,

7) $a = du+s-ds$, 8) $d = \sqrt[n-1]{(u:a)}$.

§. 232. Erklärung.

In der einfachen arithmetischen Reihe (§. 228.) bilden die Unterschiede zwischen jedem Gliede und dem nächstvorhergehenden eine neue Reihe lauter gleicher Glieder.

Ist aber eine Reihe von Zahlen

1) a, b, c, d, e, f, etc. etc.

so gedacht, daß die Unterschiede

2) b—a, c—b, d—c, e—d, f—e, etc. etc.

noch nicht gleich werden, sondern daß, wenn man von dieser

2ten Reihe, wiederum die Unterschiede der Glieder nimmt, wodurch diese neue Reihe entsteht

3) c—2b+a, d—2c+b, e—2d+c, etc. etc.,

und von dieser Reihe nochmals die Unterschiede der Glieder nimmt, und wenn man so fortfährt, immer neue und neue Differenzreihen auseinander abzuleiten, gerade so wie die 2te aus der 1ten gegebenen Reihe abgeleitet ist, daß dann endlich die mte abgeleitete Differenzreihe (also wenn man die gegebene mitzählt, die m+1te Reihe) lauter gleiche Glieder erhält, so nennt man diese Reihe (1.) eine arithmetische Progression der mten Ordnung (während natürlich die (§. 228.) definirte einfache arithmetische Reihe, eine arithmetische Reihe der 1ten Ordnung genannt werden kann.).

Note. So bilden die Zahlen

1) 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, etc.

eine arithmetische Reihe oder Progression der 3ten Ordnung; denn die erste Differenzreihe ist

2) 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, etc. etc.;

die zweite Differenzreihe ist dagegen

3) 12, 18, 24, 30, 36, 42, etc. etc.

und die dritte Differenzreihe ergiebt sich nun:

4) 6, 6, 6, 6, 6, etc. etc.

und diese 3te Differenzreihe besteht in der That aus lauter gleichen Glieder.

§. 233. Lehrsätze.

Sind $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots x_n$, etc. etc. die Glieder einer arithmetischen Progression der mten Ordnung, und

$$d_1x_1,\ d_2x_1,\ d_3x_1,\ d_4x_1,\ d_5x_1,\ \ldots\ d_mx_1$$

die ersten Glieder ihrer m auf einander folgenden Differenzreihen. Bezeichnet überhaupt d_qx_p das pte Glied der qten Differenzreihe, und $S.x_n$ die Summe der n ersten Glieder der gegebenen Reihe, so hat man allemal

1) $x_n = x_1 + (n-1).d_1x_1 + (n-1)_2.d_2x_1 + (n-1)_3.d_3x_1 + + (n-1)_4.d_4x_1 + \ldots + (n-1)_m.d_mx_1.$

2) $S.x_n = n.x_1 + n_2.d_1x_1 + n_3.d_2x_1 + \ldots + n_{m+1}.d_mx_1,$

wo $(n-1)_2$, $(n-1)_3$, etc. eben so n_2, n_3, etc. etc.

nichts anders seyn sollen, als die (§. 131.) erklärten Binomial-Coefficienten (der $(n-1)^{ten}$ und der n^{ten} Potenz).

Beweise. Man denke sich zuerst eine einfache arithmetische Reihe wo $m=1$. Für diesen besondern Fall reduciren sich die Gleichungen (1. und 2.), weil hier

$$d_2x_1 = d_3x_1 = d_4x_1 = \text{etc. etc.} = 0$$

ist, auf

$$x_n = x_1 + (n-1).d_1x_1$$

und

$$S.x_n = n.x_1 + n_2.d_1x_1,$$

welche genau mit den Gleichungen (§. §. 229. 230. n. 1. und n. 2.) übereinstimmen, wenn man bedenkt, daß, was dort durch a, d, u, s vorgestellt wurde, hier beziehlich durch x_1, d_1x_1, x_n, $S.x_n$ bezeichnet worden ist, und daß n_2 den Binomial-Coefficienten $\frac{n(n-1)}{2}$ bedeutet.

Beweisen wir nun noch, daß die Gleichungen (1. und 2.) allemal für jede folgende Ordnung gelten müssen, sobald sie für irgend eine Ordnung zutreffen, so folgt, weil sie gelten für die 1te Ordnung, daß sie auch gelten für die 2te Ordnung, und dann aus demselben Grunde auch für die 3te, und hernach wiederum für die nächstfolgende 4te Ordnung, u. s. w. f.; zuletzt für jede Ordnung.

Nehmen wir daher an, daß die Gleichungen (1. und 2.) für irgend eine bestimmte r^{te} Ordnung gelten, und beweisen wir, daß dann dieselben Gleichungen gelten müssen, wenn $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ die Glieder der nächstfolgenden $(r+1)^{ten}$ Ordnung sind.

Sind aber $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n \ldots$ von der $(r+1)^{ten}$ Ordnung, so bildet ihre erste Differenzreihe

$$d_1x_1, d_1x_2, d_1x_3, \ldots d_1x_{n-1}, d_1x_n \ldots$$

nothwendig eine arithmetische Reihe der nächstniedrigern (r^{ten}) Ordnung. Und weil für letztere Ordnung die Gleichungen (1. und 2.) gelten sollen, so steht fest, wenn man bedenkt, daß die Glieder der Differenzreihen mit

$$d_2x_1,\ d_3x_1 \ldots d_{r+1}x_1$$

anfangen, daß man also statt der obigen

$$\frac{x_1,\ d_1x_1,\ d_2x_1,\ d_3x_1,\ \text{etc. etc.}}{dx_1,\ d_2x_1,\ d_3x_1,\ d_4x_1,\ \text{etc. etc.}}$$

hier setzen muß, und wenn man gerne $n-1$ statt n setzt, daß

$$3)\ d_1x_{n-1} = d_1x_1 + (n-2).d_2x_1 + (n-2)_2.d_3x_1 + (n-2)_3.d_4x_1 + \ldots + (n-2)_r.d_{r+1}x_1$$

$$4)\ S.d_1x_{n-1} = (n-1).d_1x_1 + (n-1)_2.d_2x_1 + (n-1)_3.d_3x_1 + \ldots + (n-1)_{r+1}.d_{r+1}x_1.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= d_1x_1 \\ x_3 - x_2 &= d_1x_2 \\ x_4 - x_3 &= d_1x_3 \\ x_n - x_{n-1} &= d_1x_{n-1}; \end{aligned}$$

folglich, wenn man links und rechts addirt

$$5)\quad x_n = x_1 + S.d_1x_{n-1};$$

und dies giebt aus (4.) für x_n gerade die Formel (1.) des Lehrsatzes für diese Reihe der $r+1^{\text{ten}}$ Ordnung. Also gilt diese Formel (1.) des Lehrsatzes für jede Ordnung.

Um nun die Formel (2.) des Lehrsatzes ebenfalls für jede Ordnung darzuthun, denke man sich

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \ldots x_{n-1},\ x_n, \ldots.$$

wäre eine Reihe der m^{ten} Ordnung, und werde als 1te Differenzreihe betrachtet einer Reihe der nächsten $m+1^{\text{ten}}$ Ordnung, deren Glieder durch

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4, \ldots y_{n-1},\ y_n,\ y_{n+1} \ldots$$

vorgestellt seyn mögen, so hat man wie in (n. 5.)

$$y_n = y_1 + S.x_{n-1} \quad \text{oder} \quad 6)\ y_{n+1} = y_1 + S.x_n.$$

Aber aus (1.), welche Gleichung bereits für jede Ordnung erwiesen ist, folgt, wenn $n+1$ statt n gesetzt wird, und $x_1,\ d_1x_1,\ d_2x_1$ etc. statt beziehlich $d_1x_1,\ d_2x_1,\ d_3x_1$, etc.

$$7)\ y_{n+1} = y_1 + n.x_1 + n_2.d_1x_1 + n_3.d_2x_1 + n_4.d_3x_1 + \ldots + n_{m+1}.d_mx_1$$

woraus dann, wenn man diesen Werth für y_{n+1} in (6.) sub-

stituirt, augenblicklich die Formel (2.) für jede beliebige Ordnung sich ergiebt.

Beispiel 1. Die Summe der n ersten Quadratzahlen 1, 4, 9, 16, 25, etc. etc. zu bestimmen. Die Differenzreihen sind hier

3, 5, 7, 9, etc.
2, 2, 2, etc.

also $x_1 = 1,\ d_1x_1 = 3,\ d_2x_1 = 2,\ d_3x_1 = 0 = d_4x_1 = $ etc. etc.

Folglich nach (2.):

$$S.x_n = n.1 + n_2.3 + n_3.2 = n + 3.\frac{n(n-1)}{2} + 2.\frac{n(n-1)(n-2)}{2.\ 3}$$

$$= \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

während $x_n = n^2$ ist.

Beispiel 2. Die Summe der n ersten Kubikzahlen zu finden. —

Hier ist

Reihe 1, 8, 27, 64, 125, etc. etc.
1te Diff. Reihe 7, 19, 37, 61, etc. etc.
2te ″ ″ 12, 18, 24, etc. etc.
3te ″ ″ 6, 6, etc. etc.

Also $x_1 = 1,\ d_1x_1 = 7,\ d_2x_1 = 12,\ d_3x_1 = 6,\ d_4x_1 = 0,$ etc. etc.

und $$S.x_n = n.1 + n_2.7 + n_3.12 + n_4.6 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

d. h. $S.x_n = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = [(n+1)_2]^2$ und $x_n = n^3$.

Anmerkung. Man findet, daß jedesmal die pten Potenzen der ersten natürlichen Zahlen, also

$$1^p,\ 2^p,\ 3^p,\ 4^p,\ \ldots\ n^p$$

eine arithmetische Reihe der pten Ordnung bilden; daher kann die Formel (2.) des Lehrsatze allemal angewandt werden, um einen allgemeinen Ausdruck in n zu finden, welcher die Summe der n ersten Glieder dieser Reihe liefert, welche Zahl man nachher auch statt n setzen mag; wie dies in den vorliegenden Beispielen für $p = 2$ und $p = 3$, geschehen ist.

Eben so findet man, daß bei dem Aufschichten der Kanonenkugeln, wie solches gewöhnlich statt hat, die Zahl der Kugeln in den einzelnen Schichten eine arithmetische Reihe einer höhern Ordnung bilden, daher die Summe aller Schichten, so wie die Zahl der Kugeln in der nten Schicht, ebenfalls nach unsern Formeln (§. 233. nn. 1. und 2.) gefunden werden können.

Note. Sey z. B. ein Kugelhaufen mit einer rechteckigen Grundlage aufgeschichtet, in der obersten Schicht liegen 3 Stück einzeln neben einander, in allem sind 11 Schichten über einander gelegt, wieviel liegen in der untersten Schicht, und wieviel im ganzen Haufen? —

In der 1ten, 2ten, 3ten, 4ten, etc. Schicht liegen
nothwendig 3, 2.4, 3.5, 4.6, ...
d. h. 3, 8, 15, 24, etc. Kugeln; also die
Differenzreihen

5, 7, 9, etc.
2, 2, etc.

Also $x_I = 3,\quad d_1 x_I = 5,\quad d_2 x_I = 2,$ und

$$x_n = 3 + (n-1)5 + (n-1)_2 \cdot 2 = n^2 + 2n = n(n+2),$$

$$S.x_n = n.3 + n_2.5 + n_3.2 = \frac{n(n+1)(2n+7)}{2.3},$$

wo x_n die Zahl der Kugeln in der nten Schicht, $S.x_n$ aber die Zahl der Kugeln in allen n Schichten von oben herab gezählt bedeutet. Für $n = 11$ erhält man dann

$$x_{II} = 11 \cdot 13 = 143 \quad \text{und} \quad S.x_{II} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 29}{2.3} = 638,$$

so daß in der untersten 11ten Schicht 143, im ganzen Haufen aber 638 Kugeln liegen.

Wie endlich die Länge der Seiten seyn mag in dem Rechteck der Grundfläche, so werden die einzelnen Schichten doch immer eine arithmetische Reihe der 2ten Ordnung nur bilden, so daß 3 erste Glieder ausreichen um $d_1 x_1$ und $d_2 x_1$ zu bestimmen, nebst x_1.

§. 234. Erklärung.

Denkt man sich zuerst die Reihe der natürlichen Zahlen

I. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...

hingeschrieben, und daraus neue Reihen dergestalt auseinander gebildet, daß jedes rte Glied der folgenden Reihe allemal die Summe der r ersten Glieder der nächstvorhergehenden Reihe ist; — bildet man sich also die Reihen

II. 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, etc. etc.
III. 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, etc. etc.
IV. 1, 5, 15, 35, 70, 126, etc. etc.
V. 1, 6, 21, 56, 126, etc. etc.
VI. 1, 7, 28, 84, etc. etc.
VII. 1, 8, 36, etc. etc.
VIII. 1, 9, etc. etc.

so nennt man jede dieser Reihen, eine figurirte Reihe, oder eine Reihe der figurirten Zahlen, und zwar von

der m^{ten} Ordnung, wenn sie als arithmetische Reihe selbst zur m^{ten} Ordnung gehört.

§. 235. Zusatz.

Die Reihe der figurirten Zahlen der m^{ten} Ordnung, hat zu ihren Differenzreihen die figurirten Reihen der nächstvorhergehenden Ordnungen, nur mit dem Unterschied, daß das erste Glied der 1ten, 2ten, 3ten, 4ten, u. s. w. r^{ten} Differenzreihe allemal das 2te, 3te, 4te, 5te, etc. etc. $r+1^{te}$ Glied der figurirten Reihen, beziehlich der

$$m-1^{ten},\ m-2^{ten},\ m-3^{ten},\ m-4^{ten},\ \text{etc.}\ m-r^{ten}$$

Ordnung seyn wird.

Wendet man daher den Lehrsatz und die Bezeichnung (§. 233.) auf diese Reihen an, so erhält man:

für die Reihe I. $x_n = n$ u. $S.x_n = \frac{n(n+1)}{2} = (n+1)_2$;

" " II. $x_n = (n+1)_2$ u. $S.x_n = (n+2)_3$;

" " III. $x_n = (n+2)_3$ u. $S.x_n = (n+3)_4$;

" " IV. $x_n = (n+3)_4$ u. $S.x_n = (n+4)_5$;

u. s. w. f.; und allgemein für die Reihe der m^{ten} Ordnung

$$x_n = (n+m-1)_m \quad \text{und} \quad S.x_n = (n+m)_{m+1}.$$

Anmerkung 1. Man versteht auch zuweilen unter figurirter Zahlenreihe, bloß die arithmetische Reihe der zweiten Ordnung

$$1,\ m,\ 3m-3,\ 6m-8,\ 10m-15,\ \text{etc. etc.},$$

deren erste Differenzreihe die einfache Reihe

$$m-1,\ 2m-3,\ 3m-5,\ 4m-7,\ \text{etc. etc.}$$

ist, welche Zahl m nur immer seyn mag. — Und weil hier, wenn man den Lehrsatz (§. 233.) anwenden will,

$$x_1 = 1,\ d_1x_1 = m-1, \quad \text{und} \quad d_2x_1 = m-2$$

ist, so findet sich für diese Reihe

$$x_n = \frac{(m-2)n-(m-4)}{2}.n$$

und $$S.x_n = n+n_2.(m-1)+n_3.(m-2).$$

Anmerkung 2. Es giebt auch eine unendliche Menge von Zahlenreihen, die weder eine arithmetische Reihe irgend einer höhern Ordnung

bilden, noch eine geometrische Reihe, sondern die nach einem eigenen verschiedenen Gesetze fortgehen. Von diesen wollen wir nur noch einige besondere in elementaren Untersuchungen zuweilen vorkommende Arten behandeln.

§. 236. Aufgabe.

Die Summe der ersten n Glieder der Reihe

$$a,\ (a+d)p,\ (a+2d)p^2,\ (a+3d)p^3,\ \text{etc.}$$

deren ntes Glied (welches durch u bezeichnet seyn kann) $=[a+(n-1)d]p^{n-1}$ ist, sey durch S bezeichnet. Man soll einen Ausdruck für S finden.

Auflösung. Es ist

1) $S=a+(a+d)p+(a+2d)p^2+\ldots+[a+(n-1)d]p^{n-1}$;

folglich, wenn man mit p multiplicirt:

2) $pS=ap+(a+d)p^2+\ldots+[a+(n-2)d]p^{n-1}$
$\qquad\qquad +[a+(n-1)d]p^n.$

Und wenn nun die obere Gleichung von der untern subtrahirt wird,

3) $(p-1)S=[a+(n-1)d]p^n-a-d(p+p^2+\ldots+p^{n-1})$

4) $S=\dfrac{[a+(n-1)d]p^n-a}{p-1}-dp\cdot\dfrac{p^{n-1}-1}{(p-1)^2}.$

Beispiel. Die Summe S der ersten n Glieder der Reihe

$$1,\ 2p,\ 3p^2,\ 4p^3,\ \ldots\ np^{n-1},\ \ldots$$

wird daher, weil hier $a=1$, $d=1$,

$$S=\frac{n\cdot p^n-1}{p-1}-p\cdot\frac{p^{n-1}-1}{(p-1)^2}=\frac{n\cdot p^n}{p-1}-\frac{p^n-1}{(p-1)^2}.$$

§. 237. Aufgabe.

Die Summe S der ersten n Glieder der Reihe

$$a,\ (2a+d)p,\ (3a+3d)p^2,\ \ldots\ (na+n_2\cdot d)p^{n-1}$$

zu finden (wo n_2 den Binomial-Coefficienten $\frac{n(n-1)}{2}$ bedeutet).

Auflösung. Man hat

$$S=a+(2a+d)p+(3a+3d)p^2+\ldots+(na+n_2\cdot d)p^{n-1}$$

also, wenn man mit p multiplicirt und subtrahirt

$$(p-1)S = (na+n_2 . d)p^n - (a+(a+d)p+(a+2d)p^2+\ldots [a+(n-1)d]p^{n-1}).$$

Da nun der Subtrahend hier gerade die (§. 236.) behandelte Reihe wieder ist, so erhält man hieraus sogleich

$$S = \frac{(na+n_2 . d)p^n}{p-1} - \frac{[a+(n-1)d]p^n - a}{(p-1)^2} + dp . \frac{p^{n-1}-1}{(p-1)^3}.$$

Beispiel. Die Summe der ersten n Glieder der Reihe

$$1,\ 3p,\ 6p^2,\ 10p^3,\ \ldots\ (n+1)_2\ p^{n-1}$$

wird daher, weil hier $a=1$, $a+d=2$, also $d=1$ ist (auch

$$na+n_2 d = n . 1 + n_2 . 1 = n+n_2 = n+\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = (n+1)_2\Big),$$

$$S = \frac{(n+1)_2 . p^n}{p-1} - \frac{n . p^n}{(p-1)^2} + \frac{p^n-1}{(p-1)^3}.$$

Anmerkung 1. Die Summe von n ersten (oder von allen) Gliedern irgend einer Reihe, als einen Ausdruck angeben, der n enthält, nennt man: die Reihe summiren. Das n^{te} Glied x_n, in so ferne es als ein Ausdruck hergestellt ist, der n enthält, nennt man auch das allgemeine Glied, und der für $S.x_n$ d. h. für die Summe der ersten n Glieder gefundene Ausdruck wird dagegen wohl auch zuweilen das summatorische Glied genannt.

Anmerkung 2. Die letztere Methode, Reihen zu summiren, wird sich allemal anwenden lassen, wo, wie hier, die Reihen entstanden sind, wenn man eine arithmetische Reihe irgend einer Ordnung und eine geometrische Reihe unter einander geschrieben sich denkt, und dann die unter einander stehenden Glieder mit einander multiplicirt. — Für andere Reihen, die nach einem andern Gesetze gebildet sind, würden natürlich auch andere Methoden in Anwendung gebracht werden müssen, wenn sie summirt werden sollen.

Anmerkung 3. Der Bruch $\frac{1}{n}$ wird desto kleiner, je größer n wird, und nähert sich immer mehr der Null, je größer n gedacht wird. Man kann daher sagen für n unendlich groß (dafür gebraucht man das Zeichen ∞) werde $\frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$; und man versteht nichts weiter darunter, als je größer n gedacht wird, desto weniger wird man

fehlen, wenn man $\frac{1}{n}=0$ setzt. Ist ferner p eine ächt gebrochene Zahl, also <1, so ist $p^2<p$ und $p^3<p^2$, u. s. w. f.; d. h. die Werthe von p^2, p^3, p^4, p^5, p^6, p^7, etc. etc. werden nach der Reihe immer kleiner und kleiner, so daß p^n sich desto mehr der 0 (Null) nähert, je größer n wird. *) — Auch hier kann man daher sagen, daß für $n=\infty$, $p^n=0$ werde; und auch hier versteht man nichts weiter darunter, als daß der Fehler, den man dadurch begeht, daß man $p^n=0$ setzt, desto geringer und unbedeutender sey, je größer n gedacht wird.

Dieser Sätze kann man sich aber bedienen, wenn man aus der Formel, welche die Summe der n ersten Glieder irgend einer Zahlenreihe angiebt, die Summe von unendlich vielen ersten Gliedern derselben Reihe finden will (für den Fall versteht sich, daß die Summe dieser unendlich vielen Glieder wirklich einen endlichen, angebbaren Werth habe, was nicht bei jeder beliebigen Reihe allemal der Fall seyn wird.). Man darf zu dem Ende nur den Zähler und Nenner des für die Summe S der n ersten Glieder gefundenen Ausdrucks durch n so lange wegdividiren (§. 38.), bis n als Faktor nirgends mehr, sondern überall nur $\frac{1}{n}$ als Faktor vorkommt, dann $\frac{1}{n}$ und p^n, wenn $p<1$ ist, der Null gleich setzen, und man wird die Summe von unendlich vielen Gliedern haben, weil eben jetzt $n=\infty$ gedacht worden ist.

Für die Summe aller Glieder der unendlichen Reihe

$$a+ad+ad^2+ad^3+ad^4+\ldots$$

erhält man z. B. aus (§. 231.) oder besser noch aus (§. 231. Anmerk. 2.) nehmlich aus $S=\frac{ad^n-a}{d-1}$; für $n=\infty$ und $d<1$, ohne weiters $S=\frac{-a}{d-1}$ oder $S=\frac{a}{1-d}$.

Für die Summe aller Glieder der als unendlich gedachten Reihe des (§. 236.) erhält man dagegen aus (n. 4.), weil für $p<1$ auch

---

*) Ist nehmlich $p<1$, so kann man $p=\frac{1}{1+z}$ setzen, und z muß positiv seyn. Dann ist nach (§. 131.)

$$p^n=\frac{1}{(1+z)^n}=\frac{1}{1+nz+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}z^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}z^3+\ldots}$$

also für $n=\infty$, $p^n=\frac{1}{\infty}=0$, in dem hiesigen Sinne genommen.

$np^n=0$ *) gesetzt werden kann, sobald $n=\infty$ gedacht wird,

$$S=\frac{a}{1-p}+\frac{dp}{(1-p)^2}.$$

Für die Summe aller Glieder der als unendlich gedachten Reihe des (§. 237.) erhält man durch ähnliche Betrachtungen

$S=\frac{a}{(1-p)^2}+\frac{dp}{(1-p)^3}$, wenn nur jedesmal $p<1$ ist.

§. 238. Erklärung.

Hat man für irgend eine Zahlenreihe einen allgemeinen Ausdruck für das nte Glied der Reihe, welcher den Buchstaben n enthält, und welcher deshalb durch f(n) bezeichnet seyn mag, so erhält man aus ihm z. B. das 5te Glied der Reihe, wenn man 5 statt n setzt; dagegen das 6te Glied, wenn $n=6$ gesetzt wird, in dem nten Gliede f(n). — Wenn man aber nach und nach in f(n) auch die gebrochenen Zahlen $5\frac{1}{4}$, $5\frac{2}{4}$, $5\frac{3}{4}$, statt n setzt, so erhält man jedesmal einen besondern Werth für f(n), also 3 neue Werthe; und von diesen sagt man: „sie seyen zwischen dem 5ten und 6ten Gliede eingeschaltet" oder interpolirt.

§. 239. Zusatz.

Sollen also in irgend einer gegebenen Zahlenreihe zwischen dem mten und m+1ten Gliede noch q Glieder eingeschaltet werden, so finde man zuerst für das nte Glied der Reihe den allgemeinen Ausdruck f(n), und setze in selbigem statt n nach und nach

---

*) Ist nehmlich $p<1$, so kann man $p=\frac{1}{1+z}$ setzen, und z muß positiv seyn. Dann ist

$$np^n=\frac{n}{(1+z)^n}=\frac{n}{1+nz+\frac{n(n-1)}{1.2}z^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}z^3+\ldots}$$

nach (§. 131.). Und wenn man hier Zähler und Nenner durch n wegdividirt, $np^n=0$ für $n=\infty$, in dem obigen Sinne genommen.

$$m+\frac{1}{q+1},\quad m+\frac{2}{q+1},\quad m+\frac{3}{q+1},\quad m+\frac{4}{q+1}$$

u. s. w. s. bis zuletzt $m+\frac{q}{q+1}$; und man hat die verlangte Anzahl q der eingeschalteten oder interpolirten Glieder.

Beispiel 1. Zwischen dem 8ten und 9ten Gliede der geometrischen Reihe 2, 6, 18, 54, 162, etc. etc. noch 5 Glieder einzuschalten. — Hier ist, wenn man diese Reihe mit der allgemeinen des (§. 228.) vergleicht $a=2$, $d=3$ und das nte Glied $f(n)=2.3^{n-1}$ und daraus die 5 zwischen dem 8ten und 9ten Gliede eingeschalteten Glieder, wenn man nach und nach $8\frac{1}{6}$, $8\frac{2}{6}$, $8\frac{3}{6}$, $8\frac{4}{6}$ und $8\frac{5}{6}$ statt n setzt, so daß man erhält

$$2.3^{7\frac{1}{6}},\quad 2.3^{7\frac{1}{3}},\quad 2.3^{7\frac{1}{2}},\quad 2.3^{7\frac{2}{3}},\quad 2.3^{7\frac{5}{6}}$$ oder

$$2.3^{7}\sqrt[6]{3},\quad 2.3^{7}\sqrt[3]{3},\quad 2.3^{7}\sqrt{3},\quad 2.3^{7}\sqrt[3]{3^2},\quad 2.3^{7}\sqrt[6]{3^5},$$

(Kap. 3.), während das 8te Glied selbst 2.3^7, das neunte dagegen 2.3^8 ist.

Beispiel 2. Zwischen dem 3 und 4ten Gliede einer einfachen arithmetischen Reihe 2, 5, 8, 11, 14, 17, etc. etc., ein einziges Glied einzuschalten. — Vergleicht man diese Reihe mit der allgemeinen des (§. 228.), so hat man hier $a=2$, $d=3$, und $f(n)=2+(n-1)3$ (§. 239.) d. h. $f(n)=3n-1$; und nun das eingeschaltete Glied (indem $n=3\frac{1}{2}$ gesetzt wird) $=3.(3\frac{1}{2})-1=9\frac{1}{2}$.

Sollten aber 6 Glieder eingeschaltet werden, zwischen dem 3ten und 4ten Gliede dieser Reihe, so würde man nach und nach in $f(n)$, $3\frac{1}{7}$, $3\frac{2}{7}$, $3\frac{3}{7}$, $3\frac{4}{7}$, $3\frac{5}{7}$ und $3\frac{6}{7}$ statt n setzen, und dann die eingeschalteten Glieder

$$8\frac{3}{7},\quad 8\frac{6}{7},\quad 9\frac{2}{7},\quad 9\frac{5}{7},\quad 10\frac{1}{7},\quad 10\frac{4}{7}$$ erhalten. *)

Anmerkung 1. Das Einschalten oder Interpoliren von beliebig viel Gliedern, zwischen zwei bestimmten Gliedern einer gegebenen Reihe, ist daher ein sehr leichtes Geschäft, sobald für die gegebene Reihe der allgemeine Ausdruck $f(n)$ für das nte Glied bekannt ist. In jeder dahin zielenden Aufgabe muß man daher dieses nte Glied $f(n)$ vor allen Dingen bestimmen. —

---

*) Bei einer einfachen arithmetischen Progression geschieht also das Einschalten von q Gliedern dadurch, daß man den Unterschied d durch $q+1$ dividirt, und diesen Quotienten $\frac{d}{q+1}$ als den Unterschied für die einzuschaltenden Glieder nimmt.

Und gelingt es nicht, für eine gegebene Zahlenreihe den allgemeinen Ausdruck f(n) für das n^{te} Glied derselben zu finden, so kann man auch nicht eher interpoliren oder einschalten, als bis man für die ganze Reihe, oder doch wenigstens für die 2 Glieder zwischen denen die neuen eingeschaltet werden sollen, einen solchen allgemeinen Ausdruck f(n) angenommen hat, als dasjenige Gesetz nach welchem man die eingeschalteten Glieder bilden will.

Anmerkung 2. Hat man den allgemeinen Ausdruck f(n) für das n^{te} Glied einer gegebenen Reihe, so kann man auch nach und nach $n=0$, $n=-1, -2, -3, -4, -5$, u. s. w. f. setzen, erhält jedesmal einen Werth von f(n), und diese Glieder bilden eine neue Reihe, welche man als eine rückwärts statt gehabte Fortsetzung der gegebenen Zahlenreihe betrachtet. Dieses ist erlaubt, sobald man solches als Definition hinstellt.

So giebt z. B. die geometrische Reihe

$$a, ad, ad^2, ad^3, ad^4, \ldots$$

zum n^{ten} Gliede f(n) den Ausdruck ad^{n-1}. Setzt man nun hier nach und nach $n=0, -1, -2, -3$, etc. etc., so erhält man

$$ad^{-1}, ad^{-2}, ad^{-3}, ad^{-4}, ad^{-5}, \text{ etc. etc.}$$

oder $$\frac{a}{d}, \frac{a}{d^2}, \frac{a}{d^3}, \frac{a}{d^4}, \frac{a}{d^5}, \text{ etc. etc.,}$$

welche Glieder man sich nun mit der obigen Reihe in Verbindung gebracht denken kann, wie folgt:

$$\ldots\ldots \frac{a}{d^3}, \frac{a}{d^2}, \frac{a}{d}, a, ad, ad^2, ad^3, \ldots\ldots,$$

so nehmlich, daß die zweite rückwärts genommen als eine Fortsetzung der ersten erscheint.

Schluß-Anmerkung.

Wir bitten aber hier wiederholt zu bemerken, wie diese letztern Kapitel die zu behandelnden Gegenstände nur kurz berühren sollen, wie daher eine gründlichere und vollständigere Behandlung dieser Gegenstände aus andern Schriften entnommen werden muß.

Arithmetik.

Sechzehntes Kapitel.

Von den Logarithmen. Anwendung derselben zur numerischen Berechnung gegebener Ausdrücke.

§. 240. Bemerkung.

Nimmt man für a irgend eine absolute (positive) Zahl die größer als 1 ist, so hat man $a^0 = 1$ und $a^h > 1$, sobald nur h positiv ist, übrigens noch so klein. — Denkt man sich daher in a^x statt x nach und nach 0 und alle auf einander folgenden ganzen und gebrochenen positiven Zahlen gesetzt, d. h. läßt man x von 0 an stetig wachsen, jedesmal um eine noch so kleine (positive) Zahl h, so hat man, wenn m und $m+h$, zwei auf einander folgende Werthe von x sind, $a^{m+h} = a^m . a^h$, und weil $a^h > 1$ ist, auch $a^{m+h} > a^m$; d. h., so wie der Exponent x nach und nach von 0 an stetig wächst, so wächst die Potenz a^x von 1 an stetig fort, so daß während x immer größer und größer gedacht wird, auch a^x immer größer und größer werden muß, dabei, wie sich von selbst versteht, immer positiv bleibt.

Setzt man aber für x eine negative Zahl $-y$ (wo also y selbst positiv ist), so hat man (§. 75.):

$$a^x = a^{-y} = \frac{1}{a^y}.$$

So wie man also die Werthe von x von 0 an stetig abnehmen (d. h. negativ wachsen) läßt, so wird a^y von 1 an immer größer und größer (und immer größer wie 1) also $\frac{1}{a^y}$ d. h. a^x von 1 an immer kleiner und kleiner, bleibt aber immer positiv. *)

Wird also a als eine beliebige aber bestimmte absolute (positive) Zahl genommen und >1, so wird für jede (positive) Zahl b die größer als 1 ist, ein einziger reeller ebenfalls positiver Werth von x existiren, so daß $a^x = b$ wird; und für jede ebenfalls positive aber ächt gebrochene Zahl c (d. h. für jede positive Zahl c die kleiner als 1 ist) wird dann auch nur ein einziger reeller, aber negativer Werth von x existiren, so daß $a^x = c$ wird.

§. 241. Erklärung.

Immer unter der Voraussetzung, daß a eine absolute (positive) Zahl und >1 ist, bezeichnen wir von nun an die unbekannte aber allemal existirende positive Zahl, welche statt x gesetzt bewirkt, daß $a^x = b$ wird, durch $\overset{a}{log}\, b$ und nennen solchen Ausdruck einen Logarithmen, und zwar den Logarithmen von b für die Basis a; die Zahl b selbst heißt der Logarithmand, zuweilen die Zahl schlechthin.

Note. So stellt z. B. $\overset{2}{log}\, 8$ die Zahl vor, welche statt x gesetzt $2^x = 8$ macht, also die Zahl 3; eben so ist $\overset{10}{log}\, 10000 = 4$, $\overset{10}{log}\, 100 = 2$, $\overset{10}{log}\, 10 = 1$, $\overset{10}{log}\, 1 = 0$, $\overset{2}{log}\, 2 = 1$, $\overset{2}{log}\, 1 = 0$, $\overset{2}{log}\, 16 = 4$, $\overset{3}{log}\, 81 = 4$, $\overset{5}{log}\, 125 = 3$, $\overset{4}{log}\, 16 = 2$, $\overset{a}{log}\, 1 = 0$ (weil $a^0 = 1$).

---

*) Dies alles gilt aber nur wenn a positiv und >1 ist, weil nur dann a^h z. B. $a^{\frac{1}{1000}} = \sqrt[1000]{a}$ ebenfalls positiv und größer wie 1 seyn wird. (§. 71. und §. 64.).

§. 242. Zusatz.

Die Zahlen b, von deren Logarithmen hier die Rede ist, müssen also allemal absolute (positive) Zahlen seyn, weil nach (§. 240.), so lange die Basis a positiv und größer als 1 ist, jede negative und jede positive Zahl statt x gesetzt, den Werth von a^x allemal positiv macht. — Für jede absolute (positive) Zahl b dagegen, existirt allemal ein reeller Werth des Logarithmen $\overset{a}{log}\, b$, welcher positiv ist, wenn $b>1$, und negativ wenn $b<1$ und 0 (Null), wenn $b=1$.

§. 243. Zusatz.

Der Logarithme $\overset{a}{log}\, b$ bezeichnet also allemal die Zahl, mit welcher die Basis a potenzirt werden muß, wenn der Logarithmand b herauskommen soll.

Es ist daher nach der Definition (§. 241.) allemal

$$\text{I. } a^{(\overset{a}{log}\, b)}=b \quad \text{und} \quad \text{II. } \overset{a}{log}\,(a^{b})=b$$

Vergl. (§. §. 3—5. 27. 28. 64. und 65.).

§. 244. Lehrsätze.

Sind b und c beliebige positive Zahlen, a aber eine positive Zahl größer als 1, so hat man allemal:

1) $\overset{a}{log}\,(bc)=\overset{a}{log}\, b+\overset{a}{log}\, c$; oder $log\,(bc)=log\, b+log\, c$,

2) $\overset{a}{log}\left(\frac{b}{c}\right)=\overset{a}{log}\, b-\overset{a}{log}\, c$; oder $log\left(\frac{b}{c}\right)=log\, b-log\, c$,

3) $\overset{a}{log}\,(b^{c})=c.\overset{a}{log}\, b$; oder $log\,(b^{c})=c.log\, b$,

4) $\overset{a}{log}\,(\sqrt[c]{b})=\frac{\overset{a}{log}\, b}{c}$; oder $log\,(\sqrt[c]{b})=\frac{log\, b}{c}$,

indem man rechts aus dem Zeichen des Logarithmen die Basis a wegläßt, und sie, da sie immer dieselbe bleibt und willkührlich ist, bloß hinzudenkt.

Beweise. Man potenzire die Basis a mit den Aus-

drücken links und rechts in diesen zu erweisenden Gleichungen. In n. 1. erhält man links $a^{log\,(bc)}$ d. h. bc (nach §. 243. I.); rechts dagegen $a^{(log\,b + log\,c)}$ oder nach (§. 55.) $a^{log\,b} \times a^{log\,c}$ oder nach (§. 243. I.) b.c. — Und weil nun links und rechts dasselbe, nehmlich jedesmal bc herauskommt, so muß die Gleichung (n. 1.) nothwendig richtig seyn (nach §. 242.).

Potenzirt man ferner die Basis a mit den Ausdrücken links und rechts in der (n. 2.), so erhält man links $a^{log(b:c)}$ oder nach (§. 243. I.) bloß $\frac{b}{c}$; rechts aber $a^{log\,b - log\,c}$ oder nach (§. 56.) $a^{log\,b} : a^{log\,c}$ oder nach (§. 243. I.) b:c; also abermals links dasselbe, wie rechts, und die Gleichung (n. 2.) muß also auch richtig seyn (nach §. 242.).

In der dritten Gleichung, a mit den Ausdrücken links und rechts potenzirend, erhält man links $a^{log\,(b^c)}$ oder b^c; rechts dagegen $a^{c\,.\,log\,b}$ oder nach (§. 59.), $(a^{log\,b})^c$ oder nach (§. 243. I.) b^c; also die Gleichung (n. 3.) richtig nach (§. 242.).

Für die 4te Gleichung ergiebt sich links:

$a^{log\left(\sqrt[c]{b}\right)}$ oder $\sqrt[c]{b}$ (§. 243. I.); rechts dagegen $a^{\left(\frac{log\,b}{c}\right)}$ oder nach (§. §. 72. 70.) $\sqrt[c]{a^{log\,b}}$ oder nach (§. 243. I.) ebenfalls $\sqrt[c]{b}$; also auch diese Gleichung richtig.

Note. So ist z. B. $^{2}log\,(8.16) = {}^{2}log\,8 + {}^{2}log\,16$; nehmlich $^{2}log\,8 = 3$, $^{2}log\,16 = 4$, und $^{2}log\,(8.16) = {}^{2}log\,128 = 7$ und dieser letzte Werth 7 ist in der That die Summe 3+4 der beiden ersten Logarithmen-Werthe. — Ferner z. B. $^{2}log\,(4^3) = 3\,.\,{}^{2}log\,4$; nehmlich $^{2}log\,(4^3) = {}^{2}log\,64 = 6$, und $^{2}log\,4 = 2$, und in der That $6 = 3.2$.

Anmerkung. Wendet man dieselben Sätze (§. 244.) wiederholt an, so kann man noch leicht folgende Uebungs-Beispiele, die Verwandlungen Logarithmen enthaltender Ausdrücke betreffend, lösen:

1) $log\ (abc) = log\ a + log\ b + log\ c$; *)

2) $log\left(\frac{ab}{cdf}\right) = log\ a + log\ b - log\ c - log\ d - log\ f$;

3) $log\ (a^m . b) = m . log\ a + log\ b$;

4) $log\ (a^m . b^{-n} c^p) = m . log\ a - n . log\ b + p . log\ c$;

5) $log\left(\frac{a^{\frac{m}{n}} . c}{b^{\frac{p}{q}}}\right) = \frac{m}{n} log\ a + log\ c - \frac{p}{q} log\ b$;

6) $log\ (a\sqrt{b}) = log\ a + \frac{1}{2} log\ b$;

7) $log\left(\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt[3]{c+d}}\right) = log\ a + \frac{1}{2} log\ b - \frac{1}{3} log\ (c+d)$;

8) $log\left(\frac{a\sqrt[3]{c^2}}{\sqrt{d.e^3}}\right) = log\ a + \frac{2}{3} log\ c - \frac{1}{2} log\ d - \frac{3}{2} log\ e$;

9) $log\ \frac{1}{(a+b)^2 . \sqrt[3]{c^2+d^2}} = -2\ log\ (a+b) - \frac{1}{3} log\ (c^2+d^2)$;

10) $log\ \frac{1}{(a+b)^2 . \sqrt[3]{c^2-d^2}} = -2\ log\ (a+b) - \frac{1}{3} log\ (c+d) - \frac{1}{2} log\ (c-d)$,

weil $c^2 - d^2 = (c+d)(c-d)$ ist;

11) $log \sqrt[n]{a^2-b^2} = \frac{1}{n} log\ (a+b) + \frac{1}{n} log\ (a-b)$;

12) $log\ \frac{(1{,}05)^t . a}{(1{,}05)^t . b - 1} = log\ a + t . log\ (1{,}05) - log\ [(1{,}05)^t . b - 1]$;

13) $\frac{1}{2} log\ a + \frac{1}{3} log\ b = log\ (\sqrt{a} . \sqrt[3]{b})$;

14) $\frac{1}{2} log\ a - \frac{1}{3} log\ (b+c) = log\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b+c}}\right)$;

---

*) Es ist hier durchgehends vorausgesetzt, daß alle vorkommenden Logarithmen eine und dieselbe Basis haben, welche eben deshalb aus der Bezeichnung weggelassen wurde und überall noch hinzugedacht werden muß.

15) $\frac{1}{n} log\,(2a-5x)-\frac{2}{3} log\,b = log\left(\frac{\sqrt[n]{2a-5x}}{\sqrt[3]{b^2}}\right)$;

16) $\frac{1}{m} log\,(a-y)+\frac{1}{m} log\,(a+y) = log\sqrt[m]{a^2-y^2}$;

17) $log\,[k.(1+m)^t] = log\,k+t.log\,(1+m)$;

18) $log\,k-t.log\,(1+m) = log\left(\frac{k}{(1+m)^t}\right)$.

§. 245. Zusatz.

Sind für irgend eine Basis a (positiv und größer als 1, wie dies hier von jeder Basis vorausgesetzt wird) die Logarithmen-Werthe aller ganzen Zahlen gefunden, so kennt man auch zugleich die Logarithmen-Werthe aller gebrochenen Zahlen.

Denn ist $\frac{m}{n}$ eine gebrochene Zahl, und sind m und n ganze Zahlen, so ist nach (§. 244. n. 2.):

$$log\,\frac{m}{n} = log\,m - log\,n,$$

so daß, wenn *log* m und *log* n bekannt sind, auch *log* $\frac{m}{n}$ mit bekannt seyn wird.

Anmerkung. Der Logarithme eines ächten Bruches ist aber immer eine negative Zahl; während der Logarithme eines unächten Bruches positiv ist, wie bereits aus (§. 240. und §. 242.) besonders aber auch aus der vorliegenden Gleichung selbst zu ersehen ist.

§. 246. Erklärung.

Wenn man für alle ganzen (und somit auch für alle gebrochenen) Zahlen b als Logarithmanden genommen, für irgend eine und dieselbe Basis a, die Logarithmen-Werthe berechnet, so bilden sie zusammen ein Logarithmensystem. — Unter allen verschiedenen Logarithmensystemen pflegt

man das Dekadische, oder Brigg'sche (in so ferne Brigg dergleichen Logarithmen-Werthe zuerst berechnete) vorzüglich in den Elementar-Anwendungen zu gebrauchen (weshalb es auch das vulgarische oder gemeine genannt wird), dessen Basis die Zahl 10 ist.

Anmerkung. Man hat die für die Basis 10 berechneten Logarithmen-Werthe, von möglichst viel ganzen Zahlen in Tabellen dergestalt zusammengestellt, daß während die Basis, da sie ein für allemal 10 ist, nicht weiter vorkommt, der Logarithmand (die Zahl) und sein Logarithmen-Werth immer neben einander gefunden werden. — Von solchen Tabellen führen wir hier nur die von Vega, Schulze und Callet an, welche am häufigsten im Gebrauch sind.

Die Einrichtung solcher Tabellen muß aus ihrer Einleitung ersehen werden, und es ist der Ort hier nicht, solche näher zu beschreiben. Uns kommt es dagegen hier zu, aus den allgemeinen Sätzen der bisherigen (§. §.) die Eigenthümlichkeiten der Brigg'schen Logarithmen noch zu entwickeln, und die elementare Anwendung solcher Logarithmen-Tafeln, wie sie gewöhnlich statt findet, noch besonders nachzuweisen. — Zu dem Ende verstehen wir von jetzt an unter *log* b allemal den Brigg'schen Logarithmen.

§. 247. Lehrsatz.

Im Brigg'schen Logarithmen-System, besteht der Logarithmen-Werth einer jeden nziffrigen Zahl, allemal aus n—1 (ganzen) Einheiten, welche ganze Zahl die Kennziffer oder Karakteristik heißt, und noch aus einem ächten Bruche, welcher die Mantissa, oder in so ferne er gewöhnlich als Decimalbruch ausgedrückt wird, auch schlechthin die Decimalen genannt wird.

Beweis. Jede nziffrige Zahl liegt allemal zwischen 10^{n-1} und 10^n (z. B. 7649 zwischen 10^3 oder 1000 und 10^4 oder 10000). Ihr Logarithmen-Werth liegt also auch zwischen den Logarithmen-Werthen von 10^{n-1} und 10^n. — Nun ist aber nach (§. 243. II.):

$$log\,(10^{n-1}) = n-1 \quad \text{und} \quad log\,(10^n) = n,$$

folglich liegt der gedachte Logarithmen-Werth einer nziffrigen

Zahl, zwischen n—1 und n; ist also n—1 ganze Einheiten und noch ein ächter Bruch.

Note. So z. B. findet sich näherungsweise *log* 7=0,8450980; *log* 17=1,2304489; *log* 327=2,5145478; *log* 56749=4,7539582; *log* 7654629=6,8839241; alles näherungsweise genommen; wo in dem letztern Werthe, 6 die Kennziffer, dagegen 0,8839241 die Mantissa oder die Decimalen des Bruches sind.

Anmerkung. Die Kennziffer des Brigg'schen Logarithmen einer ganzen Zahl ist daher augenblicklich bekannt. Wie aber der ächte Bruch (die Mantissa) jedesmal gefunden werden könne, ist eine Aufgabe, die wir später erst betrachten wollen, im 17ten Kapitel.

§. 248. Lehrsatz.

Der Brigg'sche Logarithme jedes Decimalbruchs wird gefunden, wenn man von dem Logarithmen der durch das Weglassen des Komma entstehenden ganzen Zahl, so viel (ganze) Einheiten subtrahirt, als der Bruch Decimalstellen hat.

Z. B. *log* 437,6296=*log* (4376296)— 4.

Beweis. Denn es ist nach (§. 102.):

$$437{,}6296 = \frac{4376296}{10000};$$

also nach (§. 244. n. 2.):

log 437,6296=*log* (4376296)— *log* 10000.

Aber *log* 10000=*log* (10^4)=4; folglich

log (437,6296)=*log* (4376296)—4.

§. 249. Zusatz.

Ist der Decimalbruch z. B. 0,7643 ein ächter, so würde sein Logarithme negativ werden. In solchem Falle vermehrt man ihn aber lieber um 10, so daß man z. B. statt

log 0,7643=*log* 7643—4 lieber 10+ *log* 7643—4

d. h. 6+ *log* 7643 d. h. 9,8832639 nimmt, damit man immer bloß mit positiven Zahlen zu arbeiten habe. Man muß aber dann entweder im Gedächtniß behalten, daß man nun nicht mehr den wahren, sondern den um 10 zu groß genommenen Logarithmen-Werth habe; oder man verbindet

diese zuviel genommene 10 noch mit dem erhaltenen Resultat selbst, mittelst des (—) Zeichens, um solche sogleich gehörig in Rechnung gebracht zu sehen, so nehmlich, daß man schreibt:

$$log\ 0{,}7643 = 9{,}8832639 - 10.$$

Note. So ist z. B.

$$log\ 0{,}00376 = log\ (376) - 5 = 2{,}5751878 - 5 = -(2{,}4248122)$$
$$= 7{,}5751878 - 10,$$

so daß man auch wohl bloß schreibt

$$log\ 0{,}00376 = 7{,}5751878$$

und den Subtrahenden 10 bloß im Gedächtniß behält.

§. 250. Zusatz.

1) Jede nziffrige Zahl hat n—1 zur Kennziffer ihres Briggischen Logarithmen; und umgekehrt, ist n die Kennziffer eines Brigg'schen Logarithmen, so hat der dazu gehörige Logarithmand n+1 Ziffern. (§. 247.)

2) Für jede Zahl, die aus denselben Ziffern geschrieben wird (man mag rechts noch Nullen anhängen oder weglassen, man mag sie als ganze Zahl oder als Decimalbruch betrachten, beliebig zwischen die Ziffern ein Komma sich denkend, wenn nur der Logarithme nie negativ wird, sondern im Nothfall lieber (nach §. 249.) um 10 vermehrt), ist die Mantissa (die Decimalen) des Logarithmen allemal ein und dieselbe. — Denn es sey z. B. die Mantissa 0,5751878 des Brigg'schen Logarithmen von 376 durch α vorgestellt, so hat man:

$log\ 376 = 2 + \alpha$ (wo 2 die Kennziffer ist) und

$log\ 37600 = log\ 376 + log\ 100$ (§. 244. n. 1.)
$= 4 + \alpha = 4{,}5751878;$

$log\ 37600000 = log\ 376 + log\ 100000 = 7 + \alpha = 7{,}5751878;$

$log\ 37{,}6 = log\ (376) - 1 = 1 + \alpha = 1{,}5751878;$

$log\ 3{,}76 = log\ (376) - 2 = 0 + \alpha = 0{,}5751878;$

$log\ 0{,}376 = log\ (376) - 3 = (9 + \alpha) - 10 = 9{,}5751878 - 10;$

$log\ 0{,}00376 = log\ (376) - 5 = (7 + \alpha) - 10 = 7{,}5751878 - 10.$

3) Wenn ein Brigg'scher Logarithmen-Werth von nachstehender Form gegeben ist, z. B. 6,4327561—10 oder von

der Form 0,4327561—4, so findet man den zugehörigen Logarithmanden, wenn man zu dem Minuenden 6,4327561 oder im andern Falle zu dem Minuenden 0,4327561 (als Brigg'schen Logarithmen betrachtet) den Logarithmanden sucht (im erstern Falle findet man 2708670, im andern Falle 2,70867) und diesen nachgehends im erstern Falle durch 10^{10} oder 10000000000, im andern Falle dagegen durch 10^4 oder 10000 dividirt, so daß man im erstern wie im andern Falle 0,000270867 erhält. — Denn nach (§. 244. n. 2.) hat man wiederum:

$$log\ \frac{b}{10000} = log\ b - log\ 10000 = log\ b - 4$$

$$log\ \frac{b}{10\,000\,000\,000} = log\ b - log\ 10\,000\,000\,000 = log\ b - 10.$$

Anmerkung 1. Es reichen aber die Sätze (§. 244.) und (§. §. 247—250.) hin, um die Einrichtung einer jeden Logarithmen-Tafel unmittelbar verstehen, und die Tafeln selbst für den gewöhnlichen elementaren Zweck gebrauchen zu können. — Weil nehmlich die Kennziffer eines Brigg'schen Logarithmen leicht entschieden werden kann, so pflegt man in die Tabellen nur die Mantissa zu setzen, und auch nur diese zu suchen. — Und sucht man den Brigg'schen Logarithmen z. B. von 3470, so kann man den von 34700, oder den von 347 nehmen; denn diese 3 Logarithmen haben dieselbe Mantissa. — Und denselben nimmt man auch, wenn der Logarithme von 3,47, oder von 34,7 oder von 0,347, oder von 0,000347 gesucht wird; wenn man nur, in den letztern beiden Fällen, wo die wahren Logarithmen negativ sind, selbige um 10 zu groß nimmt, damit sie wieder positiv werden. — Und ist ein Brigg'scher Logarithmen-Werth gegeben, so daß der Logarithmand dazu gesucht werden soll, so sucht man abermals, ohne sich für's erste um die gegebene Kennziffer zu bekümmern, nur zu der gegebenen Mantissa in der Tabelle den Logarithmanden, (aus so viel neben einander stehenden Ziffern bestehend, als man in der Tabelle hat finden können) und bestimmt nun erst aus der Kennziffer des gegebenen Logarithmen, ob die gefundenen Ziffern des Logarithmanden lauter ganze Stellen, oder auch, zum Theil oder alle, Decimalstellen seyn werden. Ist z. B. die Kennziffer 2, so kann der gesuchte Logarithmand nur 3 ganze Stellen erhalten, und ist die Kennziffer 8, so muß der Logarithmand 9 ganze Stellen erhalten, so daß, wenn man in der Tabelle zu der gegebenen Mantissa des Logarithmen nur 6 Stellen überhaupt gefunden haben sollte, noch 3 Nullen rechts

angehängt werden müßten, um die 9 ganzen Stellen zu haben. — Und ist die Kennziffer des gegebenen Logarithmen 8, der Logarithme selbst aber um 10 zu groß genommen, so daß noch 10 (ganze) Einheiten von ihm subtrahirt werden müssen, so findet man erst zu der Kennziffer 8 und zu der gegebenen Mantissa, die 9 ganzen Stellen des Logarithmanden, und dividirt dann dieses Resultat noch durch 10000000000; d. h. man rückt ein Komma um 10 Stellen zur linken.

Note. Man sucht z. B. zu 34 den Brigg'schen Logarithmen-Werth, so nimmt man in der Tabelle bequemer 3400, findet die Mantissa 5314789, hängt an diese, weil die gegebene Zahl 34 zweiziffrig ist, die Kennziffer 1; und findet also *log* 34 = 1,5314789.

Oder man sucht *log* 3478926, so findet man in der Tabelle die Mantissa 5414451, an welche, weil der gegebene Logarithmand 7ziffrig ist, noch die Kennziffer 6 gehängt wird, so daß man *log* 3478926 = 6,5414451 erhält.

Wird aber zu dem Decimalbruch 3478,926 der Brigg'sche Logarithme gesucht, so denkt man sich das Komma weg, sucht wie vorher zu 3478926 die Mantissa 5414451 in der Tabelle; und weil der Decimalbruch 4 ganze Stellen hat, so muß die Kennziffer seines Logarithmen 3 seyn, also *log* (3478,926) = 3,5414451.

Sollte endlich zu dem Decimalbruch 0,03478926 der Brigg'sche Logarithme gesucht werden, so würde man abermals das Komma wegdenken, abermals zu 3478926 die Mantissa des Logarithmen 5414451 aus der Tabelle finden, die Kennziffer 6 vorsetzen, welche dem Logarithmen der 7ziffrigen ganzen Zahl 3478926 entspricht, aber von diesem 6,5414451 noch 8 (ganze) Einheiten subtrahiren (§. 250.), als so viele Decimalstellen der gegebene Decimalbruch hat, so daß man erhielte *log* (0,03478926) = 6,5414451 − 8
= 8,5414451 − 10
= 8,5414451, wenn man bei dem letztern Ausdruck im Gedächtniß behält, daß dieses Resultat um 10 zu groß genommen ist.

Diese 4 Beispiele betrafen den Fall, wo zu einem gegebenen Logarithmanden, aus der Tabelle der Logarithme gefunden werden sollte. — Umgekehrt wollen wir nun annehmen, daß Brigg'sche Logarithmen gegeben seyen und aus der Tabelle in Verbindung mit den vorstehenden (§. §.) die dazu gehörigen Logarithmanden (Zahlen) gefunden werden sollen.

Giebt man also den Brigg'schen Logarithmen 1,5314789, so finden wir in der Tabelle zu der bloßen Mantissa 5314789 die Zahl 3400. Weil aber die gegebene Kennziffer nur 1 ist, so hat der dazu gehörige Logarithmand (nach §. 247.) nur 2 ganze Stellen; also erhalten wir nur 34,00 oder 34 als den zugehörigen Logarithmanden.

Giebt man uns dagegen den Brigg'schen Logarithmen 4,5414451, so suchen wir zuerst zur Mantissa 5414451 (ohne uns um die Kennziffer 4 zu bekümmern) in der Tabelle die zugehörigen Ziffern des gesuchten Logarithmanden und finden 3478926. Weil aber die gegebene Kennziffer 4 ist, so kann der Logarithmand nur 5 ganze Stellen haben, also ist der gefundene Logarithmand 34789,26, so daß man hat *log* (34789,26) = 4,5414451.

Wird der Brigg'sche Logarithme gegeben 7,5414451 mit dem Bemerken, daß er um 10 zu groß sey, (so daß also der wahre Logarithme $=7,5414451-10$, $=0,5414451-3$, wäre) so suchen wir abermals zu der bloßen Mantissa 5414451 die Ziffern des Logarithmanden, finden 3478926, geben ihm, wegen der Kennziffer 7, gerade 8 ganze Stellen (indem man rechts ein Null anhängt), so daß man 34789260 erhält, und dividiren dieses Resultat noch durch 10 000 000 000, d. h. rücken ein Komma um 10 Stellen zur linken, und man findet dann den gesuchten Logarithmanden $=0,003478926$. — Oder man denket sich den gegebenen Logarithmen in der andern Gestalt $0,5414451-3$, so wird man, weil jetzt 0 die Kennziffer ist, der Logarithmand 3478926 also nur eine ganze Stelle haben kann, zunächst 3,478926 erhalten, solches aber wegen der vom Logarithmen noch zu subtrahirenden 3, noch durch 10^3 oder 1000 dividiren, d. h. das Komma noch um 3 Stellen zur Linken rücken, und man wird, wie vorher, 0,003478926 als den gesuchten Logarithmanden erhalten, so daß man hat

$$\begin{aligned} log\ (0,003478926) &= 0,5414451-3, \\ &= 7,5414451-10, \\ &= 7,5414451, \end{aligned}$$

wenn man bei dem letztern Ausdruck im Gedächtniß behält, daß dieser Logarithme um 10 zu groß ist.

Anmerkung 2. Aus diesen Beispielen geht hervor, daß man nur noch zu wissen braucht, wie aus den Tafeln, zu den bloßen Ziffern der Logarithmanden die Mantissa der Brigg'schen Logarithmen, und umgekehrt, zu der Mantissa eines gegebenen Brigg'schen Logarithmen in den Tafeln die bloßen Ziffern des Logarithmanden (der Zahl) gefunden werden können. Darüber muß aber die Einleitung, welche jeder Tafel vorne an stehen muß, nachgelesen werden.

§. 251. Aufgabe.

Die Logarithmen-Tafeln zu gebrauchen, um einen durch angedeutete Multiplikation, Division, Potenzirung und Wurzeln zusammengesetzten, übrigens in Ziffern gegebenen Ausdruck numerisch zu bestimmen.

Auflösung. Weil in der Tabelle zu jeder numerisch ausgedrückten Zahl ihr Brigg'scher Logarithme gefunden wird, aber auch zu jedem gegebenen Brigg'schen Logarithmen die Zahl, so suche man statt den gegebenen Ausdruck unmittelbar numerisch zu bestimmen, bloß seinen Brigg'schen Logarithmen auszudrücken (die Sätze §. §. 244. anwendend); um dann in der Tabelle zu den Logarithmen die Zahl selbst zu finden.

Beispiel 1. Man soll die Zahl $a=43{,}765$ mit $b=0{,}79648$ numerisch multipliciren. — Statt das Produkt ab unmittelbar zu suchen, suche man nun lieber *log* ab. Es ist aber nach (§. 244.)

$$\textit{log}\ ab=\textit{log}\ a+\textit{log}\ b;$$

und

$$\textit{log}\ a=\textit{log}\ 43{,}765\ =1{,}6411263$$
$$\textit{log}\ b=\textit{log}\ 0{,}79648=9{,}9011749-10$$

also
$$\textit{log}\ ab\ =1{,}5423018$$

und zu diesem Brigg'schen Logarithmen findet man in der Tabelle die Zahl 34,85794, welche als das gesuchte Produkt ab selbst seyn muß (näherungsweise, weil auch die Logarithmen in der Tabelle nur näherungsweise gefunden sind; diese 5 Decimalen sind jedoch alle 5 richtig); so daß man hat

$$(43{,}765)\times(0{,}79648)=34{,}85794.$$

Beispiel 2. Man soll $a=0{,}79648$ durch $b=43{,}765$ numerisch dividiren. — Man suche unmittelbar statt $\frac{a}{b}$ selbst, lieber

$\textit{log}\left(\frac{a}{b}\right)$ und hat nach (§. 244.) $\textit{log}\ \frac{a}{b}=\textit{log}\ a-\textit{log}\ b$; dabei

$$\textit{log}\ a=9{,}9011749-10$$
$$\textit{log}\ b=1{,}6411269$$

$$\textit{log}\ \tfrac{a}{b}=8{,}2600480-10;$$

und sucht man dazu in der Tabelle die Zahl selbst, so ergiebt sich $\frac{a}{b}=0{,}01819902$. welches bis auf die letzte Decimalstelle genau ist.

Beispiel 3. Man soll $a=1{,}05$ zur 23ten Potenz erheben, und den Potenzen-Werth numerisch bestimmen. —

Man hat nach (§. 244.):

$$\textit{log}\ a^{23}=23\,.\,\textit{log}\ a,$$

und dabei

$$\textit{log}\ a=0{,}0211893$$
$$23$$
$$635679$$
$$423786$$
$$\textit{log}\ a^{23}=0{,}4873539$$

und zu diesem Brigg'schen Logarithmen findet sich in der Tabelle die Zahl 3,071524; so daß man hat $(1{,}05)^{23}=3{,}071524$.

Beispiel 4. $\sqrt[3]{47{,}6296}$ numerisch zu finden.

Man hat $\textit{log}\ \sqrt[3]{47{,}6296}=\frac{\textit{log}\ 47{,}6296}{3}$ (§. 244.),

und $log\ 47{,}6296 = 1{,}6778770$

dahero $\frac{1}{3}\ log\ 47{,}6296 = 0{,}5592923 = log\ \sqrt[3]{47{,}6296}$;

und hiezu findet sich in der Tabelle die Zahl 3,624869, welches also die gesuchte Kubik-Wurzel seyn muß.

Beispiel 5. Man soll den Ausdruck

$$\frac{(1+m)^t}{\sqrt[5]{a \cdot b^n}} \cdot K$$

unter der Voraussetzung numerisch bestimmen, daß $a = 4{,}576$, $b = 1{,}07$, $n = 7$, $m = \frac{1}{20} = 0{,}05$, $t = 117$ und $K = 5{,}695$ seyn soll. — Nach den Sätzen (§. 244.) und nach den daselbst gefolgerten Uebungs-Beispielen, hat man:

$$log\left(\frac{(1+m)^t}{\sqrt[5]{a \cdot b^n}} \cdot K\right) = log\ \frac{(1+m)^t}{\sqrt[5]{a \cdot b^n}} + log\ K$$

$$= log\ (1+m)^t - log\ \sqrt[5]{a \cdot b^n} + log\ K$$

$$= t \cdot log\ (1+m) - \frac{log\ a + n \cdot log\ b}{5} + log\ K.$$

Nun ist aber $1 + m = 1{,}05$ und

$log\ (1+m) = 0{,}0211893$

$\underline{\qquad\qquad 117}$

1483251

211893

211893

$t \cdot log\ (1+m) = 2{,}4791481$

$log \cdot K = 0{,}7554937$

$t \cdot log\ (1+m) + log\ K = 3{,}2346418$ ...(I.)

$log\ b = 0{,}0293838$

$\underline{\qquad\qquad 7}$

$n \cdot log\ b = 0{,}2056866$

$log\ a = 0{,}6604860$

$log\ a + n \cdot log\ b = 0{,}8661726$

$\frac{log\ a + n \cdot log\ b}{5} = 0{,}1732345$ ...(II.)

$$log\ \frac{(1+m)^t}{\sqrt[5]{a \cdot b^n}} \cdot K = 3{,}0614073; \qquad \text{...(I.)} - \text{(II.)}$$

und sucht man zu diesem Brigg'schen Logarithmen die Zahl, so findet man

1151,88, und dies ist also der numerische Werth des Ausdrucks $\frac{(1+m)^t}{\sqrt[5]{a.b^n}}.K$ für die gegebenen Werthe von m, t, k, a, b, und n.

§. 252. Zusatz.

Es kann sich treffen, daß von einem in Ziffern gegebenen Ausdruck nur einzelne Theile gefunden werden können, indem man statt dieser Theile ihre Logarithmen nimmt, und daß der ganze Ausdruck dann erst berechnet werden kann, wenn diese einzelnen Theile zuvörderst numerisch hergestellt worden sind. —

Sey z. B. numerisch zu bestimmen der Ausdruck

$$\frac{\sqrt[n]{1+b(1+m)^t}+K}{(b.(1+m)^n-a^r).\sqrt[c]{a^n b}}$$

für gegebene Ziffer-Werthe von n, b, m, t, k, a, r, und c, so müßte man zuerst *log* $b(1+m)^t$ suchen, und den Logarithmanden dazu aus der Tabelle, um $b(1+m)^t$ selbst numerisch berechnet zu haben. Dazu addirt man 1 und hat dann den Radikanden $1+b(1+m)^t$ numerisch bestimmt, und die Wurzel $\sqrt[n]{1+b(1+m)^t}$ läßt sich dann wieder dadurch numerisch berechnen, daß man ihren Logarithmen nimmt, weil solcher $=\frac{1}{n}.log\,[1+b(1+m)^t]$ ist; und nun dazu den Logarithmanden aus der Tabelle, so hat man den numerischen Werth der Wurzel selber. Dazu addirt K giebt den Zähler unseres Ausdrucks, numerisch berechnet. — Um den Nenner zu bestimmen, muß man erstlich $b(1+m)^n$ und a^r jedes für sich dadurch numerisch berechnen, daß man ihre Logarithmen sucht, weil solche beziehlich *log* $b+n.log\,(1+m)$ und $r.log\,a$ sind und danach leicht gefunden werden können. Sucht man zu diesen Brigg'schen Logarithmen aus der Tabelle die zugehörigen Zahlen (Logarithmanden), so findet man $b(1+m)^n$ und a^r selbst in numerischer Form, und dann durch gemeine Subtraktion auch $b(1+m)^n-a^r$. — Dann aber wird der Logarithme des Nenners, $=log\,(b(1+m)^n-a^r)+\frac{n.log\,a+log\,b}{c}$, danach berechnet, dann von dem Logarithmen des Zählers, nehmlich von

$log\ (\sqrt[n]{1+b(1+m)^t}+K)$, den man finden kann, weil vorher der Zähler selbst schon numerisch berechnet war, abgezogen, und es bleibt der Logarithme des ganzen Ausdrucks, nehmlich

$$log\ \frac{\sqrt[n]{1+b(1+m)^t}+K}{c}$$

$$(b(1+m)^n-a^r).\sqrt{a^n.b}$$

übrig, wozu man nachgehends die Zahl (den Logarithmanden) sucht aus der Tabelle, um den verlangten Ausdruck selbst zu haben in numerischer Form.

Beispiel. Sey derselbe Ausdruck numerisch zu bestimmen, wenn $n=7$; $b=289$; $a=17{,}96854$; $t=48$; $c=3$; $r=\frac{11}{4}$; $m=0{,}06$; $k=45{,}269$. Man findet

$log\ (1+m)=log\ (1{,}06)=0{,}0253059$

$t.log\ (1+m)=0{,}2024472$

$log\ b=2{,}4608978$

$log\ [(1+m)^t.b]=2{,}6633450$

$(1+m)^t.b=460{,}6223$

$1+(1+m)^t.b=461{,}6223$

$log\ (1+(1+m)^t.b)=2{,}6642774$

$log\ \sqrt[n]{1+(1+m)^t b}=0{,}3806110$

$\sqrt[n]{1+(1+m)^t b}=2{,}40221$

$\sqrt[n]{1+(1+m)^t b}+K=47{,}67121$

welches der Zähler ist; und

$log\ (\sqrt[n]{1+(1+m)^t b}+K)=1{,}6782562.$

Ferner findet sich auf ähnlichem Wege:

$log\ b.(1+m)^n=2{,}6380391$

$b(1+m)^n=434{,}5493$

$log\ a^r=3{,}4499102$

$a^r=2817{,}8$

$(1+m)^n b-a^r=-2383{,}2507$

also der Nenner $=-2383{,}2507\ .\ \sqrt[c]{a^n b}.$

Um nun das absolute Glied dieses Nenners vollends zu finden, hat man weiter

$$log \sqrt[c]{a^n.b} = \frac{n.log\ a + log\ b}{c} = 3{,}7474958$$

$$log\ 2383{,}2507 = 3{,}3771516$$

$$log\ (2383{,}2507 \times \sqrt[c]{a^n b}) = 7{,}1246474.$$

Nun ist aber unser Ausdruck, wegen des (—) Zeichens im Nenner, negativ und der Logarithme des absoluten Gliedes wird gefunden, aus

$$log\ (\sqrt[n]{1+(1+m)^t b} + K) = 1{,}6782562$$

und

$$log\ (2383{,}2507 \times \sqrt[c]{a^n b}) = 7{,}1246474.$$

durch Subtraktion und wird $= 4{,}5536088 - 10$

und die dazu gehörige Zahl $= 0{,}0000035777$

und der gegebene Ausdruck selbst $= -0{,}0000035777$.

§. 253. Bemerkung.

Dadurch daß man statt gegebener Ausdrücke lieber ihre Logarithmen nimmt, kann man zuweilen auch solche Gleichungen auflösen, welche an sich zu den transcendenten gehören, aber entweder unmittelbar in algebraische übergehen, oder doch als algebraische betrachtet werden können, wenn man nicht mehr x oder y u. s. w. selbst, sondern *log* x oder *log* y u. s. w. als die Unbekannten ansieht.

Beispiele.

1) Aus $a^x = b$ folgt $x.log\ a = log\ b$ und $x = \frac{log\ b}{log\ a}$.

2) Aus $\frac{a^{mx}}{b^{3x}} = c$ folgt $(m.log\ a - 3\ log\ b)x = log\ c$, also

$$x = \frac{log\ c}{m.log\ a - 3.log\ b}.$$

3) Aus $a^{3x+2}b^{5x-3} = c^{x-1}d^{4x-5}$ folgt

$$(3x+2)\ log\ a + (5x-3)\ log\ b = (x-1)\ log\ c + (4x-5)\ log\ d$$

und hieraus

$$x = \frac{3\ log\ b - 2\ log\ a - log\ c - 5\ log\ d}{3\ log\ a + 5\ log\ b - log\ c - 4\ log\ d}$$

$$= \frac{log\left(\frac{b^3}{a^2 c d^5}\right)}{log\left(\frac{a^3 b^5}{c.d^4}\right)}.$$

4) Aus $3^{2x}.5^{6x-7}=9^{x-2}.7^{1-x}$ folgt $x=0{,}759965\ldots$

5) Aus $(\frac{2}{8}\frac{9}{6}\frac{5}{7})^{3-x}=632(\frac{5}{3}\frac{6}{9})^{\frac{5x}{9}}$ folgt $x=11{,}040270\ldots$

6) Aus $(\frac{2}{2}\frac{1}{0})^{x}(\frac{3}{3})^{\frac{7x}{2}}=\frac{7}{12}$ folgt $x=0{,}309928.$

7) Aus $(\frac{7}{3}\frac{5}{4}\frac{6}{5})^{\frac{3x}{2}}=54783$ folgt $x=9{,}272299.$

8) Aus $(\frac{3}{4})^{x}=\frac{103}{2}$ folgt $x=-13{,}701172\ldots$

9) Aus $C=(1+m)^{t}.K$ folgt

$$\log C=t.\log(1+m)+\log K$$

$$\log K=\log C-t.\log(1+m)$$

$$t=\frac{\log C-\log K}{\log(1+m)}$$

$$\log(1+m)=\frac{\log C-\log K}{t}.$$

Und hat man $\log(1+m)$ hieraus numerisch bestimmt, so sucht man in der Tabelle die Zahl (den Logarithmanden) dazu, so daß man $1+m$ selbst hat, und zieht dann 1 ab, und es bleibt der Werth von m übrig.

Uebungs-Beispiele, das praktische Arbeiten mit Logarithmentafeln betreffend.

1) $\log\sqrt[5]{13}=0{,}0227887$ und $\sqrt[5]{13}=1{,}053874;$

2) $\log(1{,}05)^{73}=1{,}5468189$ und $(1{,}05)^{73}=35{,}2224;$

3) $\log\sqrt[14]{(\frac{1}{3})^{187}}=3{,}6270232-10;$ $\sqrt[14]{(\frac{1}{3})^{187}}=0{,}00000042366;$

4) $\log\sqrt[9]{\frac{347\sqrt[7]{0{,}0073}}{126\sqrt[3]{\frac{4}{9}}}}=0{,}0280126;$

$$\sqrt[9]{\frac{347\sqrt[7]{0{,}0073}}{126\sqrt[3]{\frac{4}{9}}}}=1{,}066625;$$

---

*) Es ist nehmlich

$$\log\tfrac{1}{3}=0-0{,}4771213=0{,}5228787-1$$

$$187.\log\tfrac{1}{3}=97{,}7783169-187=0{,}7783169-90$$

und nun

$$\frac{187\log\frac{1}{3}}{14}=\frac{0{,}7783169-90}{14}=\frac{8{,}7783169-98}{14}$$

$$=0{,}6270227-7=3{,}6270227-10.$$

Nimmt man aber Logarithmen-Tafeln zu Hilfe, welche in mehr als 7 Decimalstellen die Logarithmen angeben, so erhält man das genauere oben stehende Resultat.

5) $log \sqrt[4]{35246} = 1{,}1367774$; $\sqrt[4]{35246} = 13{,}70179 \ldots$;

6) $log \sqrt[3]{17705\frac{2}{9}} = 1{,}4160338$; $\sqrt[3]{\overline{17705\frac{2}{9}}} = 26{,}06356$;

7) $log \left(\frac{167}{53}\right)^{0{,}32} = 0{,}1595010$; $\left(\frac{167}{53}\right)^{0{,}32} = 1{,}443779$;

8) $log \left[\left(\frac{42666}{1147}\right)^{12} \times \left(\frac{765}{19432}\right)^{10}\right] = 4{,}7976613 = log\ 62756{,}88$;

9) $log \sqrt[8]{(21 + \sqrt[6]{19})} = 0{,}1693438 = log\ 1{,}476875$;

10) $log \sqrt[12]{(0{,}34576)^7} = 9{,}7309519 - 10 = log\ 0{,}5382101$;

11) $log \sqrt[10]{\frac{78563\sqrt[3]{\frac{5}{3}}}{15\sqrt[4]{0{,}2}}} = 0{,}3967819 = log\ 2{,}493336$;

12) $log \sqrt[5]{9{,}921 - 3\sqrt{\overline{5{,}02}}} = 0{,}1010132 = log\ 1{,}261866$;

13) $log \sqrt[5]{\frac{0{,}365 \cdot \sqrt{2}}{788}} = 0{,}3632563 - 1 = log\ 0{,}230811$;

14) $log \sqrt[3]{5{,}03 + \sqrt[5]{\overline{0{,}2}}} = 0{,}2533429 = log\ 1{,}792020$;

15) $log \sqrt[32]{(356{,}27)^{11}} = 0{,}8771741 = log\ 7{,}536575$;

16) $log \sqrt[540]{\overline{0{,}00007}} = 0{,}9923057 - 1$ *) $= log\ 0{,}9824394$;

17) $log \left(2\frac{5}{6}\right)^9 = 4{,}0706787 = log\ 11767{,}35 \ldots$

18) $log \sqrt[9]{\overline{1350\frac{7}{8}}} = 0{,}3478460 = log\ 2{,}227645 \ldots$

19) $log \sqrt[16]{\left(\frac{14}{267}\right)^{715}} = 0{,}7828746 - 58$ und der Werth von $\sqrt[16]{\left(\frac{14}{267}\right)^{715}}$ ist daher ein Decimalbruch, der 57 Nullen als erste Decimalstellen hat, und dessen 7 folgende Decimalstellen 6065612 sind.

20) $log \frac{\sqrt[7]{(466871)^6} \cdot \sqrt[9]{(3576)^{16}}}{996003\sqrt{0{,}0071}} = 6{,}2525727 = log\ 1788845 \ldots$

---

*) Um diesen (und ähnliche) Logarithmen bequem zu erhalten, muß man so verfahren: $log\ 7 = 0{,}8450980$;

daraus $log\ 0{,}00007 = 0{,}8450980 - 5 = 535{,}8450980 - 540$

und $\frac{log\ 0{,}00007}{540} = \frac{535{,}8450980 - 540}{540} = \frac{535{,}8450980}{540} - 1$

$= 0{,}9923057 - 1$.

21) $log \sqrt[4]{\frac{132 \cdot (7{,}356)^9}{\sqrt{(3{,}25)^5}}} = 2{,}1601599 = log\ 144{,}5972 \ldots$

22) $log \sqrt[13]{(\frac{5}{9}\frac{4}{3}\frac{7}{5})^{207}} = 0{,}2927210 - 4 = log\ 0{,}00019621;$

23) $log\ 253 \cdot \sqrt[3]{\frac{716{,}5}{\sqrt{2}}} = 3{,}3046875 = log\ 2016{,}914;$

24) $\frac{(991{,}767)^5 \times 12{,}34}{(20{,}358 \times 10{,}1575)^6} = 151{,}4369;$

25) $(\frac{5}{7})^{0{,}0537} = 0{,}982093 \ldots$

26) $\sqrt[6]{235{,}78} = 2{,}485522.$

Arithmetik.

Siebenzehntes Kapitel.

Von den allgemeinen unendlichen Reihen. Von den Reihen für die Potenzen und Logarithmen.

§. 254. Lehrsatz.

Sind zwei endliche oder unendliche Reihen

1) $A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots=B_0+B_1x+B_2x^2+B_3x^3+\ldots$

von dieser Form einander gleich für jeden Werth von x, so ist nothwendig

$$A_0=B_0,\ A_1=B_1,\ A_2=B_2,\ A_3=B_3,\ \text{etc. etc.}$$

Beweis. Denn welchen Werth man auch dem x giebt, so bleiben die Coefficienten dieser Reihen doch allemal unverändert dieselben. Setzt man aber $x=0$, so wird die Gleichung, wenn sie jetzt auch noch statt finden soll, in

2) $A_0=B_0$ übergehen. Zieht man diese Gleichung von der obigen ab, und dividirt auf beiden Seiten durch x, so erhält man:

3) $A_1+A_2x+A_3x^2+\ldots=B_1+B_2x+B_3x^2+\ldots$;

und da diese Gleichung auch wieder für jeden Werth von x gelten soll, also auch wenn $x=0$ ist, so muß

4) $A_1 = A_2$ B. seyn. Zieht man nun wieder (4.) von (3) ab, und dividirt durch x, so ergiebt sich:

5) $A_2 + A_3 x + \ldots = B_2 + B_3 x + \ldots$

woraus für $x = 0$, $A_2 = B_2$ folgt; u. s. w. f.

§. 255. Zusatz.

Ist daher

$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots = 0$$

für jeden Werth von x, so ist auch einzeln $C_0 = 0$, $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$, u. s. w. f.; weil solches eben so bewiesen werden kann, wie der vorstehende Lehrsatz bewiesen wurde.

§. 256. Aufgabe.

Die Potenz a^x in eine nach ganzen positiven Potenzen von x fortlaufende unendliche Reihe zu verwandeln.

Auflösung. Man setze

1) $a^x = B_0 + B_1 . x + B_2 . x^2 + B_3 . x^3 + B_4 . x^4 + \ldots$

und suche nun die unbestimmten Coefficienten dergestalt zu bestimmen, daß der Gleichung (1.) genügt werde. Man setze zu dem Ende erst y dann $x + y$ statt x in (1.), so erhält man, weil B_0, B_1, B_2, etc. etc. dadurch sich nicht ändern:

2) $a^y = B_0 + B_1 . y + B_2 . y^2 + B_3 . y^3 + B_4 . y^4 + \ldots$

3) $a^{x+y} = B_0 + B_1 . (x+y) + B_2 . (x+y)^2 + B_3 . (x+y)^3 + \ldots$ *)

Multiplicirt man aber die Gleichungen (1. und 2.) mit einander, so erhält man noch:

4) $a^{x+y} = B_0^2 + B_0 . B_1 . x + B_0 . B_2 . x^2 + B_0 . B_3 . x^3 + \ldots$
$+ (B_1 . B_0 + B_1 . B_1 . x + B_1 . B_2 . x^2 + B_1 . B_3 . x^3 + \ldots) y$
$+ (B_2 . B_0 + B_2 . B_1 . x + B_2 . B_2 . x^2 + B_2 . B_3 . x^3 + \ldots) y^2$
$+$ u. s. w. f.

---

*) Wem es schwer werden sollte, statt des willkührlichen x, den Ausdruck $x + y$ zu setzen, der setze erst statt des willkührlichen x, einen ganz fremden Buchstaben z; — und in der daraus hervorgehenden richtigen Gleichung, in welcher z jeden möglichen Werth haben soll, kann dann gewiß auch $x + y$ statt z gesetzt werden.

Und wenn man in (3.) die Potenzen rechts von $x+y$ nach dem binomischen Lehrsatze (§. 140.) entwickelt, aus (3.):

5) $$a^{x+y}=B_0+B_1.x+B_2.x^2+B_3.x^3+B_4.x^4+B_5.x^5+\ldots$$
$$+(B_1+2B_2.x+3B_3.x^2+4B_4.x^3+5B_5.x^4+\ldots)y$$
$$+(B_2+3B_3.x+6B_4.x^2+10B_5.x^3+\ldots)y^2$$
$$+ \text{ u. s. w. f.}$$

Da nun in den Gleichungen (4. und 5.) die Ausdrücke links dieselben sind, so müssen auch die nach ganzen Potenzen von y fortlaufenden Reihen rechts einander gleich seyn, und daher auch nach (§. 254.) die Coefficienten von y (in der 1ten Potenz) ebenfalls einander gleich seyn, d. h. es muß

$$B_1.B_0+B_1.B_1.x+B_1.B_2.x^2+B_1.B_3.x^3+\ldots$$
$$=B_1+2B_2.x+3B_3.x^2+4B_4.x^3+\ldots$$

seyn, für jeden Werth von x; also auch wieder nach (§. 254.)

$$B_1.B_0=B_1, \quad \text{d. h.} \quad B_0=1,$$

$$B_1.B_1=2B_2, \quad \text{d. h.} \quad B_2=\frac{(B_1)^2}{2}$$

$$B_1.B_2=3B_3, \quad \text{also} \quad B_3=\frac{(B_1)^3}{2.3}$$

$$B_1.B_3=4B_4, \quad \text{also} \quad B_4=\frac{(B_1)^4}{2.3.4} \quad \text{u. s. w. f.}$$

§. 257. Zusatz.

Folglich findet man

$$\text{I. } a^x=1+\frac{B_1.x}{1}+\frac{B_1{}^2.x^2}{1.2}+\frac{B_1{}^3.x^3}{1.2.3}+\frac{B_1{}^4.x^4}{1.2.3.4}+\ldots$$

wo nur noch B_1 zu bestimmen übrig bleibt, welches, wie man sogleich sieht, von dem Dignanden a abhängen muß.

Um diese Abhängigkeit zu erfahren, setze man $x=1$ und erhält

$$\text{II. } a=1+\frac{B_1}{1}+\frac{B_1{}^2}{1.2}+\frac{B_1{}^3}{1.2.3}+\frac{B_1{}^4}{1.2.3.4}+\ldots \text{ *)}$$

*) Man thut wohl, das Produkt 1.2.3.4....m durch m! zu bezeichnen und durch m Fakultät auszusprechen; so daß z. B.

welches die Gleichung ist, welche dazu dienen soll, um a in B_1 oder B_1 in a auszudrücken.

§. 258. Zusatz.

Weil es aber schwerer ist, aus dieser Gleichung (II.), wenn man sich a gegeben denkt, B_1 zu finden, so wollen wir lieber erst B_1 annehmen, und a dazu finden. Setzen wir, um das einfachste zu nehmen, $B_1 = 1$, so wird der dazu gehörige Werth von a, wenn solcher ein für allemal durch e bezeichnet wird:

$$\text{III. } e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots = 2{,}718\ldots$$

und die Gleichung (I.) selbst wird nun für diese Werthe von B_1 und a, in

$$\text{IV. } e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

übergehen, wo $e = 2{,}718\ldots$ ist.

Dann ist aber auch, wenn man hier B_1 statt x setzt und das Resultat in (II.) substituirt:

$$a = e^{B_1} \quad \text{und deshalb} \quad B_1 = \overset{e}{log}\ a.$$

Diejenigen Logarithmen, deren Basis e ist, wo $e = 2{,}718\ldots$, nennt man natürliche (oder Hyberbolische) Logarithmen, und wir bezeichnen sie immer durch *log* nat. (während die Brigg'schen, für die Basis 10, allemal bloß durch *log* angedeutet sind) und man hat also:

$$\text{V. } B_1 = log \text{ nat. a}$$

und daraus und aus (I.) folgt:

$1! = 1$; $2! = 1.2 = 2$; $3! = 1.2.3 = 6$; $4! = 1.2.3.4 = 24$; $5! = 1.2.3.4.5 = 120$; $6! = 1.2.3.4.5.6 = 720$; $7! = 1.2.3.4\,5.6.7 = 5040$; u. s. w. f. ist. Die obigen Gleichungen (I. und II.) werden dann so geschrieben:

$$\text{I. } a^x = 1 + \frac{B_I.x}{1!} + \frac{B_I{}^2.x^2}{2!} + \frac{B_I{}^3.x^3}{3!} + \frac{B_I{}^4.x^4}{4!} + \text{etc. etc.}$$

$$\text{II. } a = 1 + \frac{B_I}{1!} + \frac{B_I{}^2}{2!} + \frac{B_I{}^3}{3!} + \frac{B_I{}^4}{4!} + \ldots$$

VI. $a^x = 1 + \frac{x.(log\ nat.\ a)}{1} + \frac{x^2.(log\ nat.\ a)^2}{1.2} + \frac{x^3.(log\ nat.\ a)^3}{1.2.3} + \ldots$

und diese Formel (VI.) liefert die vollständige Auflösung der Aufgabe des (§. 256.).

§. 259. Aufgabe.

Den natürlichen Logarithmen von $1+x$ d. h. *log* nat. $(1+x)$ in eine Reihe zu verwandeln, die nach ganzen Potenzen von x fortläuft.

Auflösung. Es ist nach dem binomischen Lehrsatze:

1) $(1+x)^z = 1 + z.x + \frac{z.(z-1)}{2}.x^2 + \frac{z.(z-1)(z-2)}{1.2.3}.x^3 + \ldots$

Multiplicirt man hier rechts die Zähler des Coefficienten von x wirklich mit einander, ordnet alle einzelnen Glieder nicht mehr nach den Potenzen von x sondern nach den Potenzen von z und begnügt man sich dabei mit der ersten Potenz von z, so erhält man:

2) $(1+x)^z = 1 + (x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots.)z +$ etc. etc. etc.

Setzt man aber in der Formel (§. 258. VI.) zuerst z statt x, dann $1+x$ statt a, so erhält man:

3) $(1+x)^z = 1 + \frac{log\ nat.\ (1+x)}{1}.z + \frac{(log\ nat.\ a)^2}{1.2}.z^2 + \ldots$

Und weil nun in (2. und 3.) rechts die beiden nach ganzen Potenzen von z fortgehenden Reihen einander gleich seyn müssen, für jeden Werth von z, so müssen auch, nach (§. 254.), die Coefficienten der einzelnen Potenzen von z beziehlich einander gleich seyn, also namentlich auch die Coefficienten von z^1 oder z selbst; also:

VII. *log* nat. $(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$

§. 260. Zusatz.

Setzt man hier $-x$ statt x, so erhält man:

log nat. $(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \ldots$

und diese Gleichung von (VII.) subtrahirt, giebt nach (§. 244. n. 2.):

VIII. *log* nat. $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7+\ldots)$.

Und setzt man hier $\frac{z}{2n+z}$ statt x, so ergiebt sich, wegen

$\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+z}{n}$ und *log* nat. $\frac{1+x}{1-x}$ = *log* nat. $(n+z)$ $-$ *log* nat. n,

IX. *log* nat. $(n+z)$ = *log* nat. $n+2\left[\frac{z}{2n+z}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5+\ldots.\right]$.

Endlich wenn man in (VII.) $1+x=\sqrt[m]{a}$, also $x=\sqrt[m]{a}-1$ setzt, weil dann *log* nat. $(1+x)=\frac{1}{m}$. *log* nat. a wird:

X. *log* nat. $a=m.\left[(-1+\sqrt[m]{a})-\frac{1}{2}(-1+\sqrt[m]{a})^2+\frac{1}{3}(-1+\sqrt[m]{a})^3-\ldots\right]$.

Anmerkung 1. Diese letztere Formel dient dazu, um *log* nat. a zu finden, wenn a irgend eine gegebene positive Zahl z. B. 2 ist. Man setze z. B., da m ganz beliebig ist, für m die Zahl 2^{12} oder 4096, so erhält man nach (§. 68. n. 4.) $\sqrt[m]{a}$ d. h. $\sqrt[4096]{a}$, wenn man 12 mal hinter einander die Quadrat-Wurzel auszieht. Ist also z. B. $a=2$, so wird $\sqrt[m]{a}$ von 1 sehr wenig verschieden seyn, also wird $-1+\sqrt[m]{a}$ von Null sehr wenig verschieden seyn; und dann kann man die höhern Potenzen von $(-1+\sqrt[m]{a})$ als unbedeutend außer Acht lassen, so daß sich die Formel (X.) auf

$$\textit{log}\ \text{nat.}\ 2=4096\,(-1+\sqrt[4096]{2})$$

reducirt, welche letztere Gleichung zwar nur näherungsweise richtig ist, aber doch ziemlich genau.

Hat man aber *log* nat. 2 gefunden, so ergiebt sich sogleich

log nat. $4=2\times$ *log* nat. 2,

log nat. $8=3\times$ *log* nat. 2.

Setzt man endlich in der Formel (IX.) $n=2$ und $z=1$, so erhält man:

$$log\ nat.\ 3 = log\ nat.\ 2 + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7} + \ldots\right)$$

welches, wenn man die 5 ersten Glieder der Reihe nimmt *log* nat. 3. bis auf weniger als $\frac{1}{100000000}$ genau liefert.

Für $n=4$ und $z=1$, erhält man ferner aus (IX.)

$$log\ nat.\ 5 = log\ nat.\ 4 + 2\left(\frac{1}{11} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{11^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{11^5} + \ldots\right)$$

wo 4 erste Glieder hinreichen, um *log* nat. 5 ziemlich genau zu geben. Ferner ist *log* nat. $6 = log$ nat. $2 + log$ nat. 3; *log* nat. 7 wird gefunden, wenn man in (IX.) $n=6$, $z=1$ nimmt; *log* nat. $9 = 2 \times log$ nat. 3; *log* nat. $10 = log$ nat. $2 + log$ nat. 5; *log* nat. 11 wird gefunden wenn man in (IX.) $n=10$, $z=1$ setzt; u. s. w. f.

Anmerkung 2. Es giebt andere Mittel, die natürlichen Logarithmen aller Zahlen noch viel schneller zu finden, als eben hier bemerklich gemacht worden, indem man die unendlichen Reihen zu Hilfe nimmt. Das hier Gesagte mag also nur als eine Andeutung betrachtet werden, wie man sich die Sache denken könne, und welchen Nutzen die unendlichen Reihen gewähren.

§. 261. Aufgabe.

Es sind die natürlichen Logarithmen aller Zahlen gefunden; man soll daraus die Brigg'schen Logarithmen ableiten, oder überhaupt die Logarithmen in jedem andern System (d. h. für jede andere Basis p).

Auflösung. Ist y der Werth des *log* nat. a so hat man

$$e^y = a.$$

Und ist x der Werth von log^{p} a, so hat man

$$p^x = a.$$

Also ist $e^y = p^x$ und $y = log$ nat. (p^x) oder nach (§. 244. n. 3.):

$$y = x.log\ nat.\ p \quad \text{und} \quad x = \frac{y}{log\ nat.\ p};$$

d. h. XI. $log^{p} a = \frac{log\ nat.\ a}{log\ nat.\ p}$.

Also für die Brigg'schen Logarithmen

$$log\ a = \frac{log\ nat.\ a}{log\ nat.\ 10}.$$

Anmerkung. Den Bruch $\frac{1}{log\ nat.\ p}$, womit *log* nat. a noch multiplicirt werden muß, um $\overset{p}{log}\ a$ zu erhalten, nennt man auch den Modul des zur Basis p gehörigen Logarithmensystems.

§. 262. Lehrsatz.

Ist n eine sehr große Zahl und z gegen n sehr klein, so ist ziemlich nahe

$$log\ nat.\ (n+z) = log\ nat.\ n + \frac{z}{n}.$$

Beweis folgt unmittelbar aus (§. 260. IX.), wenn man bedenkt, daß $\frac{z}{2n+z}$ so klein ist, daß man die höhern Potenzen außer Acht lassen kann, und daß eben dann auch $\frac{z}{2n}$ von $\frac{z}{2n+z}$ unbedeutend wenig verschieden seyn wird, daher ersteres statt letzteres gesetzt werden kann.

§. 263. Zusatz.

Daraus folgt aber, wenn n sehr groß und z so wie z' dagegen sehr klein sind:

$$1)\ log\ nat.\ (n+z) - log\ nat.\ n = \frac{z}{n}$$

$$2)\ log\ nat.\ (n+z') - log\ nat.\ z' = \frac{z'}{n}$$

und wenn man (1.) durch (2.) dividirt:

$$3)\ \frac{log\ nat.\ (n+z) - log\ nat.\ n}{log\ nat.\ (n+z') - log\ nat.\ n} = \frac{z}{z'};$$

und wenn man hier links Zähler und Nenner durch *log* nat. p dividirt, und (§. 261. XI.) anwendet.

$$4)\ \frac{\overset{p}{log}\ (n+z) - \overset{p}{log}\ n}{\overset{p}{log}\ (n+z') - \overset{p}{log}\ n} = \frac{z}{z'}$$

d. h. die Unterschiede der Logarithmen sehr großer und nahe auf einander folgender Zahlen verhalten sich sehr nahe, wie die Unterschiede der Zahlen selbst.

Anmerkung 1. Sind daher *log* (n+z) und *log* n bereits bekannt, und *log* (n+z′) zu suchen, wo die Zahl n+z′ zwischen n+z und n liegen mag, so giebt die Gleichung (4.):

$$log\ (n+z') - log\ n = \frac{[log\ (n+z) - log\ n]}{z} z';$$

und dieser Unterschied zu *log* n addirt, giebt dann *log* (n+z′).

Man findet z. B. in der Tabelle der Brigg'schen Logarithmen

log 479630 = 5,6809063
log 479640 = 5,6809154,

wo also n = 479630 und z = 10. — Gesetzt nun, man wünschte *log* 479637 zu finden, so wäre z′ = 7 und *log* (n+z) − *log* n = 0,0000091; dahero

$$log\ (n+z') - log\ n = log\ 479637 - log\ 479630 = \frac{0,0000091}{10} \cdot 7$$

$$= \frac{0,0000637}{10} = 0,0000063;$$

und um so viel muß also *log* 479630 d. h. 5,6809063 vermehrt werden, wenn *log* 479637 sich ergeben soll. Man hat also

log 479630 = 5,6809063
addirt den Unterschied zu 7 = 0,0000063
giebt *log* 479637 = 5,6809126.

In den gewöhnlichen Tabellen findet man, weil man sich vorstellen kann, daß sie die Logarithmen aller 6ziffrigen Zahlen von 10 zu 10 berechnet enthalten, den Unterschied zweier auf einander folgender Logarithmen (deren Logarithmanden-Unterschied 10 ist) allemal rechts neben unter der Rubrik P. P. (partes proport.) oder Diff. angeführt und nun gleich, indem man z′ nach und nach = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sich denkt, diesen Unterschied der Logarithmen, für die 9 zwischenliegenden ganzen Zahlen berechnet, nach obiger Gleichung oder Proportion; so daß man rechts sogleich den Unterschied der Logarithmen stehen findet für jede einzelne Ziffer Unterschied zwischen den Logarithmanden. — Das nähere muß aus der Einleitung zu jeder dieser Tabellen ersehen werden.

Schluß-Anmerkung.

Wir können diese Materie nicht verlassen, ohne noch einer Methode zur Berechnung der Logarithmen zu erwähnen, welche häufig die Inter-

polations-Methode genannt wird, jetzt zwar veraltet ist, nach welcher aber in früherer Zeit die Logarithmen zum Theil berechnet worden sind.

Sind nehmlich von 2 Zahlen z. B. a und z die Brigg'schen Logarithmen bekannt, und durch a_I und z_I bezeichnet, so daß $log\ a = a_I$ und $log\ z = z_I$ ist, und soll nun von einer Zahl p, die zwischen a und z liegt, der Logarithme gefunden werden, so finde man $\sqrt{a.z} = d$, und hat dann $log\ (\sqrt{az}) = log\ d = \frac{log\ a + log\ z}{2} = \frac{a_I + z_I}{2}$, welche Zahl durch d_I bezeichnet seyn mag, so daß $log\ d = d_I$ gefunden ist. Diese Zahl d liegt nun entweder zwischen a und p oder zwischen p und z. Liegt sie zwischen a und p, also p zwischen d und z, so nehme man $\sqrt{dz} = u$ und $log\ u = log\ (\sqrt{dz}) = \frac{log\ d + log\ z}{2} = \frac{1}{2}d_I + \frac{1}{2}z_I = u_I$, so ist u und auch log u nehmlich u_I bekannt. Liegt nun diese Zahl u zwischen p und z, also p zwischen d und u, so nehme man $\sqrt{du} = r$ und $log\ r = log\ (\sqrt{du}) = \frac{log\ d + log\ u}{2} = \frac{d_I + u_I}{2} = r_I$, so daß r und auch log r nehmlich r_I bekannt sind. Liegt nun die Zahl r noch zwischen p und z, also p zwischen d und r, so suche man $\sqrt{dr} = m$ und $log\ m = log\ (\sqrt{dr}) = \frac{log\ d + log\ r}{2} = \frac{d_I + r_I}{2} = m_I$, so daß m, aber auch log m nehmlich m_I bekannt sind. Liegt nun m zwischen a und p, also p zwischen m und r, so suche man $\sqrt{mr} = q$ und $log\ q = \frac{m_I + r_I}{2} = q_I$, so daß q und log q nehmlich q_I bekannt sind. Liegt nun p zwischen m und q, so suche man noch $\sqrt{mq} = n$ und $log\ n = \frac{m_I + q_I}{2} = n_I$, so daß n und n_I bekannt sind. Man fährt aber so fort, auf demselben Wege immer neue und neue Zahlen z. B. $\sqrt{nq}$ zu finden, deren Logarithme $\frac{n_I + q_I}{2}$ ebenfalls gefunden werden kann, und welche der Zahl p immer näher und näher kommen, übrigens bald größer bald kleiner wie p seyn können, indem man jedesmal die nächsten beiden Zahlen, zwischen denen p liegt und deren Logarithmen schon bekannt sind, mit einander multiplicirt und die Quadrat-Wurzel auszieht und eben dadurch eine Zahl erhält, die der Zahl p noch näher liegt. Indem aber die Logarithmen der Zahlen bekannt sind, zwischen denen p liegt, und die dem p selbst immer näher und näher kommen, findet man zuletzt log p immer näher und näher und so nahe als man nur immer will.

Arithmetik.

Achtzehntes Kapitel.

Von den Kettenbrüchen. Auffindung von Näherungs-Brüchen.

§. 264. Erklärung.

Wenn man von einem Bruche, der sich nicht mehr aufheben läßt z. B. $\frac{92}{203}$ Zähler und Nenner durch den Zähler 92 dividirt, so erhält man $\frac{92}{203} = \frac{1}{2+\frac{19}{92}}$. Dividirt man in $\frac{19}{92}$ abermals Zähler und Nenner durch 19, so erhält man

$$\frac{19}{92} = \frac{1}{4\frac{16}{19}}, \quad \text{also} \quad \frac{92}{203} = \frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{16}{19}}}.$$

Fährt man aber so fort, von dem noch entstehenden Bruche, dessen Zähler noch nicht 1 ist, Zähler und Nenner durch den Zähler zu dividiren, so erhält man zuletzt

$$\frac{92}{203} = \frac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\frac{1}{3}}}}};$$

und einen solchen Bruch, wie der hier rechts stehende nennt man einen Kettenbruch oder continuirlichen Bruch.

Man kann sich auch einen solchen continuirlichen Bruch denken, der in das Unendliche fortgeht.

§. 265. Aufgabe.

Die Kettenbrüche $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ oder $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

oder $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$ oder $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}$

u. s. w. f. in gewöhnliche Brüche zu verwandeln.

Auflösung. Man bilde sich 3 Reihen von Zahlen. In die (I.) setze man alle Nenner des gegebenen Kettenbruches, nehmlich a, b, c, d, e, f, g, etc. etc.

Der Reihe (II.) setze man die Glieder 1,0; der Reihe III. dagegen die Glieder 0,1 vor; und nun bilde man jedes Glied der beiden letztern Reihen (II. und III.) dadurch, daß man allemal den, über dem zu bildenden Gliede stehenden Zeiger in der Reihe (I.) mit dem nächstvorhergehenden Gliede multiplicirt und zu dem Produkt das zweite vorhergehende derselben Reihe addirt. Das Schema gewinnt dann folgende Gestalt:

I.	a,	b,	c,	d,	e,	f,
II.	1,	0,	1,	b,	bc+1,	bcd+b+d,
III.	0,	1,	a,	ab+1,	abc+a+c,	abcd+ab+ad+cd+1,

Das unter e in (I.) stehende Glied der IIten Reihe wird $=(bcd+b+d)e+bc+1$ oder $=bcde+bc+be+de+1$; und das entsprechende Glied in (III.) wird dagegen

$=(abcd+ab+ad+cd+1)e+abc+a+c = abcde+abc+abe+ade+cde+a+c+e$;

und so die folgenden Glieder in jeder Reihe.

Die unter einander stehenden Glieder der Reihen (II. und III.) bilden nun die Zähler (in II.) und die Nenner (in III.) für die gesuchten Brüche, so daß also die gewöhnlichen Brüche $\frac{1}{a}$, $\frac{b}{ab+1}$, $\frac{bc+1}{abc+a+c}$, $\frac{bcd+b+d}{abcd+ab+ad+cd+1}$, u. s. w. f. der Reihe nach die Werthe sind unsers oben gegebenen Kettenbruches, jedesmal so weit nur genommen, als das über diesen Zählern und Nennern, in (I.) stehende Glied anzeigt.

Beweis. Es ist $a+\frac{1}{b}=\frac{ab+1}{b}$; folglich $\frac{1}{a+\frac{1}{b}}$ $=\frac{b}{ab+1}$; welches mit dem eben gefundenen Resultat übereinstimmt. — Man darf daher nur noch zeigen, daß wenn die angegebene Entwicklung des gewöhnlichen Bruches für irgend eine Zahl von Gliedern des Kettenbruches zutrifft, selbige auch jedesmal für die nächstfolgende Zahl von Gliedern zutreffen müsse. Es sey daher der Werth des Kettenbruches für irgend eine Anzahl Glieder von a bis p, $=\frac{pN+M}{pN_1+M_1}$ auf obigem Wege gefunden, wo $\frac{M}{M_1}$ und $\frac{N}{N_1}$ die nächst vorhergehenden Brüche, und wo also M, M_1, N und N_1 von p ganz unabhängig sind.

Der nächstfolgende Kettenbruch, welcher ein Glied q mehr hat, entsteht nun offenbar aus diesem, wenn $p+\frac{1}{q}$ oder $\frac{pq+1}{q}$ statt p gesetzt wird, wie die bloße Ansicht des Kettenbruches lehrt. Also entsteht auch sein Werth als gewöhnlicher Bruch, wenn man in dem des vorhergehenden $\frac{pN+M}{pN_1+M_1}$ ebenfalls $p+\frac{1}{q}$ oder $\frac{pq+1}{q}$ statt p setzt. Dadurch erhält man aber den neuen Bruch, welcher die Glieder von a bis q enthält,

$$= \frac{\frac{pq+1}{q}.N+M}{\frac{pq+1}{q}N_1+M_1} = \frac{(pN+M)q+N}{(pN_1+M_1)q+N_1};$$

und betrachtet man diesen Zähler und Nenner genauer, so findet man augenblicklich, daß jeder aus den beiden vorhergehenden $\frac{N}{N_1}$ und $\frac{pN+M}{pN_1+M_1}$ nach dem oben angegebenen Gesetze hätte gefunden werden können.

Folglich gilt das angegebene Gesetz der Entwicklung der gemeinen Brüche, für jede Anzahl von Gliedern, die der Kettenbruch haben soll.

Beispiel. Die Kettenbrüche $\frac{1}{2+\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{2+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}$, überhaupt $\frac{1}{2+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{1}+\frac{1}{7}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}}$ in gewöhnliche Brüche zu verwandeln.

Man hat hier:

I.		2,	3,	5,	1,	7,	6,	4
II.	1, 0,	1,	3,	16,	19,	149,	913,	3801
III.	0,	1,	2,	7,	37,	44,	345,	2114, 8801

und $\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{16}{37}, \frac{19}{44}, \frac{149}{345}, \frac{913}{2114}, \frac{3801}{8801}$

sind daher die Werthe des gegebenen Kettenbruches, je nachdem man nur 1, oder 2, 3, 4, 5, 6 oder alle 7 seiner Glieder nimmt.

Anmerkung. Die einzelnen Brüche, welche aus einem Kettenbruch hervorgehen, wenn man nicht alle seine Glieder, sondern nur 2, 3, 4, 5, etc. seiner ersten Glieder berücksichtigt, nennt man Partialbrüche. — Wenn bei den Partialbrüchen des vorliegenden Beispiels

$\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{16}{37}, \frac{19}{44}, \frac{149}{345}, \frac{913}{2114}, \frac{3801}{8801}$

jedesmal der folgende von seinem nächst vorhergehenden subtrahirt wird, so erhält man nach der Reihe

$$\frac{1}{2.7}, \frac{-1}{7.37}, \frac{1}{37.44}, \frac{-1}{44.345}, \frac{1}{345.2114}, \frac{-1}{2114.8801}.$$

Dieselbe Eigenschaft bemerkt man bei allen auf einander folgenden Partialbrüchen, die aus irgend einem Kettenbruche hervorgehen, daß sie nehmlich so von einander subtrahirt zum Zähler abwechselnd $+1$ und -1 geben, zum Nenner aber das Produkt der Nenner. Folgender Lehrsatz wird dies allgemein geltend machen.

§. 266. Lehrsatz.

Sind $\frac{M}{M_1}, \frac{N}{N_1}, \frac{P}{P_1}$ drei auf einander folgende Partialbrüche, die aus irgend einem Kettenbruch hervorgehen, so ist allemal

$$\frac{M}{M_1} - \frac{N}{N_1} = \frac{\mp 1}{M_1 N_1} \text{ und } \frac{N}{N_1} - \frac{P}{P_1} = \frac{\mp 1}{N_1 . P_1}.$$

Beweis. Denn es ist

$$1) \quad \frac{M}{M_1} - \frac{N}{N_1} = \frac{MN_1 - M_1 N}{M_1 . N_1}.$$

Ist nun p das letzte Glied des letzten Partialbruches $\frac{P}{P_1}$, so hat man nach (§. 265.) $P = pN + M$, $P_1 = pN_1 + M_1$, folglich

$$\frac{N}{N_1} - \frac{P}{P_1} = \frac{N}{N_1} - \frac{pN + M}{pN_1 + M_1} = \frac{-(MN_1 - M_1 N)}{N_1 (pN_1 + M_1)}$$

oder

$$2) \quad \frac{N}{N_1} - \frac{P}{P_1} = \frac{-(MN_1 - M_1 N)}{N_1 . P_1}.$$

Ist also der Zähler der ersten Differenz $= \pm z$, so ist der Zähler der zweiten offenbar dann $\mp z$; und dies allemal, sobald nur $\frac{M}{M_1}, \frac{N}{N_1}, \frac{P}{P_1}$ drei auf einander folgende Partialbrüche sind.

Sind nun a, b, c, die 3 ersten Glieder des Kettenbruchs, so sind die 3 ersten auf einander folgenden Partialbrüche nach (§. 265.):

$$\frac{1}{a}, \quad \frac{b}{ab + 1}, \quad \frac{bc + 1}{abc + a + c}$$

und die Differenzen derselben

$$\frac{1}{a(ab + 1)}, \quad \frac{-1}{(ab + 1)(abc + a + c)}.$$

Also hat die nächstfolgende Differenz $+1$, die dann nächstfolgende wiederum -1, die darauf folgende allemal $+1$, u. s. w. f. zum Zähler, während, wie man sieht, das Produkt der Nenner allemal der Nenner der Differenz ist.

§. 267. Zusatz.

Hieraus folgt aber unmittelbar: Jeder Partialbruch ist zugleich größer als die beiden ihn zunächst umgebenden und dann zugleich auch größer als der ganze Kettenbruch; oder er ist zugleich kleiner als jeder von den beiden, der ihm zunächst vorangehenden und zunächst folgenden Partialbrüche und dann auch immer kleiner als der ganze Kettenbruch. — Die auf einander folgenden Partialbrüche sind daher abwechselnd größer und kleiner als der ganze Kettenbruch, nähern sich aber dem Kettenbruche selbst immer mehr und mehr, bis endlich der letzte in der Reihe der Partialbrüche mit dem ganzen Kettenbruche zusammenfällt.

Anmerkung. Man kann auch durch folgende Betrachtungen zu ähnlichen Resultaten gelangen.

Fügt man dem Nenner a des Bruches $\frac{1}{a}$ noch $\frac{1}{b}$ hinzu, so wird der Nenner größer, also der neue Bruch $\frac{1}{a+\frac{1}{b}}$ selbst kleiner als der vorige $\frac{1}{a}$. Also ist der zweite Partialbruch kleiner als der erste. Fügt man nun zu b noch $\frac{1}{c}$, so wird auch

$b+\frac{1}{c} > b$, also $a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}} < a+\frac{1}{b}$ und $\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}} > \frac{1}{a+\frac{1}{b}}$.

Also ist der dritte Partialbruch wieder größer als der 2te. Aus demselben Grunde wird nun der 4te wieder kleiner als der dritte, u. s. w. f.

§. 268. Zusatz.

Man kann sich aber dieser Theorie der Kettenbrüche bedienen, um für einen Bruch $\frac{x}{z}$, dessen Zähler a und Nenner b keinen gemeinschaftlichen Theiler mehr haben, der sich also genau nicht mehr in kleinern Zahlen ausdrücken läßt, eine Reihe von Näherungsbrüchen zu finden, welche in kleinern Zahlen ausgedrückt sind, und dem gegebenen Bruche

$\frac{x}{z}$ dergestalt sich nähern, daß es außer dem jedesmal gefundenen Näherungsbruch keinen zweiten mehr giebt, welcher in eben so großen oder kleinern Zahlen ausgedrückt wäre und dem $\frac{x}{z}$ eben so nahe oder noch näher käme.

Man darf aber, um diesen Zweck zu erreichen, nichts weiter thun, als $\frac{a}{b}$ nach (§. 264.) in einen Kettenbruch verwandeln, d. h. durch successive Division die Quotienten finden, welche in (§. 264.) durch a, b, c, d, etc. etc. ausgedrückt sind, und nun die Partialbrüche finden in der Reihe, so hat man diese gesuchten Näherungsbrüche.

Beispiel 1. Man soll $\frac{7147}{13597}$ näherungsweise in kleinern Zahlen ausdrücken. —

Die Division (§. 264.) liefert

7147	13597	1	
	7147		
6450	7147	1	
	6450		
697	6450	9	
	6273		
177	697	3	
	531		
166	177	1	
	166		
11	166	15	
	165		
1	11	11	
	11		

Die in (§. 264.) erhaltenen Quotienten, welche die Glieder a, b, c, d, e, f, g, etc. etc. des (§. 265.) gegebenen Kettenbruches bilden, sind daher hier 1, 1, 9, 3, 1, 15, 11 und das Schema zur Auffindung der Partialbrüche aus (§. 265.):

I.	1,	1,	9,	3,	1,	15,	11	
II.	1,	0,	1,	1,	10,	31,	41,	646, 7147
III.	0,	1,	1,	2,	19,	59,	78,	1229, 13597

und die Näherungsbrüche selbst in der Reihe

$\frac{1}{2}, \frac{10}{19}, \frac{31}{59}, \frac{41}{78}, \frac{646}{1229}$.

Beispiel 2. Das Verhältniß des Durchmessers zum Umfange eines Kreises ist genähert 1:3,14159 oder 100000:314159. Man soll Näherungs-Verhältnisse finden, statt dieses gegebenen, in kleinern Zahlen ausgedrückt.

Die Division giebt hier

100000 | 314159 | 3
| 300000 |

14159 | 100000 | 7
| 99113 |

887 | 14159 | 15
| 13305 |

854 | 887 | 1
| 854 |

33 | 854 | 25
| 825 |

29 | 33 | 1
| 29 |

4 | 29 | 7
| 28 |

1 | 4 | 4

und dann nach (§. 265.):

I.	3,	7,	15,	1,	25,	1,	7,	4
II.	1, 0,	1,	7,	106,	113,	2931,	3044,	24239, 100000
III.	0,	1,	3,	22,	333,	355,	9208,	9563, 76149, 314159

und die gesuchten Näherungs-Verhältnisse sind daher

$\frac{1}{3}$, $\frac{7}{22}$ $\frac{106}{333}$, $\frac{113}{355}$, $\frac{2931}{9208}$, $\frac{3044}{9563}$, $\frac{24239}{76149}$. *)

Noch mehr Uebungs-Beispiele.

Nr.	Geg. Br.	Quotienten.	Näherungs-Brüche.
1)	$\frac{417}{599}$	1, 2, 3, 2, 3, 3, 2	$\frac{1}{1}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{16}{23}$, $\frac{55}{79}$, $\frac{181}{260}$,
2)	$\frac{431}{729}$	1, 1, 2, 4, 6, 2, 2	$\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{13}{22}$, $\frac{81}{137}$, $\frac{175}{296}$,
3)	$\frac{76284}{45639}$	5, 1, 58, 7, 1, 1, 2, 3	$\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{59}{353}$, $\frac{414}{2477}$, $\frac{473}{2830}$, $\frac{887}{5307}$, $\frac{2247}{13444}$,
4)	$\frac{5876}{973}$	6, 25, 1, 1, 1, 1, 7	6, $\frac{151}{25}$, $\frac{157}{26}$, $\frac{308}{51}$, $\frac{465}{77}$, $\frac{773}{128}$,
5)	$\frac{76233}{11123}$	6, 1, 3, 1, 2, 1, 1, 4, 3, 2	6, 7, $\frac{27}{4}$, $\frac{34}{5}$, $\frac{95}{14}$, $\frac{129}{19}$, $\frac{224}{33}$, $\frac{1025}{151}$, $\frac{3299}{486}$,
6)	$\frac{5291}{11139}$	2, 6, 1, 1, 7, 1, 1, 2	$\frac{1}{2}$, $\frac{6}{13}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{13}{28}$, $\frac{98}{211}$, $\frac{111}{239}$, $\frac{209}{450}$,
7)	$\frac{4133}{13358}$	3, 3, 2, 8	$\frac{1}{3}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{23}$, $\frac{59}{194}$ $(=\frac{4133}{13358})$.

*) Das Verhältniß 7:22 ist das von Archimedes gefundene; 113:355 hat Metius gefunden, und ist schon ziemlich genau. Die übrigen nähern sich dem gegebenen 1;3,14159, aber nicht dem wahren Verhältniß des

Schluß-Anmerkung.

Man kann sich der Theorie der Kettenbrüche bedienen, um Wurzeln auszuziehen, überhaupt gegebene numerische Gleichungen aufzulösen, und dergl. mehr, alles in Näherungsbrüchen. Wer sich über alles dieses gründlicher und ausführlicher belehrt sehen will, lese

Kaußler: die Lehre von den cont. Brüchen etc. etc. Stuttgard 1803.

vorzüglich aber, wegen der so wichtigen Grenzbestimmungen der möglichen Fehler der Näherungsbrüche,

Eytelwein: Grundlehren der höhern Analysis. Berlin 1824. Kap. IX. des I. Bandes.

Hier mag nur im Allgemeinen noch bemerkt werden: Wenn irgend ein gesuchter Ausdruck A als Kettenbruch hergestellt werden soll, (so daß dann seine Partialbrüche Näherungswerthe des gesuchten Ausdrucks A geben), so setze man zuerst $A=\frac{1}{x}$ und bestimme x näherungsweise etwa durch (x), dann setze man $(x)+\frac{1}{x_1}$ statt x und bestimme x_1 näherungsweise, etwa durch (x_1); alsdann setze man $(x_1)+\frac{1}{x_2}$ statt x_1 und bestimme x_2 näherungsweise, etwa durch (x_2); u. s. w. f., und so wird man zuletzt A als Kettenbruch ausgedrückt haben, nehmlich

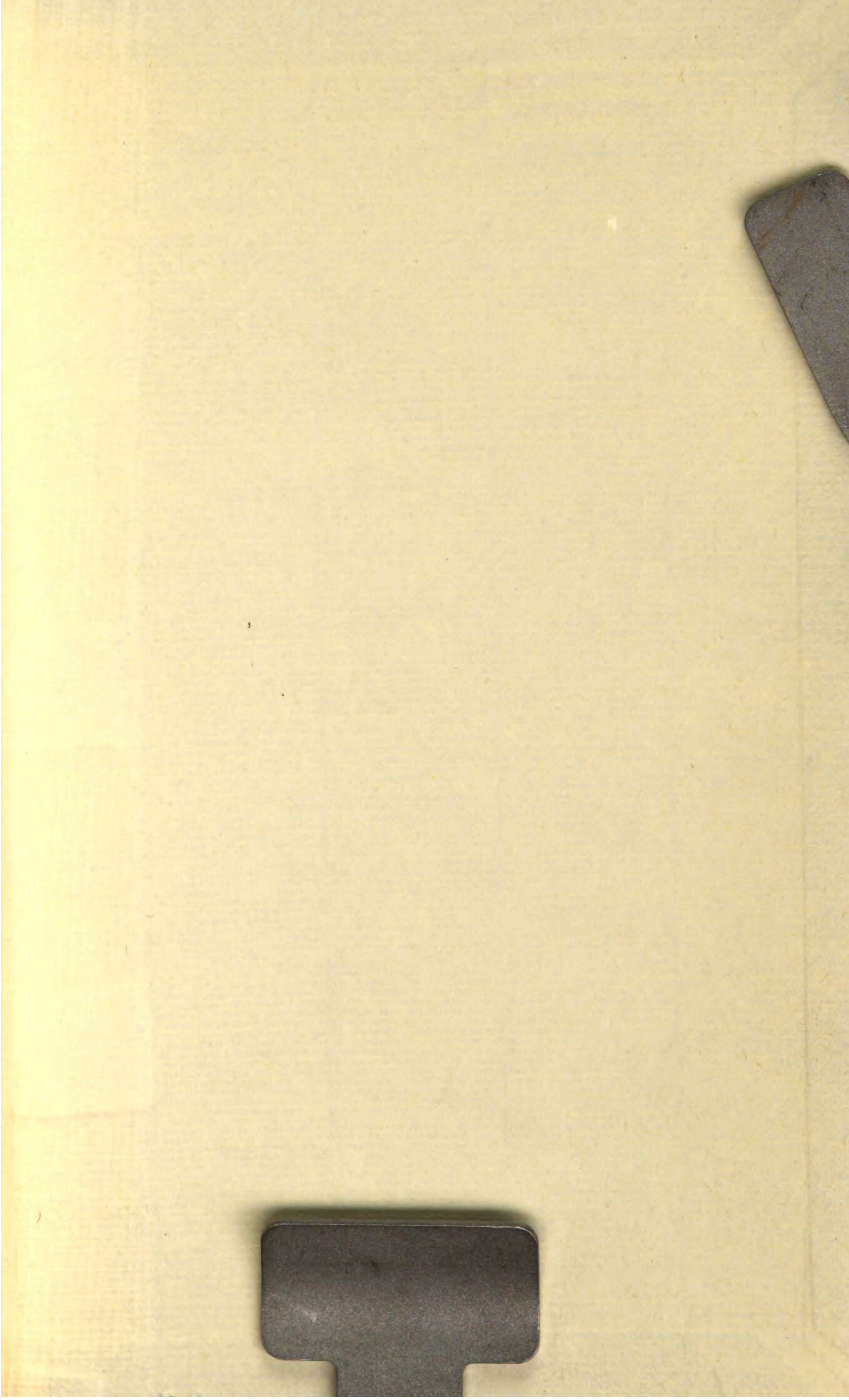
$$A=\frac{1}{(x)}+\frac{1}{(x_1)}+\frac{1}{(x_2)}+\frac{1}{(x_3)}+\text{ etc. etc.}$$

und die einzelnen Partialbrüche nach (§. 265.) berechnet, geben dann Näherungswerthe von A.

Durchmessers zum Umfange, in so ferne das gegebene selbst nur ein Näherungs-Verhältniß ist, in Bezug auf das wahre.

Gedruckt bei Trowitzsch und Sohn.

Bayerische Staatsbibliothek München



BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Ohm, Martin,

Die reine Elementar-Mathematik weniger abstrakt, sondern mehr anschaulich und leichtfaßlich, aber möglichst gründlich und wissenschaftlich, zunächst für seine Vorlesungen an der königl. Bau-Akademie zu Berlin, dann auch zum Gebrauche an andern ähnlichen Lehr-Anstalten, besonders aber an Gymnasien
Bd.: 1. Die Arithmetik bis zu den höhern Gleichungen

Berlin 1825 - 1839

Math.p. 382 fm-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082508-7